ENCYKLOPÄDIE

DER

ELEMENTAR-MATHEM

EIN HANDBUCH FÜR LEHRER UND STUDI

VON

HEINRICH WEBER
PROFESSOR IN STRASSBURG

UND

JOSEF WELLSTEIN
PROFESSOR IN GIESSEN.

IN DREI BÄNDEN.

ERSTER BAND.

ELEMENTARE ALGEBRA UND ANALY

ZWEITE AUFLAGE.

ENCYKLOPÄDIE

DER

ELEMENTAREN ALGEBRA UND ANALYSIS.

BEARBEITET

VON

HEINRICH WEBER.

MIT 38 FIGUREN IM TEXT.

ZWEITE AUFLAGE.

Vorrede zur ersten Auflage.

Das Buch, dessen erster Band hiermit in die Öffentlichkeit t
kein Schulbuch im eigentlichen Sinne des Wortes sein. Die Le
die wir uns wenden, sind einerseits die Lehrer, die, wie
fen, darin Anregung finden mögen, ihren Unterrichtsstoff s
näß auszuwählen und, namentlich in den höheren Klassen, zu
en; andererseits Studierende, die bei ihren Berufsstudien die hö
thematik betreiben, und dabei eine Anlehnung an die Elem
Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse suc
Es ist unmöglich, nach einem wissenschaftlichen Gesichtspu
Begriff der Elementarmathematik scharf abzugrenzen. Wenn n
wohl versucht worden ist, die Elementarmathematik da aufhö
t, wo der Grenzbegriff einsetzt, so erhält man zwar in
thmetik ein gut abgegrenztes Gebiet, das so ziemlich die ga
lentheorie enthalten könnte, das sogar, konsequent weitergebil
alle dem führen könnte, was nach Kroneckers Ansicht in
thematik überhaupt legitim ist. Aber bereits die Irrationalzah
o schon Quadratwurzeln und Logarithmen, müßten davon au
lossen werden. Andrerseits muß man aber in der Geometrie d
s das zu den Elementen rechnen, was der Konstruktion mit Li
Zirkel zugänglich ist, und da läßt sich, wenn man eine Ver
ng zwischen Arithmetik und Geometrie anstrebt, die Quadratwu

Sieht man es als die vornehmste Aufgabe der wissenschaftlic
ziehung an, dem Geiste eine allseitig harmonische Ausbildung
en, die in ihm schlummernden Kräfte zu wecken und zu ü
l ihn zu einer höheren Auffassung des Lebens zu befähigen,
d die Einrichtung des Unterrichts eine andere sein müssen,
nn es sich darum handelt, eine gewisse Summe nützlicher Ke
se und Fertigkeiten auszubilden, die den Jüngling so früh wie
glich gerüstet und kampfbereit der harten Notwendigkeit des Leb
genüberstellen.

Der zuletzt genannte Zweck drängt dahin, den Stoff des Un
hts auszudehnen, möglichst viel den Elementen zuzuweisen, da
spätere Fachstudium sich nicht bei den vorbereitenden Diszipli
zuhalten braucht, und gleich bei seinem speziellen Gegenstand
zen kann.

Es liegt aber auf der Hand, daß dies nur auf Kosten der T
l Gründlichkeit möglich ist, und die Gefahr besteht, daß da
eigentliche Bildungswert des mathematischen Unterrichts ni
l zur Geltung kommt.

Dieser letztere ist zudem für die verschiedenen Individualitä
sehr verschiedener. Die mathematische Produktion hat etwas
nstlerischer Tätigkeit an sich, und zwar nicht bloß die eigentli
öpferische Tätigkeit, sondern auch die Produktion im kleinen,
n in der Lösung von Aufgaben oder auch nur beim genauen
hen mathematischer Gedankenfolgen zeigt. Sie kann durch i
schaulichkeit den Geist vollständig gefangen nehmen, und ist
ür Organisierten eine Quelle reichsten Genusses. Und dies
ht minder von der abstrakten Anschauung im Reiche der Zah
von den Raumanschauungen der Geometrie.

Es ist mir daher auch nicht zweifelhaft, daß für einen
hsten Sinne erfolgreichen mathematischen Unterricht eine gew
ezifische Begabung erforderlich ist, womit nicht bestritten wer
l, daß es sehr wohl möglich und für die logische Zucht

ung und Förderung, die mir sein Unterricht gewährte.[1])
nig es ihm gegeben war, die Masse der Schüler zu fördern,
hinreißender war sein Unterricht für einzelne, denen sein fei
thematischer Sinn und seine tiefe, der Zeit vorauseilende A
sung der Physik verständlich war.

Die Mathematik hatte in jener Zeit an den süddeutschen Gy
ien im Unterrichtsplan eine untergeordnete Stellung und gerin
sehen bei den übrigen Lehrern und bei der Mehrzahl der Schü
ne nachhaltige Einwirkung war daher nur bei dem kleinen K
mathematisch veranlagten Schüler möglich. Das ist jetzt übe
ser geworden, und daß ein Schüler ohne jedes Verständnis du
mathematischen Lehrstunden geht und schließlich doch als
lassen wird, kommt jetzt wohl kaum noch vor.

Es ist dies ein unverkennbarer Fortschritt; nur darf er nicht
sten des innern Gehaltes gemacht werden, damit auch der ma
tisch tiefer Angelegte bei dem neuen Systeme noch zu sei
chte kommt. Dies geschieht aber nicht dadurch, daß man
sern Schüler möglichst weit über die Grenzen der Elemen
thematik hinaus in das Gebiet der höheren Analysis führt.
gen werden künftige gründliche mathematische Studien eher
nmt als gefördert. Viel fruchtbarer, bildender und belebender
Vertiefung des Inhalts des elementaren Unterrichts, der innerh
alten Grenzen einen unerschöpflichen Reichtum an Stoff bi

Es soll hier dem Lehrer vollkommene Freiheit gelassen wer
ter dieser Fülle je nach seiner wissenschaftlichen Neigung
swahl zu treffen. Denn nur da kann eine fruchtbare Einwirk
f den Schüler erwartet werden, wo auf der Seite des Lehrers se
ch Interesse an dem Gegenstand des Unterrichts lebendig ist.

Es ist bei der Bearbeitung unseres Buches Gewicht auf
enge Entwicklung der logischen Voraussetzung gelegt, in de
kenntnis, sowohl für die Arithmetik als für die Geometrie,
Forschung der letzten Jahrzehnte wesentlich gefördert hat.

lkenntnisse verlangen, finden ihre Stelle sachgemäß am Einga
eichwohl wird zu ihrer richtigen Auffassung eine gewisse Reife
teils vorausgesetzt und daher dürfte dem noch nicht vollstän
ngeweihten zu raten sein, das Studium des Buches mit den späte
piteln zu beginnen, die den eigentlich mathematischen Stoff enthal
Es dürfte wohl möglich sein, in einer gut vorgebildeten Pr
ige dieser prinzipiellen Fragen in der Form einer philosophisc
opädeutik zu behandeln. Doch ist dabei Vorsicht anzuraten, d
halbes Verständnis ist hierbei so gut oder schlimmer wie
nes.

Für die Mehrzahl der Schüler wird es weit nützlicher und
gender sein, wenn der Unterricht nach der Seite der Anwendung
ausgebildet wird, wozu ja durch die neue preußische Prüfur
lnung für Oberlehrer ein erfreulicher Anstoß gegeben ist. D
wendungen können zur Belebung des mathematischen Unterricl
l beitragen, fördern das Interesse und können auch durch Pfl
Zeichnens und die der Mathematik so wohl anstehende Genauig
d Sorgfalt in der Ausführung des Kleinen und Einzelnen den
herischen Wert dieses Unterrichtszweiges steigern.

Im Laufe der Arbeit hat sich der Stoff vermehrt und der I
veitert; es erschien daher zweckmäßig, statt zweier, wie urprü
n beabsichtigt, drei handliche Bände zu machen, deren erster
thmetische und analytische Gebiet, der zweite die Geometrie
dritte die Anwendungen enthalten soll. Wir hoffen, daß
den folgenden Bände dem ersten in kurzer Zeit folgen wer
ist auf diese Weise möglich geworden, den Anwendungen et
iteren Spielraum zu geben, auf die auch schon bei der Ausw
Beispiele Rücksicht genommen ist.

Übrigens sind wir, dem Plane unsers Werkes entsprechend,
Behandlung von Beispielen sparsam gewesen. Beispiele,
ß dem Zweck der Übung dienen, konnten wir um so eher
rücksichtigt lassen, da wir an trefflichen und reichhaltigen A

einen wird, den wir im Manuskript einsehen durften, sehr lässige und vollständige historische und literarische Angaben ü Fragen bringen, die zur Elementarmathematik gerechnet wer nen. Mit Rücksicht hierauf schien es uns zu genügen, wenn em vorkommenden Eigennamen, der etwa zur Benennung ei rsatzes dient, in einer kurzen Note auf die Lebenszeit und Leb stände des betreffenden Autors hingewiesen ist.

Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß unsere Arbeit ei regung des Verlegers, Herrn Alfred Ackermann-Teubner, i tstehung verdankt, der uns auf die jetzt vollständig vergriffe emente der Mathematik" von Baltzer hinwies, die in mehre flagen verbreitet sind, also gewiß einem Bedürfnis der mathe hen Welt entsprechen. Ein solches Werk vom Standpunkt tigen Wissenschaft neu zu bearbeiten erscheint daher als eine da e Aufgabe, die ich um so lieber übernahm, als ich seit dem Ja 38 in Marburg, Göttingen und Straßburg unter dem Titel „En pädie der Elementarmathematik" Universitäts-Vorlesungen mit ichen Zielen eingerichtet hatte.

Straßburg, im Juli 1903.

H. Weber

Vorrede zur zweiten Auflage.

Der erste Band unserer „Encyklopädie der Elementarmathemat
von der mathematischen Welt und von der Kritik günstig a
ıommen worden. Aber neben überschwänglichen Lobspräc
d Wünsche verschiedener Art, teils in der Kritik, teils
sönlichen Mitteilungen laut geworden. Ich habe alle d
insche sorgfältig geprüft und mich bemüht, ihnen in der zwei
flage, soviel ich sie irgend für berechtigt hielt, entgegen
nmen.

Mehrfach ist der Wunsch nach einer eingehenderen Behandl
historischen Teils geäußert worden. Um hier nicht zuviel
und um mich doch nicht auf die trockne Aufzählung
chertiteln und Jahreszahlen zu beschränken, habe ich den V
vählt, einzelne Teile der Mathematik, die von einem allgemeine
eresse sind, etwas eingehender zu behandeln, ohne jedoch a
r eine Vollständigkeit zu erstreben, gewissermaßen kleine hi
he Skizzen aus der Geschichte der Mathematik zu geben. Hi
und in anderen Fragen — habe ich mich des kundigen Ra
l tätiger Hilfe des Herrn Stäckel in Hannover erfreuen dür
für ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

Von bedeutenderen Änderungen habe ich noch den 27ten
nitt zu erwähnen, der die ersten Elemente der Differential

diesen Disziplinen bewährten und allgemein angenommenen Nam
l Bezeichnungen gebrauchen oder ob man sie umschreiben wil
Einen triftigen Grund, wenn man die Begriffe gibt, die Nam
verschweigen, vermag ich aber nicht zu finden. Denn daß
hüler, der die Mathematik bei seinem späteren Studium brau
Wenige, was auf der Schule geboten werden kann, für a
chend halten und darum spätere Studien mit minderem Inter
er minderem Ernst betreiben sollte, ist doch kaum zu befürch
habe mich um so mehr entschlossen, dem Werke den 27ten
nitt beizufügen, als in den vorangehenden Abschnitten über
lliche Reihen schon alles enthalten ist, was zum Verständnis di
undbegriffe nötig ist, und weil in der Geometrie der Begriff
ngente, der Krümmung, des Flächeninhaltes, des Volumens d
ht übergangen werden kann.

Straßburg, im November 1905.

H. Weber

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Buch.

Grundlagen der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Natürliche Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Die Rechenoperationen.

Vierter Abschnitt.

Irrationalzahlen.

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse.

Sechster Abschnitt.

Potenzen und Logarithmen.

Achter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen und imaginäre Zahlen.

Neunter Abschnitt.

Permutationen und Kombinationen.

Zehnter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

Zwölfter Abschnitt.

Hauptsätze der Algebra.

Dreizehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen ersten Grad

Vierzehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen zweiten Gra

Fünfzehnter Abschnitt.

Kettenbrüche.

Siebzehnter Abschnitt.

Genäherte Berechnung der Wurzeln numerischer Gle

Achtzehnter Abschnitt.

Kreisteilung.

Neunzehnter Abschnitt.

Unmöglichkeitsbeweise.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Unbegrenzt konvergente Reihen für die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Die Binomialreihe.

Vierundzwanzigster Abschnitt.

Logarithmische Reihen.

Sechsundzwanzigster Abschnitt.

Transzendenz von e und π.

Siebenundzwanzigster Abschnitt.

Funktionen, Differentiale und Integrale.

ERSTES BUCH.

GRUNDLAGEN DER ARITHME

Erster Abschnitt.

Natürliche Zahlen.

§ 1. Einheiten, Mengen.

1. Es ist dem Menschengeist die Fähigkeit gegeben, unter
ıt ineinander spielender Eindrücke, Empfindungen, Vorstellung
danken eine gewisse Gruppe von allen anderen zu unterschei
d als eine Einheit, ein Ding aufzufassen. Diese Abgrenz
ht durchaus in unserer Willkür; wir lassen uns dabei aber
eckmäßigkeitsgründen leiten. Wenn wir uns mit anderen k
rständigen wollen, geben wir einem solchen Ding einen Nan
r Begriff der Einheit ist aber keineswegs auf solche Dinge
ıränkt, die in den Kultursprachen Namen haben, auch nicht
rperliche, konkrete Dinge. Mit dem Begriff der Einheit ist a
gleich der der Vielheit (Mehrheit) gegeben.

2. Ein weiterer Schritt in unserer Gedankenbildung ist die A
sung einer Mehrheit von Dingen und ihre Zusammenfassung
ıer neuen Einheit, die wir eine Einheit höherer Ordnung,
stem, eine Klasse, eine Gattung oder auch eine Menge nenn
e Einzeldinge eines solchen Systems heißen ihre Elemente.

Auch die Bildung dieser Klassen ist willkürlich. Eine Kla
rd wohl definiert sein, wenn von jedem Ding entschieden

Häufig vorkommende Gattungen verdichten sich in unsere
stellung zu Begriffen, bei denen wir nicht mehr an die V
denken, und wir gewinnen dadurch neue Einheiten. Wir scha
Dinge, denen wir auch objektiv eine gewisse Wirklichkeit zusch
die Ideen. Die Ideenbildung wirkt schon bei der Schöpfun
Einheiten, die der uns umgebenden Wirklichkeit niemals scha
sprechen. Am schlagendsten zeigt sie sich bei den Zahlbegriffe
so kompliziert ihre ursprüngliche Definition ist, schließlich in u
Vorstellen zu einfachen Dingen werden.

§ 2. Verknüpfung, Mächtigkeit.

1. Die dritte Tätigkeit unseres Geistes ist die Verknü
von Dingen untereinander. Jedes Urteil, jede Aussage, di
die bloße Nennung eines Namens hinausgeht, ist eine solch
knüpfung. Aber auch hier sind wir vollkommen frei, irgend
Dinge miteinander zu verknüpfen. Eben durch diesen geistige
erlangen sie eine Beziehung zueinander.

Aber in einer guten und zweckmäßigen Herstellung solche
bindungen besteht aller Fortschritt unserer Erkenntnis.

In unseren allgemeinen Erörterungen bezeichnen wir die M
durch große lateinische Buchstaben. Sind A und B solche M
so können wir versuchen, jedes Element der Menge A mit eine
stimmten Element der Menge B so zu verknüpfen, daß niemal
verschiedene Elemente der Menge A mit demselben Element
verbunden sind. Eine solche Verknüpfung nennen wir eine
bildung der Menge A auf die Menge B. Die Elemente
mögen hierbei die Originale und die entsprechenden Element
B ihre Bilder genannt werden.

Von welchem Nutzen eine solche Abbildung sein kann, le
ein; denn wenn wir die Menge B in unseren Gedanken

oder äquivalent. Das Zeichen der Äquivalenz ist ~

$$A \sim B$$

zu lesen ist: „A ist äquivalent mit B“.

Es ist bei alle dem nicht ausgeschlossen, daß die
B miteinander identisch sind; man kann also auch
bildung einer Menge auf sich selbst reden. I
Element von A mit sich selbst oder auch mit einem a
von A verbunden sein. Ist jedes Element von A mit
bunden, so ist die Abbildung jedenfalls eindeutig, und
Menge mit sich selbst von gleicher Mächtigkeit.

Zu beachten ist aber bei der Abbildung einer
selbst, daß hier ein Element einmal als Original, das
Bild mit einem anderen verbunden ist, und daß die
verschieden sein können. Die Abbildung einer Menge
wird anschaulich, wenn man sich dieselbe Menge in z
gegeben vorstellt. Dadurch wird die Abbildung der
selbst zurückgeführt auf die Abbildung einer Menge a

Beispiele von Mengen gleicher Mächtigkeit sind
einen und der anderen Hand, oder die Punkte einer S
Punkte einer zweiten Strecke. Um letzteres einzuseh
sich die Strecken mit je einem Endpunkt aneinander
beiden anderen Endpunkte durch eine gerade Linie ve
verknüpfe man je zwei Punkte miteinander, die von d
lelen zu dieser Geraden getroffen werden.

3. Wenn die Menge A mit B und B mit C von gl
keit ist, so ist auch A mit C von gleicher Mächtigke
ein beliebiges Element a aus A mit einem bestimm
aus B und ebenso wieder mit einem bestimmten E
verbunden ist, so ist eben dadurch auch a mit c verb
selbe gilt auch umgekehrt, wenn man von einem belie
aus C ausgeht.

5. Fügen wir ein solches nicht in A enthaltenes Elemen
A hinzu, so schaffen wir dadurch eine neue Menge B, die wir
mäßig so bezeichnen können:

(1) $$B = A + \beta,$$

indem wir mit $+$ (plus) die Operation der Hinzufügung an
und mit dem Zeichen $=$ (gleich) ausdrücken, daß die dadurc
einander verbundenen Zeichen dasselbe Ding bezeichnen sollen

Ebenso können wir, wenn die Menge A mehr als ein e
Element enthält, eine neue Menge dadurch bilden, daß wir ei
ment α aus A entfernen, und die übrig bleibenden Elemen
Menge B auffassen. Hierfür wollen wir das Symbol

(2) $$B = A - \alpha$$

brauchen, indem wir durch $-$ (minus) die Operation des
scheidens andeuten.

Unter einem Teil der Menge A verstehen wir eine Men
deren Elemente alle unter den Elementen von A enthalten sin

Demnach ist auch die Menge A ein Teil von sich s
A' heißt ein echter Teil von A, wenn A' nicht mit A identis
wenn also A zwar alle Elemente von A', aber außerdem noch
enthält.

Ist A' ein echter Teil von A, so wollen wir unter

$$A - A'$$

die Menge verstehen, die übrig bleibt, wenn aus A alle El
von A' entfernt sind. Ebenso wollen wir, wenn A und B M
sind, unter $A + B$ die Menge verstehen, die alle Elemente v
sowohl als von B und keine anderen enthält.

Wenn A und B gemeinschaftliche Elemente enthalten, so
Gesamtheit dieser gemeinsamen Elemente wieder eine Menge, di
mit einem Anklang an geometrische Vorstellungen, den Durchsc

also eine ganz andere, als die von $(A+B)-D$. Das er
ichen bedeutet den Inbegriff aller Elemente von A und B mit E
hluß der Elemente von D, während das zweite den Inbegriff a
emente von A und B mit Ausschluß der Elemente von D bedeu

Zur Veranschaulichung mögen in der Figur 1 die Fläche
oßen Kreises die Menge A, die des kleinen die Menge B darstel
r Durchschnitt D der beiden
ngen ist dann durch das beiden
eisflächen gemeinschaftliche Zwei-
t versinnlicht.

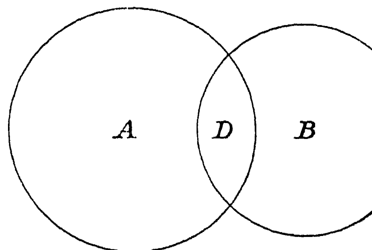


Fig. 1.

Die beiden Halbmonde sind
$-D$ und $B-D$. Unter $A+B$
dann dasselbe zu verstehen, wie
ter $A+(B-D)$ und unter
$-D)+B$, nämlich die ganze
s dem Zweieck und den beiden
lbmonden zusammengesetzte Fläche, während $(A+B)-D$
Fläche der beiden Halbmonde bedeutet.

Es ist ferner, wenn A, B, C Mengen sind.

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

d

$$A+B=B+A.$$

enso, wenn die Mengen A und B keine gemeinsamen Eleme
ben und die Menge C ein Teil von B ist,

$$(A+B)-C=A+(B-C),$$

d wenn B ein Teil von A, C ein Teil von B ist,

$$A-(B-C)=(A-B)+C.$$

6. Sind A und B Mengen von gleicher Mächtigkeit, u

α ein Element in A, β ein Element in B, so ist auch
von gleicher Mächtigkeit wie $B-\beta$.

Denn wenn A und B von gleicher Mächtigkeit sind, so
eine eindeutige Abbildung von A auf B. Wenn bei dieser Ab
α mit β verbunden ist, so sind offenbar, wenn man dieses P
fernt und die übrigen Verbindungen alle bestehen läßt, auch
und $B-\beta$ aufeinander eindeutig abgebildet. Ist aber α mi
von β verschiedenen Element β' in B, und folglich auch β mi
von α verschiedenen Element α' in A verbunden, so lassen
übrigen Verknüpfungen ungeändert, verbinden α' mit β' und
α und β hinaus. Dadurch sind dann wieder die Mengen A –
$B-\beta$ aufeinander eindeutig abgebildet, und diese Mengen si
wie bewiesen werden sollte, von gleicher Mächtigkeit.

§ 3. Zahlen und Zählen.

1. Nach dem Vorhergehenden können wir alle die Meng
mit einer von ihnen und folglich (§ 2. 3.) auch untereinan
gleicher Mächtigkeit sind, zu einem System, einer Gattun
wie wir auch sagen können, einer Idee, vereinigen, und dieser Ga
begriff findet wegen seiner großen Allgemeinheit die allerh
Anwendung. Diese Ideen heißen Zahlen. Die Namen,
einzelnen dieser Gattungen beigelegt werden, sind die Zahlw
die Zeichen, durch die wir sie in der Schrift bezeichnen, die
zeichen. Ist a das Zeichen oder der Name einer solchen G
der eine Menge A angehört, so sagen wir auch, a ist die A
der Elemente von A oder A besteht aus a Elemente
auch kurz a ist die Zahl von A oder auch a ist der Wert
Zahl oder A hat die Mächtigkeit a.

Jede Zahl ist vollständig bestimmt durch eine einzelne a
Gattung herausgegriffene Menge, die wir einen Repräsentant

$A + \alpha$ mit $a + 1$. Diese Zahl $a + 1$ bleibt ungeä
A durch einen anderen Repräsentanten von a o
ein anderes Element ersetzt wird (§ 2, 6.).

Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß A un
gleicher Mächtigkeit sind, daß also a und $a +$
Zahl ist.

3. Wenn die Zahl e von $e + 1$ verschieden ist, so
endliche Zahl. Eine Zahl ω, die mit $\omega + 1$ identis
unendlich.

Die Zahl 1 ist eine endliche Zahl. Hierfür berufen
den Augenschein, daß wir zwei Dinge (wie 1, 1) nicht
einem Ding 1 verknüpfen können. Die Zahl $1 + 1$ od
von 1 verschieden.

Ist die Zahl e endlich, so ist auch $e + 1$ end

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Satze § 2, 7.

Denn sind A, $A' = A + \alpha$, $A'' = A + \alpha + \beta$ Reprä
Zahlen e, $e + 1$, $e + 1 + 1$, so ist, wenn A' und A''
Mächtigkeit sind, nach jenem Satze auch A und A'
Mächtigkeit, also e nicht endlich.[1])

4. Wir betrachten Mengen Z, deren Elemente
(Zahlenmengen), die wir durch folgende beiden Eige
finieren:

α) Die Zahl 1 ist in Z enthalten.

β) Wenn z eine in Z enthaltene Zahl ist,
$z + 1$ in Z enthalten.

---

1) Dedekind definiert eine unendliche Menge als eine s
echten Teil von sich selbst äquivalent ist.

Daß diese Definition mit der hier gegebenen übereinstimm
Hilfe des sogenannten Äquivalenzsatzes der Mengenlehre beweis
lautet: Ist die Menge A äquivalent mit einem Teil B'
und B äquivalent mit einem Teil A' von A, so ist
mit B. In Zeichen:

Diese doppelte Eigenschaft kommt jedenfalls der Menge aus sämtlichen Zahlen besteht. Es kann aber auch noch Mengen von dieser Eigenschaft geben.

Wir definieren nun die natürliche Zahlenreihe den Durchschnitt aller Mengen Z von den Eigensc α), β), d. h. wir nehmen in N alle Zahlen und nur diese auf, den sämtlichen Mengen Z zugleich enthalten sind.

Nach dieser Definition ist jedenfalls die Zahl 1 in N en und wenn n irgend eine in N enthaltene Zahl ist, so ist auc in N enthalten. Wir nennen diese Zahlen n auch die natür Zahlen, und verstehen, wenigstens in diesem Abschnitt, von unter einer Zahl schlechtweg immer nur eine natürliche Zahl.

5. Jede natürliche Zahl ist endlich, d. h. wenn natürliche Zahl ist, so ist n von $n+1$ verschieden.

Denn nach **3.** genügt die Menge E aller endlichen den Bedingungen α), β). Es ist also E eine Menge Z und N in E enthalten.

Ob auch das Umgekehrte gilt, d. h. ob jede endliche der natürlichen Zahlenreihe enthalten ist, muß einstweilen gestellt bleiben. (§ 5, 6.)

Aus der natürlichen Zahlenreihe leiten wir speziellere reihen auf folgende Weise ab.

6. Es sei a eine natürliche Zahl und Z_a eine Zahlenme den folgenden beiden Bedingungen genügt:

α') Die Zahl $a+1$ ist in Z_a enthalten.

β') Ist z eine in Z_a enthaltene Zahl, so ist auc in Z_a enthalten.

Diesen Bedingungen genügt die natürliche Zahlenreihe N Es kann aber auch andere solche Zahlenmengen geben. Wir jede solche Menge eine Z_a nennen. Wir definieren die Me

$+ 1)$ zu Z_{a+1} ein Z_a. Dies läßt sich in der Bezeichnung 2 so ausdrücken:

$$Z_a = Z_{a+1} + (a + 1).$$

eraus lassen sich die folgenden Sätze beweisen:

7. Die Zahl 1 ist in N_1 nicht enthalten.

Bezeichnen wir nämlich mit N' die Zahlenmenge, die aus rch Entfernung der Zahl 1 entsteht, setzen also $N' = N - 1$, nügt N' den Bedingungen α'), β') S. 10 (für $a = 1$) und N' ist a Z_1. Andererseits ist N' in jedem Z_1 enthalten. Denn aus jed entsteht durch Hinzufügung der Zahl 1 ein Z und wenn N' ni Z_1 enthalten wäre, so wäre N nicht in Z enthalten, was finition von N widerspricht.

8. Wenn a nicht in N_a enthalten ist, so ist $a + 1$ nic N_{a+1} enthalten.

Denn nach der Voraussetzung kommt a nicht in $N_a' = N_a - (a +$ und folglich erfüllt N_a' die Forderungen α''), β''). N_a' ist a Z_{a+1}. Andererseits ist N_a' in jedem Z_{a+1} enthalten; denn es $_{+1} + (a + 1)$ ein Z_a und enthält also N_a. Folglich ist $N_a' = N_a$

9. Die Zahl a ist in N_a nicht enthalten.

Bezeichnen wir nämlich mit A die Menge der Zahlen a, die rderung genügen, daß N_a von a frei ist, so ist die Zahl 1 in thalten (nach 7.). Ist ferner z eine Zahl in A, so ist auch z - A enthalten (nach 8.). Folglich ist A ein Z und enthält nge N (nach 4.). Also ist jede natürliche Zahl a in A enthalt z. b. w.

10. Ist die Zahl b in N_a enthalten, so ist N_b in N_a e lten.

Denn nach **6.** ist, wenn b in N_a enthalten ist, N_a zugleich und muß also N_b enthalten.

11. Ist die Zahl b in N_a enthalten, so ist a nicht in

10*. Ist b größer als a und c größer als b, so i
c größer als a.

11*. Ist b größer als a, so ist a nicht größer als

12. Jede natürliche Zahl n, mit Ausnahme der
steht aus einer bestimmten Zahl a durch Hinzufü
Einheit, d. h. es gibt eine bestimmte Zahl a, so daß n
ist. Diese Zahl a bezeichnen wir mit $n-1$.

Um die ausgesprochene Behauptung zu erweisen, bezeic
mit N' die Menge aller Zahlen $a+1$, wo a jede natürli
bedeuten kann. In dieser Menge ist die Zahl 2 enthalten, u
a in N' enthalten ist, so ist auch $a+1$ darin enthalten.
folglich die Bedingungen α'), β') für $a=1$ durch die M
befriedigt, und mithin ist N_1 in N' enthalten. Andererseits
auch jede Zahl von N' in N_1 enthalten, weil N_1 alle na
Zahlen, mit Ausnahme der 1 enthält und folglich sind beid
identisch.

Es ist daher jede Zahl aus N_1 eine Zahl der Form $a+$
es bei gegebenem $a+1$ nicht mehr als eine Zahl a geb
ist dann eine Folge aus § 2, 7. Denn darnach sind, wenn
eine Menge von der Mächtigkeit $a+1$ und α ein darin en
Element bedeutet, alle Mengen $A-\alpha$ von gleicher Mächtig

§ 4. Der Satz von der vollständigen Induktion.

Eines der wichtigsten und fruchtbarsten Hilfsmittel, das
Erkenntnis mathematischer Wahrheiten besitzen, ist das Sch
fahren der vollständigen Induktion oder der Schluß v
$n+1$. Wir haben dies Verfahren in Nr. 9 des vorigen Par
angewandt und begründet. Wir geben ihm hier nur eine e
gemeinere Formulierung:

nügt also den Bedingnngen α'), β'), § 3. Folglich ist N_a in
halten. Also gehört jede Zahl von N_α, (d. h. jede Zahl)
ößer ist als a), zu den Zahlen n, für die $\mathfrak{S}_n$ wahr ist, wie
esen werden sollte.

Das induktive Schlußverfahren, das die Grundlage a
fahrungswissenschaften ist, besteht darin, daß man eine Tatsac
man in Einzelfällen wahrgenommen hat, als ein allgemei
setz betrachtet, das durch fortgesetzte Erfahrung entweder m
d mehr befestigt oder durch eine entgegenstehende Erfahrung u
stoßen wird. Dieses Verfahren kann in der Mathematik zwar e
egleitung geben, in welcher Richtung eine Wahrheit zu suchen
einem wirklichen Beweise ist aber noch eine Ergänzung notwend
in vielen Fällen durch die Anwendung des eben bewiese
tzes gewonnen werden kann. Darum führt dieses Schlußverfah
ht unpassend den Namen der vollständigen Induktion.

Die Zurückführung eines Satzes oder Begriffes, der eine
stimmte Zahl n enthält, von dem Falle $n+1$ auf den Fall n h
ch Rekursion.

§ 5. Größenordnung in der Zahlenreihe.

Durch die vollständige Induktion können wir den Satz § 3,
f folgende Weise umkehren:

1. Ist die Zahl a von b verschieden und a nicht in
thalten, so ist b in N_a enthalten. (Ist a nicht größer als
ist b größer a.)

a') Der Satz ist richtig für $a=1$; denn N_1 entsteht aus
samten Zahlenreihe N durch Ausschließung der einzigen Zah
3, 7.) und mithin ist jede von 1 verschiedene Zahl in N_1 enthal

b') Wir nehmen an, der Satz 1. sei für irgend ein a bewie
sei also b von a verschieden,

ist, und $a + 1$ von b verschieden, so ist b in N_{a+1} enthal
bewiesen werden sollte.

Also ist der Satz 1. richtig für $a = 1$ und für alle Zahl
in N_1 enthalten sind, d. h. für alle natürlichen Zahlen.

Hiernach ist also von zwei verschiedenen Zahlen a, b
a in N_b oder b in N_a enthalten, aber niemals beides zugle
darnach lassen sich die natürlichen Zahlen in eine bestimmte
ordnung bringen.

Wenn wir nämlich die im § 3 gegebene Ausdruckswei
ergänzen, daß wir, wenn b in N_a enthalten ist, b größer al
a kleiner als b nennen, so folgt, daß wenn a von b verschi
nicht größer als b ist, a kleiner als b sein muß, und es ist v
zwei verschiedenen Zahlen a und b immer vollständig bestimm
die größere und welche die kleinere ist. Wir setzen, we
größere ist,

$$b > a \text{ und } a < b,$$

zwei Zeichen, von denen das eine das andere zur Folge h
Satz § 3. 10* läßt sich darnach auch so ergänzen:

2. Ist a kleiner als b, b kleiner als c, so ist
kleiner als c.

3. Ist a kleiner als b, so ist auch $a + 1$ kleiner al

Denn es ist $N_{a+1} = N_a - (a + 1)$ und $N_{b+1} = N_b - (b +$
nun $a < b$, so ist N_b ein echter Teil von N_a, und $(a + 1)$ k
N_b nicht vor. Folglich ist N_b in N_{a+1} enthalten und $N_b -$
ist ein Teil von N_{a+1}. Dies ist aber der Inhalt des Satzes

4. Die Mengen N_a sind alle von gleicher Mäch
und von derselben Mächtigkeit wie N.

Denn wenn wir jedes Element a in N mit dem Elemen
in N_1 verbinden, so ist (mit Rücksicht auf § 3, 12.) eine eindeut
knüpfung der Elemente von N mit denen von N_1 hergestel

5. Eine Menge M, die eine unendliche Menge A als T
thält, ist selbst unendlich.

Denn nehmen wir ein fremdes Element α zu M hinzu, bil
o $M' = M + \alpha$, so können wir nach der Voraussetzung, daß
endlich sei, $A + \alpha$ auf A eindeutig abbilden. Wenn wir dann je
ement von $M - A$ mit sich selbst verknüpfen, so ist M' auf
deutig abgebildet. Ist also ω die Zahl von M, so ist ω mit ω -
ntisch, also unendlich.

6. Eine Menge M, die nicht die Mächtigkeit ei
türlichen Zahl hat, enthält einen Teil von der Mächt
it der natürlichen Zahlenreihe, und ist folglich unendli

Die Menge M hat, wie jede Menge, einen Teil M_1 von
chtigkeit 1, d. h. ein einzelnes Element. Wir nehmen ein solc
raus und verbinden es mit der Zahl 1. Hierauf nehmen wir
habe einen Teil M_a von der Zahl a, in dem M_1 enthalten
M selbst nicht die Mächtigkeit einer Zahl haben soll, so ist
echter Teil, und es gibt also in M Elemente, die nicht in
rkommen. Wir nehmen ein bestimmtes dieser Elemente, verbin
mit der Zahl $a + 1$ und fügen es zu M_a hinzu. Dadurch erha
r ein M_{a+1}. Aus der vollständigen Induktion ergibt sich,
se Konstruktion für jedes a möglich ist, und es ist hierdurch
er Zahl a ein bestimmtes Element aus M zugeordnet. Damit
Behauptung 6. bewiesen.

Hieraus ergibt sich aber, daß sich der Begriff der natürlich
hl mit dem der endlichen Zahl, wie er in § 3, 3. definiert
lständig deckt.

7. In einer endlichen Zahlenmenge S_a, die aus a nat
chen Zahlen besteht, gibt es eine größte und eine klein

Der Satz ist richtig und selbstverständlich für $a = 1$; denn
sem Falle besteht S aus einer einzigen Zahl, die zugleich

§ 6. Die Kardinalzahlen. Ziffernsysteme.

Wenn wir aus der Zahlenreihe N die Menge N_a ausscheid bleiben außer a nur die Zahlen, die kleiner als a sind, denn Zahl, die größer als a ist, ist ja in N_a enthalten.

Wir wollen diese Menge mit E_a bezeichnen, also

$$E_a = N - N_a$$

setzen. Die Menge E_a umfaßt also alle die Zahlen n, die d dingung

$$n \overline{\gtrless} a$$

genügen, oder in Worten, alle Zahlen n, die gleich a oder l als a sind.

1. Aus E_a wird E_{a+1} durch Hinzufügung der ein Zahl $(a+1)$.

Denn aus N_a wird N_{a+1} durch Hinauswerfen von $(a + 1$ also $N - N_{a+1}$ aus $N - N_a$ zu bilden, hat man die Zahl $(a$ hinzuzunehmen.

2. Die Menge E_a hat die Mächtigkeit a.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch die vollständi duktion. Denn der Satz ist richtig für $a = 1$, weil E_1 aus de zigen Zahl 1 besteht. Ist er aber für E_a richtig, so folgt er n für E_{a+1}.

Die Menge E_a ist also endlich und wenn $b > a$ ist, so ein echter Teil von E_b, weil N_b ein echter Teil von N_a ist.

Sind also A und B Repräsentanten der natürlichen Zah und b, so ist die Menge A, deren Zahl die kleinere ist, mit echten Teil der Menge B mit größerer Zahl äquivalent, und gilt umgekehrt von zwei Repräsentanten natürlicher Zahlen, da die mit einem echten Teil der anderen äquivalent ist, die kl Zahl hat.

Die Menge E_a ist die Kardinalzahl. Sie eignet sich ga

verloren gehen würde, bedient man sich des Hilfsmittels,
gewisse Gruppen von Zahlen zu neuen Einheiten zusammen
nicht mehr die Einzeldinge, sondern diese Gruppen zählt.
schon die Sprache in den Wortbildungen wie zehn, zwanzig
hundert, zweihundert usw. Vollkommener aber noch unser
Ziffernsystem. Dabei muß, wenn irgend eine Ziffer a ge
wird, durch irgend ein Merkmal angedeutet werden, welches
heit der gezählten Dinge sei. In einem primitiven Zus
Rechenkunst geschah dies dadurch, daß die Ziffern, je nach
heit, in anderen Rubriken einer Tabelle oder eines Rech
(Abacus) verzeichnet wurden. Dem gegenüber war es ein un
licher Fortschritt, daß durch ein besonderes Zeichen, die
angedeutet wurde, daß eine der Rubriken nicht ausgefüllt
gar keine Einheit enthielt, wodurch der ganze Apparat der
überflüssig wurde, da durch den Stellenwert der Ziffern di
Einheiten hinlänglich bezeichnet war, die gemeint sind. Di
einfache Grundgedanke, auf dem unser heutiges so voll
Ziffernsystem beruht, dem gegenüber es eine auffallende
unbequeme Disharmonie der deutschen Sprache ist, auf de
teile für den praktischen Rechner kürzlich Förster hingew
daß wir im Sprechen die Ziffern in anderer Reihenfolge n
wir sie schreiben, z. B. dreihundert fünf und sechzig = 365

In theoretischen Untersuchungen brauchen wir häufig B
für Zahlen, wie wir es in den vorangehenden Betrachtung
mehrfach getan haben, um kürzer und anschaulicher als du
ausdrücken zu können, daß gewisse Aussagen nicht nur für b
sondern für alle Zahlen gelten. Diese Buchstaben bedeuten a
wie etwa im Griechischen, bestimmte Zahlen, sondern es soll
sein, für solche Buchstaben jede beliebige Zahl zu setzen. Die
mit solchen allgemeinen Zeichen oder Symbolen wird d
Buchstabenrechnung genannt.

Ein Satz, der ausspricht, daß ein Zeichen a dieselbe

J. E. Montucla, Histoire des mathématiques. 2[me] édit. 4 Bände. —1802.

F. Nesselmann, Algebra der Griechen, nach den Quellen Berlin, Reimer 1842.

A. Arneth, Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart 1852.

H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum un alter. (Nach des Verfassers Tode herausgegeben von seinem Vater.) Teubner 1874.

M. Chasles, Aperçu historique des méthodes en Géometrie. 2. Aufl.

Rapport sur les progrès de la Géométrie. Paris 1870.

Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Auflage. Leipzig, Teubner 1894—1901.

Reicht bis zum Jahre 1758. Eine Weiterführung durch den Ver Unterstützung jüngerer Gelehrter ist in Vorbereitung.

C. J. Gerhard, Geschichte der Mathematik in Deutschland. Oldenburg 1877. Aus dem von der Münchener Akademie heraus Sammelwerk „Geschichte der Wissenschaften in Deutschland".

H. G. Zeuthen, Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et age. (Französische Ausgabe.) Paris, Gauthier-Villars 1902.

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Ja (Deutsche Ausgabe.) Leipzig, Teubner 1903.

A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Leipzig, Teubner 1900—1903.

Joh. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. 2 Bände Veit & Co. 1902. 1903.

Fr. Engel und P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von auf Gauß. Leipzig, Teubner 1895.

Ferd. Rosenberger, Die Geschichte der Physik. 3 Teile. Brau Vieweg 1882—1890.

F. Rosenberger, Isaak Newton und seine physikalischen Prinz

Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie. München 1877.

Neue Textausgaben griechischer Mathematiker sind:

Euclidis opera omnia edd. Heiberg et Menge.

Diophanti Alexandrini opera omnia ed. P. Tannery.

Apollonii Pergaei quae graece extant ed. Heiberg.

Archimedis opera omnia ed. Heiberg.

Diese bei B. G. Teubner in Leipzig erschienenen Ausgaben enth

„Der Begriff der Zahl ist ein einfacher und dem Geiste ursprü
n gegebener; deshalb sind alle Versuche, denselben wissenschaftl
definieren, ebensowohl gescheitert, wie die Bemühungen,
klidischen Grundsätze zu beweisen." In der Tat sind uns we
s dem Altertum noch aus dem Mittelalter glückliche Versuche
nnt, in den dunkeln Ursprung des Zahlbegriffes Licht zu wer
as uns von Pythagoras und den Pythagoräern überliefert wird, s
stische Spiele mit Zahlen, die zwar arithmetische Wahrheiten
ten, nicht aber zur Aufhellung des Zahlbegriffes an sich beitrag
d die Definitionen, die Euklid gibt, sind ähnlich wie seine geo
schen Definitionen nur Worterklärungen, die den Begriff schon
setzen (Elementorum Liber VII, p. 185).[1])

Der denkende Geist aber erkennt keine Schranke an, und
e offene Frage ist, da muß er weiter grübeln. So hat sich a
neuere Forschung nicht bei dem ein für allemal gegebenen Z
griff beruhigt, sondern hat nicht ohne Erfolg versucht, in die E
hung dieses Begriffs weiter einzudringen. Bei Kant findet s
nig über den Zahlbegriff. Ihm ist Mathematik, die in sein
stem eine große Rolle spielt, immer nur Geometrie. Er setzt
ithmetik in eine analoge Beziehung zur Zeit, wie die Geome
n Raum, und dies ist auch sonst eine verbreitete Meinung (z.
milton). Obwohl diese Anschauung in gewissem Sinne ihre
htigung hat, faßt sie den Zahlbegriff doch nach unserer Auffass
ht in seiner Reinheit und Allgemeinheit. Darauf hat bereits Herb
gewiesen.

Die neuere Mathematik hat nun diese prinzipiellen Fragen
h aus aufgenommen. Gauß hat in einem Briefe an Bessel a
prochen, daß er die Zahl (im Gegensatz zum Raumbegriff) für
dukt unseres Geistes halte und es ist dann gelungen, die Erzeugu
ses Begriffes auf eine noch fundamentalere Tätigkeit unseres Denke
Verknüpfung von Dingen untereinander und die Bildu

in Prag (1781—1848). Das diesen Gegenstand betreffende We den Titel „Paradoxien des Unendlichen“ und ist nach fassers Tode von Prihonsky herausgegeben.

Der eigentliche Begründer der Mengenlehre ist Georg (eine Reihe von Abhandlungen der Mathematischen Anna Bd. XV (1879) an und andere Schriften). Eine zusammen Darstellung von Schönflies, Jahresbericht der Deutschen Mathe Vereinigung VIII, 2. Verwandt, aber von Cantor unabhän die Untersuchungen von Dedekind: „Was sind und was so Zahlen“ (Braunschweig 1888). Auch das Werk von E. S „Lehrbuch der Arithmetik“ (Leipzig 1873), ist als eins de das eine tiefere Auffassung der elementaren Arithmetik anba erwähnen.

Die Schlußweise der vollständigen Induktion, deren Mathematik von alters her bedient, ist von den älteren Mathe wohl kaum auf ihre logische Begründung untersucht worde in der erwähnten Schrift von Dedekind ist das geschehen. vor kurzem von F. und L. Lindemann ins Deutsche überse mit Anmerkungen herausgegebene Werk von H. Poincaré schaft und Hypothese“ (Leipzig, Teubner 1904) enthält darüb Betrachtungen.

3. Ein Versuch, das Zusammenfassen von Zahlengru höheren Einheiten wissenschaftlich durchzubilden, findet sich chischen Altertum bei Archimedes (287—212 v. Chr.) in e loren gegangenen Schrift an Zeuxippus und in einer sehr merk uns erhaltenen Schrift, die den Namen ψαμμίτης (Sandrechnun die auch darum bemerkenswert ist, weil sie Nachrichten kosmologischen Anschauungen und Kenntnisse der Alten en

Hier stellt sich der Verfasser die Aufgabe, sehr große Z benennen, und er kleidet diese Aufgaben in die eigentümlic

nn wie die Oberfläche der Kugel zum Mittelpunkt. Währ istarch damit sicher nur sagen wollte, daß die Welt eben unendl er unmeßbar sei, so braucht Archimedes für seinen Zweck ein mmtes Maß. Er supponiert also, da die Kugel zu einem Pun keine Größe habe, auch kein Verhältnis haben könne, daß Arista be sagen wollen, die Fixsternsphäre verhalte sich zu der Sph Erdbahn so, wie sich nach der gewöhnlichen Meinung die W h. die Sphäre der Sonnenbahn, zu der als Mittelpunkt der W rachteten Erde verhält. Die Sonnenentfernung nimmt er da ch viel zu klein an, während er in bezug auf die Erddimensio Wahrheit näher kommt.

Um so ungeheure Zahlen zu benennen, faßt er die Zahlen hundert Millionen (eine Myriade von Myriaden) als „erste Zahl ammen. Die Zahl hundert Million, die nach unserer Schreibwe 1 mit acht Nullen geschrieben wird, bildet die Einheit veiten Zahlen“, deren er wieder hundert Millionen zählt, um heit der dritten Zahlen zu bilden, die mit 1 und 16 Nul chrieben wird. Für den Zweck der Sandzählung braucht ni iter gegangen zu werden als bis zu den achten Zahlen, deren E t mit sechsundfünfzig Nullen geschrieben wird.

Aber Archimedes geht in seinen prinzipiellen Erörterungen den hundertmillionsten Zahlen, deren letzte, die mit achthund lionen Nullen geschrieben wird, die Einheit der zweit riode bildet, mit der dann wieder ebenso verfahren werden ka

Interessante Mitteilungen über die bei verschiedenen Völkern verschiedenen Zeiten üblichen Zahlwörter und Zahlbezeichnung det man in dem sehr lesenswerten nachgelassenen Buche Hankel, „Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und ttelalter“ (Leipzig, Teubner 1874).

Aus unserer Zeit haben wir zwei Beispiele der Bildung von Za rtern, die aus dem praktischen Bedürfnis hervorgegangen si mlich das Wort „Million“, das etwa von 1500 an in Italien a

Inder den Ausdruck des religiös Erhabenen und unfaßbar Gr
übermäßig großen Zahlen findet. (Es gibt sechshunderttausend M
Söhne der Buddhas, vierundzwanzigtausend Billionen Gotthei
ähnliche noch abenteuerlichere Zahlen.)

Ins Abendland kam die neue Rechenkunst durch die Ara
in Spanien und Nordafrika ihre Sitze hatten, zunächst in der
kommenen Form des Rechnens mit dem Rechenbrett (Abacus
aber auch das eigentlich Entscheidende, die Null, deren Gebra
Arithmetik erst von allen Fesseln befreite.

Die neue Rechenart wurde als „Algorithmus" bezeich
die, die sich ihrer bedienten hießen „Algorithmiker", zum Unt
von den „Abacisten" mit denen sie zu Zeiten in schroffem G
standen. Über den Ursprung des Namens „Algorithmus" w
lange im Zweifel, bis neuere Funde es außer Zweifel gesetzt
daß das Wort die Entstellung eines arabischen Namens Alch
(Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî) sei.[1])

Das weitverbreitete und hochgeschätzte Werk dieses G
über die Rechenkunst stammt aus dem ersten Viertel des
hunderts, ist aber nur in einer erst in neuerer Zeit aufgef
lateinischen Übersetzung auf uns gekommen.[2])

Der bedeutendste Vertreter der Abacisten ist der berühmte G
(geb. um 940 in der Auvergne, gest. als Papst Silvester II.
Rom). Zur Verbreitung des Algorithmus im Abendland ha
meisten beigetragen: Leonhard von Pisa, genannt Fibonacci
Bonacii) (Liber Abaci am Anfang des 13. Jahrhunderts) und
nus Nemorarius (gest. 1237 als Ordensgeneral der Domi
(Arithmetica, Algorithmus demonstratus).

In Byzanz ward die indische Ziffernschrift und Rechenku
im 14. Jahrhundert durch das Rechenbuch des Mönchs M
Planudes bekannt, in dem das Wort Tziphra für die Null ge
wird. Von diesem aus dem Arabischen stammenden Wort is
Wort „Ziffer", das für uns jedes der zehn Grundzeichen b

Zweiter Abschnitt.

Die Rechenoperationen.

§ 8. Addition.

Wir machen von dem Verfahren der vollständigen Induktion e
wendung auf den Beweis des Satzes:

1. Wenn man zwei endliche Mengen A und B zu ei
nzigen Menge $A + B$ vereinigt, so entsteht eine endlic
enge.

Wir können uns auf die Annahme beschränken, daß A und
ne gemeinsamen Elemente haben. Denn wenn alle Elemente
zugleich in A enthalten sind, so ist $A + B = A$, also nach V
setzung endlich. Ist aber D der Durchschnitt von A und B,
$B - D$ ein Teil von B, der mit A kein Element gemein
d es ist

$$A + B = A + (B - D)$$

2. 5).

Wir nehmen also von vornherein an, daß A und B kein gem
nes Element haben. Wenn dann B ein einziges Element β
t, so ist der zu beweisende Satz richtig, denn $A + \beta$ ist n
. 3 endlich.

Nehmen wir aber ferner an, es sei h die Zahl der Elemente

gleiche, wenn wir die Mengen A und B durch andere Mengen von gleicher Mächtigkeit ersetzen; denn sind A und A', B aufeinander eindeutig abgebildet, so sind $A + B$ und $A' + B'$ aufeinander abgebildet. Um also die Zahl $a + b$ zu ermitteln, wir beliebige Repräsentanten der Zahlen a und b wählen, z. Finger, oder Zählpfennige, und es gibt auch keinen andern W Ziel als diesen. Man prägt von Kindheit an das Resultat Summenbildung für die kleineren Zahlen dem Gedächtnis ein, jederzeit zum Gebrauch bereit zu halten. Unser indisches system gewährt den Vorteil, daß es ausreicht, wenn wir das I für den Fall besitzen, daß a und b aus der Reihe der Zahle 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 genommen sind.

Die Bildung der Summe heißt auch Addition oder Zusa zählen.

Über die Addition ergeben sich aus dem Früheren lei fundamentalen Sätze:

3. Wir haben in § 2. 5 gesehen, daß wenn A, B, C welche Mengen bedeuten,

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ist. Wenden wir dies auf endliche Mengen an, die keine schaftlichen Elemente haben, so ergibt sich, wenn a, b, c Zahl unter denen natürlich auch dieselbe Zahl mehrmals vorkomme

(1) $$a + b = b + a,$$

(2) $$(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b.$$

Die erste dieser Formeln, die besagt, daß es bei der Addit die Reihenfolge nicht ankommt, heißt das kommutative Die zweite besagt, daß man die Summe von drei Zahlen bilden kann, daß man nach Belieben erst zwei Zahlen z

B, C, ..., N keine Elemente, die mehreren von ihnen zugle
gehören, so heißt die Zahl von S die Summe der Zahlen
B, C, ..., N. Bezeichnen wir die letzteren Zahlen, mit a, b, c, ..
d mit s die Zahl von S, so schreiben wir

$$s = a + b + c + \cdots + n,$$

d nennen a, b, c, ..., n auch die Summanden von s.

Die Bestimmung der Zahl s geschieht dann durch Abzählu
r Menge S.

Bei der Berechnung verfährt man kürzer so, daß man die Su
nden in einer beliebigen Reihenfolge untereinander schreibt,
nn, von unten oder von oben anfangend jede folgende Zahl zu
eits gebildeten Summe addiert. Daß das Ergebnis dieser Rechn
n der Reihenfolge unabhängig ist, in der die Addition vorgenomn
rd, ist dann eine Folge aus der Unabhängigkeit der Zahl von
ihenfolge des Zählens, die wir in § 6 bewiesen haben.

Bei dekadisch geschriebenen Zahlen addiert man zunächst
ner, dann die Zehner, dann die Hunderter u. s. f., wobei d
sich bei der Addition der niedrigeren Einheiten ergeben
neren bei der Addition der nächst höheren Einheiten zu
ksichtigen sind.

4. Die Addition enthält als besonderen Fall die Vorschrift, n
wir in § 3 aus einer Zahl m die nächst größere m + 1 defin
ben. Es ergibt sich ferner leicht aus den dort gegebenen
mmungen über größer und kleiner, daß die Summe eines Te
Zahlen a, b, c, ..., n kleiner ist als die Summe aller; ferner
Summe größer wird, wenn einer oder einige der Summanden
ößert werden. Dies alles folgt daraus, daß von zwei endlic
ngen die kleinere Zahl derjenigen zukommt, die mit einem
anderen äquivalent ist.

§ 9. Multiplikation.

die Multiplikation oder das Multiplizieren (Vervielfäl
der Zahl b mit der Zahl a.

Die Zahl b heißt der Multiplikand, die Zahl a der
plikator, und das Resultat der Multiplikation ab heißt das Pr
von a und b.

Nach der Definition ist $a \cdot 1 = a$, und wir wollen auch,
dem Vorigen noch nicht enthalten war, $1 \cdot b = b$ setzen. Ma
das Produkt für höhere Multiplikatoren aus dem für niedrige
durch Rekursion, nach der Formel

$$ab + b = (a + 1)\,b \tag{1}$$

bilden, die nach der soeben getroffenen Festsetzung auch für $a =$

2. Der erste Hauptsatz über die Multiplikation ist das ko
tative Gesetz, welches darin besteht, daß das Resultat der
plikation das gleiche bleibt, wenn man den Multiplikator m
Multiplikanden vertauscht, das sich auch durch die Formel

$$ab = ba \tag{2}$$

ausdrücken läßt.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich durch die vollständi
duktion führen. Wir denken uns a endliche Mengen B, di
um sie voneinander zu unterscheiden, mit $B_1, B_2, \ldots, B_a$ beze
wollen. Keine zwei dieser Mengen sollen ein gemeinsames E
haben, dagegen sollen sie alle von gleicher Mächtigkeit b sein
Produkt ab ist dann die Zahl der Menge M, die man erhält,
man alle diese $B_1, B_2, \ldots, B_a$ zu einer einzigen Menge verein

Wir fügen nun zu jeder der Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_a$ no
neues Element hinzu, so daß b in $b + 1$ übergeht, also zu der
M noch a neue Elemente. Geht dadurch M in M' über, so
Zahl von M' $ab + a$. Auf der anderen Seite ist diese Meng
auch gleich $a(b + 1)$, woraus sich

$$ab + a = a(b + 1) \tag{3}$$

t sind aber die Grundlagen für die vollständige Induktion nnen, und ist also das kommutative Gesetz allgemein bewiesen

Hiernach ist es nicht mehr notwendig beim Produkt zwisc ltiplikator und Multiplikand zu unterscheiden. Man nennt ler beide unterschiedslos die Faktoren des Produktes.

Zur Ausführung der Multiplikation genügt es, wenn man odukte je zweier Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, „ eine Einmaleins", zur Verfügung hat, die man durch dire zählung an beliebigen Objekten bildet und dem Gedächtnis einpr s dekadische Zahlensystem gestattet dann in bekannter Weise s fach die Berechnung der Produkte auch großer Zahlen.

3. Das assoziative Gesetz.

Ich denke mir jedes Element der sämtlichen Mengen $B_1, B_2, \ldots,$ rch eine Menge C ersetzt. Alle diese Mengen C sollen von ichen Mächtigkeit c sein, aber keine zwei sollen ein gemeinsch nes Element enthalten. Ich vereinige nun alle Elemente di ngen C zu einer einzigen Menge P, deren Zahl zu bestimmen

Die Anzahl der Mengen C ist aber ab, und folglich ist zahl der Elemente von P gleich

$$(ab)c.$$

dererseits ist die Anzahl der in jedem B enthaltenen Eleme ich bc, und da die Anzahl der Mengen B gleich a ist, so ist zahl der Elemente in P auch gleich

$$a(bc).$$

raus ergibt sich die Formel:

$$(ab)c = a(bc),$$

der das assoziative Gesetz enthalten ist.

Verbindet man dieses Gesetz mit dem vorigen, so kann r ölf verschiedene Ausdrücke für dieselbe Zahl erhalten.

Die Rechenregel läßt sich dann in folgende Vorschrift zusamm

Menge C etwa als Kugeln denkt, die in Reihen von je c rdnet sind; b dieser Reihen werden zu einem Rechteck angeor a dieser Rechtecke werden dann noch übereinander geschich

Die ganze Anordnung hat dann die Gestalt eines rechtwinkli smas, bei dem auf drei in einer Ecke zusammenstoßenden Ka b und c Kugeln angeordnet sind. Man kann dann diese Ku drei verschiedene Arten zu Rechtecken schichten, und in je hteck auf zwei verschiedene Arten zu Reihen anordnen.

4. Auf Grund dieser Sätze können wir nun mittels der ndigen Induktion das Produkt aus beliebig vielen Faktoren eren.

Es sei eine beliebige Menge R von Zahlen

$$a, b, c, d, \ldots, n \quad (R)$$

eben. Ihr Anzahl möge r sein. Man greife zwei beliebige n heraus und vereinige sie zu einem Produkt. Dadurch ents Menge von $r-1$ Zahlen, in der man wieder zwei belie len zu einem Produkt vereinigt, und führt damit fort, bis noch eine Zahl hat. Diese eine Zahl ist unabhängig von , wie man jedesmal die zwei Zahlen herausgegriffen hat, also ängig von der Anordnung der Rechnung. Wir nennen sie odukt der Faktoren $a, b, c, \ldots, n$ und setzen, wenn wi m bezeichnen,

$$m = abcd \ldots n,$$

. wir setzen die sämtlichen Faktoren einfach nebeneinander.

Beim Beweis dieser Behauptung nehmen wir wieder die ndige Induktion zu Hilfe. Der Satz ist wie wir in 2. und 3. en haben, richtig, wenn $r=2$ oder $r=3$ ist. ($r=2$ allein w r nicht genügen, da bei zwei Faktoren das assoziative Gesetz st zur Geltung kommt.) Wir nehmen also seine Richtigkei

oder wir können a oder b für einen der ersten Faktore
also etwa

$$(ac),\ b,\ d,\ \ldots,\ n \quad (R''')$$

bilden.

Nach der Voraussetzung sind nun die Produkte der
R'', R''' von der Anordnung der Rechnung unabhängig,
sich diese weitere Rechnung so führen, daß nach dem näch
R' und R'' sowohl als R' und R''' identische Systeme erg
lich R' und R'':

$$(ab),\ (cd),\ \ldots,\ n,$$

R' und R''':

$$(abc),\ d,\ \ldots,\ n,$$

und es ergeben also R', R'' und R''' dieselben Produkte, w
werden sollte.

5. Aus den entsprechenden Sätzen für die Additio
ergibt sich sofort, daß ein Produkt größer wird, wenn
Faktoren größer wird, oder in Zeichen: Ist

$$a > a',$$

so ist auch

$$ab > a'b,$$

und um so mehr folgt aus $a > a'$, $b > b'$:

$$ab > a'b'.$$

Durch vollständige Induktion leitet man daraus den Satz
Produkt von beliebig vielen Faktoren vergrößert wird, w
welche dieser Faktoren vergrößert werden und die übrigen
bleiben. Als Korollar ergibt sich noch, daß ein P
nur dann $= bc$ sein kann, wenn $a = b$ ist.

§ 10. Produkte von Summen.

nden gleich n sind. Da wir die Summanden in beliebiger Reil ge addieren können, so können wir zunächst alle a vereini h. das Produkt ma bilden, sodann alle b, also das Produkt etzt das Produkt mn bilden. Man erhält hiernach

$$ms = ma + mb + mc + \cdots + mn.$$

n anzudeuten, daß man die ganze Summe $a + b + \cdots + n$ mit hl m zu multiplizieren hat, muß man sich einer Klammer bedie d also

$$m(a + b + c + \cdots + n) = ma + mb + mc + \cdots + mn$$

reiben. Nach dem kommutativen Gesetz der Multiplikation n aber auch

$$(a + b + c + \cdots + n)\,m = am + bm + cm + \cdots + nm.$$

Es kommt oft vor, daß eine Summe in der Form

$$ma + mb + mc + \cdots + mn$$

geben ist, daß es aber vorteilhafter ist, sie in der Form

$$m(a + b + c + \cdots + n) \quad \text{oder} \quad (a + b + c + \cdots + n)m$$

ter zu benutzen. Diese Operation nennt man das **Ausklamm** Faktors m.

2. Wenn der zweite Faktor m selbst wieder als Summe gegeben

$$m = a' + b' + c' + \cdots + n',$$

kann man auf die rechte Seite von (1) oder (2) dieselbe R hmals anwenden, und erhält so den Satz:

Um das Produkt der beiden Summen

$$(a + b + c + \cdots + n)\,(a' + b' + c' + \cdots + n')$$

bilden, multipliziert man **jeden Summanden** der ei mme mit **jedem Summanden** der anderen und nimmt mme aller so gebildeten Produkte.

e Summe s der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ kann dann so dargest
rden:

$$s = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \quad \text{oder} \quad \sum_{1,r}^{\alpha} a_\alpha,$$

das Zeichen Σ (griechisch sigma) als Abkürzung für das W
mme anzusehen ist; 1 und r heißen die Grenzen für α. W
Angabe dieser Grenzen nicht nötig erscheint, so schreibt r
ch wohl

$$s = \sum^{\alpha} a_\alpha.$$

Der Inhalt des Satzes 2. kann nach dieser Bezeichnung in
rmel zusammengefaßt werden:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{r'} b_\beta\right) = \sum^{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta,$$

d dieser Satz läßt sich dann auch auf Produkte aus mehre
ktoren ausdehnen, z. B.

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{r'} b_\beta\right)\left(\sum_{\gamma=1}^{r''} c_\gamma\right) = \sum^{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma.$$

n Ausdruck von der Form $a + b$, worin a und b unbestimn
nlen bedeuten, wird auch ein Binom genannt. Ebenso h
$- b + c$ ein Trinom und allgemein eine Summe aus mehre
chen Summanden, die durch Buchstaben bezeichnet sind, ein Po
m. Die einzelnen Summanden heißen die Glieder des Polynom

§ 11. Potenzierung.

1. Ebenso wie man aus der Addition gleicher Summanden

wo man sich auf der linken Seite die n Faktoren a z
a heißt die Basis und n der Exponent der Pote
dafür auch „a zur n^{ten} Potenz" oder kürzer „a zur
hoch n". Die n^{te} Potenz einer Zahl a nehmen, hei
Zahl a in die n^{te} Potenz erheben".

Wegen der Anwendung in der Geometrie wird ins
zweite Potenz von a, also a^2, auch das „Quadrat
„a-Quadrat" genannt. Die dritte Potenz a^3 heißt
von a".

Die erste Potenz von a ist gleich a selbst:

(2) $$a^1 = a.$$

Da die Multiplikation einer jeden Zahl mit dem Multi
Multiplikanden selbst wieder ergibt, so folgt für jeden

(3) $$1^n = 1.$$

Der Hauptsatz über die Potenzen, dessen Beweis si
aus der Definition ergibt, lautet:

2. Um zwei Potenzen mit derselben Basis
zu multiplizieren, addiert man die Exponent
Zeichen:

(4) $$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Denn rechts und links steht ein Produkt aus $m+$
Der Satz läßt sich ohne weiteres durch vollständige Ind
Produkt von beliebig vielen Faktoren übertragen, und

(5) $$a^m a^n \cdots a^q = a^{m+n+\cdots+q},$$

worin $m, n, \ldots, q$ beliebige Zahlen sind in gleichf
Anzahl r.

3. Wenn man in (5) die Exponenten $m, n, \ldots$

5. Wenn a größer als 1 ist, so ist a^n um so größer,
n ist, und man kann n immer so groß annehmen, daß a^n
als eine beliebig gegebene Zahl c. Hiervon kann man s
durch die vollständige Induktion überzeugen. Denn die B
ist jedenfalls richtig für $c = 1$, da ja schon $a^1 > 1$ ist.

Ist aber $a^n > c$, so ist $a^{n+1} > ac \geqq c + 1$ und $a^{n+2} \gtreqqless a(c+$
Wenn die Behauptung also für c richtig ist, so ist sie au
für $c + 1$ und damit allgemein:

Ist $a^n > c$ für irgend einen Wert m von n, so ist un
$a^n > c$, wenn n größer als m ist.

6. Unser dekadisches Zahlensystem beruht auf den
der Zahl 10. Die n^{te} Potenz von 10 wird mit einer 1 und
geschrieben, und diese Potenzen bilden die Einheiten der
denen Ordnungen. Eine r-stellige Zahl $abc \ldots mn$ ha
deutung

$$a10^r + b10^{r-1} + c10^{r-2} + \cdots + m10 + n. \tag{7}$$

Um aber die Potenzen bloß durch den Stellenwert der Z
zweideutig auszudrücken, muß man auch andeuten könne
Potenzen etwa in der Reihe fehlen, und dafür ist das
(Null), das in die Reihe der Ziffern aufgenommen we
Demnach hat man in (7) unter $a, b, c, \ldots, m, n$ Zeichen aus

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

zu verstehen. Wenn eine Ziffer beim Rechnen darüber h
so hat man die Formel anzuwenden

$$(a + 10)10^r = 10^{r+1} + a10^r.$$

Die Vorschriften für die Multiplikation dekadischer Zahlen
wie man sieht, auf dem Satze § 10. 2.

Bei den Potenzen gilt weder das kommutative, noch

§ 12. Subtraktion. Negative Zahlen.

1. Wenn wir aus einer endlichen Menge A einen Teil B heiden, so bleibt eine endliche Menge $A-B$, deren Zahl c du e Zahlen a und b von A und B vollständig bestimmt ist. Wir set

$$c = a - b$$

d nennen $a-b$ (a weniger b oder a minus b) die Differenz n Unterschied von a und b und die Operation, durch die d fferenz gefunden wird, das Abziehen oder die Subtrakt heißt der Minuend, b der Subtrahend.

Da B ein Teil von A ist, so folgt, daß der Minuend st ößer sein muß als der Subtrahend.

Um im dekadischen System rechnen zu können, genügt es, w n sich (durch direktes Abzählen) für die kleineren Zahlen sultate einprägt. Dabei muß man mit dem Minuenden bis 18, n Subtrahenden bis 9 gehen. Schon dieses dekadische Rech llt uns bisweilen die Aufgabe, eine größere Zahl von einer klein subtrahieren, wobei man sich dadurch hilft, daß man den Minuen rch Hinzunahme einer Einheit der nächst höheren Ordnung ößert („Borgen"). Die wissenschaftliche Arithmetik fordert enso wie viele Anwendungen in noch weiterem Umfang eine gemeinerung der Aufgabe der Subtraktion, der wir nur durch affung einer neuen Zahlengattung gerecht werden können.

Wir stellen die Aufgabe so:

2. Sind a und b irgend zwei gegebene Zahlen, so s e Zahl c bestimmt werden, die man zu b hinzufügen m a zu erhalten.

Wenn $a > b$ ist, so löst uns die Formel (1) diese Aufgabe. $= b$, so brauchen wir zu b nichts hinzuzufügen, um a zu erhal d dies drücken wir, wie schon im dekadischen Ziffernsystem,

reihe gezählt haben, in einer gewissen gegensätzlichen stehen, wie etwa Dinge die rechts liegen und Dinge die li Thermometergrade über dem Gefrierpunkt und unter de punkt, Vermögen und Schulden. Zum Unterschied müsser zweite Zahlenreihe durch eine Marke von der ersten unt Wir nennen, wenn ein solcher Gegensatz gemacht werde ersten Zahlen die **positiven Zahlen**, die zweiten die Zahlen und bezeichnen diese, wenn a eine natürliche Za $-a$, also

$$-1, \ -2, \ -3, \text{ u. s. f.},$$

gesprochen: minus eins, minus zwei, minus drei u. s. f.

Bisweilen, wenn der Gegensatz deutlich hervorgehob soll, bezeichnet man auch die positiven Zahlen mit $+a$,

$$+1, \ +2, \ +3, \text{ u. s. f.}$$

gesprochen: plus eins, plus zwei, plus drei u. s. f., und die Zahl a wird auch der **absolute Wert** von $+a$ und — Um eine Zahl der einen oder der anderen Zahlenreihe aus bedient man sich auch des Zeichens $\pm a$ (gesprochen plus ode Das Zeichen $+$ oder $-$ bei $\pm a$ heißt das **Vorzeichen**.

Die Zahl Null können wir nach Belieben der eine anderen Zahlenreihe zuteilen; $+0$ und -0 sind identisch Zahlen dieser Reihen, die denselben absoluten Wert aber v Vorzeichen haben, heißen **entgegengesetzt**. Die Null ist entgegengesetzt. Die entgegengesetzte zu der entgegenge wieder die ursprüngliche Zahl. Wenn also α eine negativ so versteht man unter $-\alpha$ die positive Zahl mit demselbe Werte. Diese doppelte Zahlenreihe, einschließlich der Nu wir die **Reihe der ganzen Zahlen**. In ihr stellen folgende Vorschrift eine Größenordnung her.

4. Die positiven Zahlen sind alle größer als

schätzt wird, die eine „algebraisch größer oder kleiner“ als
dere, im Gegensatz zu „absolut größer und kleiner“. Wenn α al
aisch kleiner als β ist, so setzt man $\alpha < \beta$ oder $\beta > \alpha$. Wenn
eichheit nicht ausgeschlossen sein soll, so setzt man auch

$$\alpha \overline{\overline{<}} \beta,$$

sprochen: α gleich β [oder kleiner als β (bisweilen auch kür
nn auch sprachlich nicht korrekt, α gleich oder kleiner als
enso $\beta \overline{\overline{>}} \alpha$.

Um mit diesen Bestimmungen eine Anschauung zu verbind
nke man sich auf einer Linie Punkte markiert (wie Perlen, die
ner Schnur aufgereiht sind). Einen beliebigen dieser Punkte
chne man mit 0 und zähle nach der einen Seite, etwa der recht
Punkte $+1$, $+2$, $+3$ u. s. f., nach der anderen Seite die Pun
1, -2, -3 u. s. f. (Fig. 2).

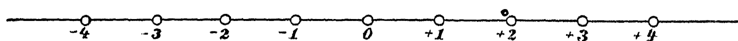


Fig. 2.

Dann kommt einem Punkte, der rechts von einem anderen lie
ne größere Zahl zu als diesem. Die Zahlen wachsen in der Ri
ng nach rechts, oder wie wir auch sagen können, in der positi
chtung.

§ 13. Rechnen im Bereich der ganzen Zahlen.

In dieser Zahlenreihe geben wir nun aus eigener Machtv
mmenheit unseres Geistes folgende Rechenvorschriften, wobei
s von dem Grundsatz leiten lassen, daß die schon bekann
echenregeln im Gebiete der natürlichen Zahlen als Spezialfälle
n neuen Regeln enthalten sind, und daß die Gesetze, die wir d
kannt haben, nach Möglichkeit in dem umfassenderen Gebiete a

Hierbei kann die 0 sowohl den positiven als den negati
zugezählt werden, und es ist $\alpha - \alpha = 0$ zu setzen.

Mit Hilfe der Punktreihe (§ 12, Fig. 2) läßt sich di
veranschaulichen:

Um zu einer Zahl α eine Zahl β mit dem a
Werte b zu addieren, zählt man, je nachdem β pos
negativ ist, von dem auf α folgenden Punkt $\alpha + 1$ a
vorwärts oder von dem vorangehenden Punkt α -
wärts b Punkte weiter. Der Endpunkt, auf den m
kommt, hat dann zum Zeichen die Zahl $\alpha + \beta$.

2. Subtraktion. Unter derselben Voraussetzung (1)

		Vorzeichen von α	β
(4)	$\alpha - \beta = -(b - a)$	$+$	$+$
	$= -(a + b)$	$-$	$+$
	$= a + b$	$+$	$-$
	$= b - a$	$-$	$-$

$$\beta - \alpha = -(\alpha - \beta). \tag{5}$$

Man sieht, daß die Addition und Subtraktion der natürlic
hierin enthalten sind.

Es lassen sich also hiernach beliebige Zahlen, welc
beziehung sie auch haben mögen, voneinander subtrahiere
ist das Resultat eine ganz bestimmte Zahl der Reihe.

3. Die Subtraktion kann auf die Addition zurückgefü
nach der Formel

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta). \tag{6}$$

Danach ist die Subtraktion irgend einer Zah
bedeutend mit der Addition der entgegengesetzten

Hiernach kann man auch die Subtraktion durch Ab
der Punktreihe ausführen, wie die Addition.

enommen wird, auch richtig bleibt, wenn α mit β oder β mi
r α mit γ vertauscht wird, oder wenn α, β, γ durch $-\alpha$, –
ersetzt wird. Demnach genügt es, wenn wir die Formel (7)
tig erwiesen haben unter der Voraussetzung

$$a \leqq b \leqq c \qquad \gamma \text{ positiv } (\gamma = c).$$

bleiben also nur noch vier Fälle zu berücksichtigen nach
zeichen von α und β. Die Formel (7) ergibt für diese vier Fä

1. α und β sind positiv,

$$(a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c);$$

2. α ist negativ, β positiv. Dann gibt (7)

$$(b - a) + c = (b + c) - a = b + (c - a);$$

3. α ist positiv, β negativ,

$$c - (b - a) = a + (c - b) = (a + c) - b;$$

4. α und β sind negativ,

$$c - (a + b) = (c - b) - a = (c - a) - b, \quad c > a + b,$$
$$(a + b) - c = a - (c - b) = b - (c - a), \quad c < a + b,$$

l die Richtigkeit dieser Formeln ergibt sich aus § 2, (6) und
erdurch ist das assoziative Gesetz für die verallgemeinerte Addi
viesen.

Wenn man nun genau dasselbe Verfahren beobachtet, das
§ 9 auf die Multiplikation angewandt haben, so ergibt sich
gemeinere Gesetz:

**5. Wenn man die Summe einer beliebigen Menge gan
hlen (Summanden) zu bestimmen hat, so vereinige
nächst zwei beliebige dieser Summanden zu einer Sum
n dem so gebildeten neuen System von weniger Elemen
eder zwei und fahre so fort, bis eine einzige Zahl üb**

$$(10) \qquad (\alpha - \beta) + \gamma = \alpha - (\beta - \gamma) = \alpha + (\gamma - \beta),$$

$$(11) \qquad (\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \gamma) - \beta.$$

7. Daraus ergibt sich (durch vollständige Induktion) gebrauchte Regel der Subtraktion eines Polynoms, die man Namen der Klammerauflösung bezeichnet, und die in der f Formel ihren Ausdruck findet:

$$\alpha - (\beta + \gamma + \cdots + \nu) = \alpha - \beta - \gamma - \cdots - \nu$$

oder in Worten:

Wenn ein Polynom, das durch Addition oder S tion einer beliebigen Menge von Zahlen gebildet eine Klammer gesetzt ist, als Ganzes von einer Z subtrahieren ist, so kann man die Klammer weg wenn man jedem Gliede des Polynoms das entgegeng Zeichen gibt, oder jede Addition in eine Subtrakti umgekehrt, verwandelt.

§ 14. Multiplikation.

1. Wenn wir die Multiplikation wie in § 9 als eine wie Addition derselben Zahl erklären, so können wir den Begr auf den Fall ausdehnen, daß der Multiplikand negativ oder Es ist dann, wie sich aus der Klammerregel des vorigen Para sofort ergibt, wenn a und b natürliche Zahlen sind:

$$(1) \qquad a(-b) = -(ab),$$

$$(2) \qquad a \cdot 0 = 0.$$

Für einen negativen Multiplikator aber gibt diese Definit Multiplikation keinen Sinn, und es steht noch bei uns, wel deutung wir diesen Zeichen geben wollen. Wir setzen a Definition dieser Multiplikation:

In dieser Festsetzung ist für die Multiplikation beliebiger ganz ahlen α, β das kommutative Gesetz

$$\alpha\beta = \beta\alpha \qquad \text{6)}$$

nthalten, und wir können die Vorschriften (1) bis (5) in die Reg ısammenfassen:

Verschwindet in einem Produkt aus zwei Zahlen d ne Faktor, so verschwindet das Produkt.

Die Multiplikation zweier positiver oder zweier neg ver Zahlen gibt eine positive Zahl.

Die Multiplikation einer positiven und einer negativ ahl gibt eine negative Zahl.

Das assoziative Gesetz für die Multiplikation lautet

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \beta(\alpha\gamma), \qquad \text{)}$$

nd läßt sich, indem man die einzelnen Fälle der Vorzeichen durc eht, aus dem Gesetz für positive Zahlen und den Bestimmungen leiten. Damit ist dann aber auch der allgemeine Satz über e rodukt aus beliebig vielen Faktoren:

$$\mu = \alpha\beta\gamma\cdots\varkappa,$$

ie in § 9, bewiesen, nach dem man bei der Bildung dieser Grö st zwei beliebige Faktoren vereinigen kann, dann wieder zwei u. s. s man auf eine Zahl gekommen ist, und diese Zahl ist unabhäng n der Anordnung der Rechnung.

2. Man kann hieraus für den Fall, daß in dem Produkt negati ktoren vorkommen, über das Vorzeichen des Produktes die folge n Schlüsse ziehen:

Um das Vorzeichen des Produktes zu bestimmen, vereinige m nächst alle positiven Faktoren zu einem Produkt. Ist nur e gativer Faktor vorhanden, so hat das Produkt nach 1. einen neg

ht durch vollständige Induktion schließt. Auf eine gerade t eine ungerade, auf eine ungerade eine gerade Zahl.

, 5, 7, 9, 11 sind ungerade, 2, 4, 6, 8, 10, 12 sind gerade

ı dieser Erklärung können wir die Zeichenregel für ein so aussprechen:

Produkt ist positiv, wenn die Anzahl der negativen n gerade ist, und negativ, wenn die Anzahl der nega- ıktoren ungerade ist.

Iachdem das Produkt aus einer beliebigen Anzahl von Faktoren t, ergibt sich von selbst der Begriff der Potenz einer nega- ıhl; eine solche Potenz ist positiv, wenn der Exponent eine ıhl ist, und negativ, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist:

$$(-a)^n = \quad a^n, \quad \text{wenn } n \text{ gerade,}$$
$$= -a^n, \quad \text{wenn } n \text{ ungerade.}$$

ndern ist also das Quadrat einer negativen Zahl ositiv.

besonderen Fall heben wir noch hervor

$$(-1)^n = +1, \quad \text{wenn } n \text{ gerade,}$$
$$= -1, \quad \text{wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

zte Formel wird häufig angewandt, um kurz auszudrücken, von n abhängige Zahl bei geradem n positiv, bei ungeradem ist. Z. B. kann man darnach die Formeln (8) so darstellen

$$(-a)^n = (-1)^n a^n.$$

Dritter Abschnitt.

Division und Einführung der Brücl

§ 15. Division und Teilbarkeit der Zahlen.

1. Wenn a und b natürliche Zahlen sind, so
der positive Multiplikator m immer so bestimme
größer als a ist.

Wenn nämlich $a = 1$ ist, so ist der Satz offenbar
richtig; denn da $b \geqq 1$ ist, so braucht man nur $n > 1$
um $nb > 1$ zu erhalten. Daraus folgt aber, wenn a ei
Zahl ist, $nab > a$, also $mb > a$, wenn $m \geqq na$ ist.

Wenn $b < a$ ist, so wird es unter allen Zahlen, für
ist, eine kleinste geben. Diese ist größer als 1 und sol
bezeichnet werden, so daß

$$qb \leqq a < (q + 1)b$$

ist. Setzen wir also

$$a - qb = r,$$

so wird $r = 0$, falls $qb = a$ ist, sonst positiv und kl
Daraus ergibt sich:

2. Sind a, b zwei gegebene natürliche Zahlen und

eile zu teilen. Im allgemeinen wird dies nicht ohne Rest ein.

die Zahlen q und r gefunden werden, wenn a und b in er Schreibweise gegeben sind, wird im elementaren Rechen- gelehrt.

Venn der Rest gleich Null ist, so sagt man auch b a auf, oder a ist durch b teilbar, oder b ist ein oder Teiler oder ein Faktor von a, die Division von b geht auf, oder endlich a ist ein Vielfaches oder m von b.

t also a durch b teilbar, wenn es eine ganze Zahl m gibt, die Gleichung

$$a = mb$$

rd. Wenn man diese Definition verallgemeinert, können :

)ie Zahl 0 ist durch jede positive oder negative lbar. Denn die Gleichung (2) ist für jedes b be- wenn $a = 0$ und $m = 0$ ist. Die Zahl $-a$ ist durch durch $-b$ teilbar, wenn b von Null verschieden ist ırch b teilbar ist. Unter den Teilern einer Zahl ver- r aber immer nur die natürlichen (positiven) Zahlen.

ede Zahl ist durch sich selbst und durch die Zahl 1 denn (2) ist befriedigt, wenn $a = b$ und $m = 1$, und $= 1$, $a = m$ ist.

Keine von Null verschiedene Zahl ist durch Null Denn die Gleichung (2) ist für $b = 0$ nur dann erfüllt, $= 0$ ist. Sind aber a und b gleich Null, so kann m jede

er ergeben sich aus der Definition folgende Sätze:

Ein Produkt aus mehreren Faktoren

so ist, wenn $c_1, c_2, c_3, \ldots$ beliebige Zahlen sind,

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots = b(m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 + \cdots),$$

und folglich ist auch die Zahl

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots$$

durch b teilbar.

9. Ist a durch b teilbar und

$$a = mb,$$

so heißt m der Quotient von a und b. Man schreibt auch, anzudeuten,

$$m = a : b \quad \text{oder} \quad m = \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad m = a/b,$$

(in Worten: m ist gleich a geteilt durch b).

§ 16. Größter gemeinschaftlicher Teiler. Relative Primza Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache.

1. Wenn zwei natürliche Zahlen a, b durch eine dritte c sind, so heißt c ein gemeinschaftlicher Teiler von a, b. Teiler einer Zahl nicht größer als diese Zahl selbst sein kann, es unter allen Teilern zweier Zahlen a, b einen größten geben. heißt der größte gemeinschaftliche Teiler oder auch das gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen a, b, und es fundamentale Aufgabe der Arithmetik, dieses größte gemeinsch Maß zweier gegebener Zahlen zu finden. Diese Aufgabe l schon Euklid bekanntes Verfahren, das darum der Euklidisch rithmus oder der Algorithmus des größten gemeinschaftlichen heißt, den wir jetzt darlegen wollen.[1])

2. Es seien a und a_1 die beiden gegebenen Zahlen, größter gemeinschaftlicher Teiler gesucht ist, die wir als

, da es nicht ohne Grenzen Zahlen gibt, die kleiner als
ne Zahl a_1 sind. Dann ist aber die Rechnung beendet,
ivisor der letzten aufgehenden Division, den wir mit a_n
wollen, ist der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler
Zahlen a, a_1. Das Verfahren wird übersichtlicher, wenn
den nachstehenden Formeln ausdrückt, in denen die
der Division mit $q, q_1, \cdots, q_{n-1}$ bezeichnet sind

$$\begin{aligned}
a &= q a_1 &&+ a_2, \\
a_1 &= q_1 a_2 &&+ a_3, \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} &&+ a_n, \\
a_{n-1} &= q_{n-1} a_n.
\end{aligned}$$

Behauptung geht dahin, daß a_n der größte gemeinschaft-
von a und a_1 ist. Dies wird bewiesen sein, wenn wir

aß a_n ein Teiler von a und a_1 ist, und
laß jeder Teiler von a und a_1 auch ein Teiler von a_n ist.
l der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler, so folgt
$\leqq d$ und aus β) $a_n \geqq d$, folglich aus beiden zusammen
aß aber diese beiden Forderungen α), β) erfüllt sind, sieht
man die Gleichungen (1) rückwärts, von der letzten zur
hgeht, mit Rücksicht auf § 15, 8.
rollar ergibt sich daraus noch:
Teiler zweier Zahlen ist auch Teiler ihres größten
aftlichen Maßes.
ispiel für diesen Algorithmus mag gelten:

$$\begin{aligned}
6552 &= 14 \cdot 448 + 280, \\
448 &= 1 \cdot 280 + 168, \\
280 &= 1 \cdot 168 + 112, \\
168 &= 1 \cdot 112 + 56,
\end{aligned}$$

Zahl $-(b-r)$ den absolut kleinsten Rest der Teilung
durch b. Setzt man die Rechnung in dem Algorithmus (1) mit
absolut kleinsten Reste fort, so kommt man schneller zum Z

In unserem Beispiel würde die Rechnung auch so geführt
können:

$$\begin{aligned} 6552 &= 15 \cdot 448 - 168, \\ 448 &= 3 \cdot 168 - 56, \\ 168 &= 3 \cdot 56, \end{aligned}$$

und wäre also wesentlich kürzer.

4. Ebenso wie bei zwei Zahlen kann man auch bei me
Zahlen nach dem größten gemeinschaftlichen Teiler fragen, w
die größte unter den Zahlen verstanden wird, die in allen
Zahlen enthalten sind. Die Aufgabe, diesen zu finden, kann a
die vorige zurückgeführt werden durch die folgende Bemerku

Ist d der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Zahlen
ist jeder Teiler der drei Zahlen a, b, c auch Teiler von d und
jeder Teiler von d und c ist auch Teiler von a, b, c. Dem
auch der größte gemeinschaftliche Teiler von d und c zugle
größte gemeinschaftliche Teiler von a, b, c.

5. Zwei Zahlen, deren größter gemeinschaftlicher Teile
1 ist, die also außer der Einheit keinen gemeinsamen Teiler
heißen relative Primzahlen (relativ prime Zahlen wäre sp
korrekter, die eine ist relativ prim zur anderen) oder teiler
Zahlen. Man sagt wohl auch, indem man den selbstverstä
Teiler 1 nicht mitrechnet, Zahlen ohne gemeinsamen Te

Solche teilerfremde Zahlen sind z. B. 3 und 7, 15 und
und 128. Ob zwei vorgelegte Zahlen a, b teilerfremd sind od
kann man immer, und zwar auch bei großen Zahlen, durch e
hältnismäßig einfache Rechnung entscheiden.

6. Es gilt nun der folgende wichtige Fundamentalsatz üb

$$\begin{aligned} ma &= q\ \ ma_1 + ma_2, \\ ma_1 &= q_1\ ma_2 + ma_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ ma_{n-2} &= q_{n-2} ma_{n-1} + m. \end{aligned}$$

ı durch a_1 teilbar, so folgt aus der ersten Gleichung, daß lurch a_1 teilbar ist, ferner aus der zweiten, daß auch ma_3 eilbar ist, und so weiter (vollständige Induktion), daß $ma_2, ma_3, \ldots, ma_{n-1}, m$ durch a_1 teilbar sein müssen. ber der zu beweisende Satz enthalten.

; und b zwei Zahlen mit dem größten gemeinschaftlichen nd ist

$$a = da', \quad b = db',$$

und b' teilerfremd. Denn hätten diese beiden Zahlen noch inschaftlichen Teiler e, so wäre ja a und b durch de teil- ımöglich ist, wenn $e > 1$ ist.

ıe Zahl, die durch jede der beiden Zahlen a, b teilbar ist, gemeinschaftliches Vielfaches (Multiplum) der beiden nd b. Unter allen gemeinschaftlichen Vielfachen dieser len muß eines das kleinste sein, und alle anderen sind s kleinste teilbar.

ist eine Zahl m durch a und durch b teilbar, so ist sie er Bezeichnung (4)) durch da' teilbar, hat also die Form

$$m = da'n.$$

iese Zahl noch durch db' teilbar sein, so muß $a'n$ durch lich, da a' und b' relativ prim sind (nach Nr. 6), n durch ein. Ist $n = b'p$, so ist

$$m = da'b'p.$$

jede durch a und durch b teilbare Zahl durch $da'b' = ab/d$

und durch ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches ersetzt. I ist das System um eine Zahl verkürzt. Mit diesem verkürzten verfährt man ebenso, und fährt damit so lange fort, bis n einzige Zahl übrig geblieben ist.

§ 17. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen.

Eine natürliche Zahl, die außer sich selbst und der Einheit Teiler hat, heißt eine Primzahl. Zahlen, die mehr Faktoren heißen zusammengesetzte Zahlen. Die Zahl 1 nimmt ei nahmestellung ein; sie ist die einzige, die nur **einen** Divis während alle anderen mindestens zwei Teiler haben. Es ist in Hinsicht zweckmäßig, die Zahl 1 nicht mit zu den Primza rechnen, so daß man dreierlei Arten von Zahlen zu unters hat: die Einheit, die Primzahlen und die zusammenge Zahlen.

Es ist dies natürlich eine reine Zweckmäßigkeitsfrage, wird auch in der Tat häufig die Einheit mit zu den Primzal rechnet, wie es auf den ersten Blick natürlicher erscheint. Wi aber die Unterscheidung zwischen der Einheit und den Pri machen, weil sich dann manche Sätze kürzer aussprechen lass

Es gelten von den Primzahlen folgende Sätze:

1. Wenn ein Produkt zweier Zahlen ab durc Primzahl p teilbar ist, so muß wenigstens der ei Faktoren a, b durch p teilbar sein.

Denn wenn a nicht durch p teilbar ist, so sind a und p prim, weil p eben keinen anderen Teiler als p und 1 hat. daher ab durch p teilbar ist, so ist b nach § 16, 6. durch p

Der Satz läßt sich ohne weiteres dahin verallgemeinern:

Ist ein Produkt aus mehreren Faktoren a, b, c,

n wir diesen Schluß fortsetzen, endlich zu einem Teiler, der nzahl sein muß. Ist also p ein Primteiler von m und

$$m = p_1 m_1,$$

kleiner als m, und muß, wenn es keine Primzahl ist, wieder mteiler p_2 haben. Ist dann

$$m = p_1 p_2 m_2,$$

n wir ebenso weiter schließen, und gelangen wiederum dazu, ch einer der Faktoren m_1, m_2, . . . eine Primzahl sein muß, cht ohne Ende Zahlen gibt, die kleiner als eine gegebene sind. Demnach gibt es eine Zerlegung von m in Primfak-ren Anzahl n sei:

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n.$$

n Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kann natürlich auch dieselbe s vorkommen, und diese Faktoren lassen sich zu einer usammenfassen. Wir setzen dann, wenn π mal die Prim-mal die Primzahl q, ϱ mal die Primzahl r u. s. f. darunter vor-

$$m = p^{\pi} q^{\varkappa} r^{\varrho} \ldots,$$

zt die Primzahlen $p, q, r, \ldots$ voneinander verschieden an-n sind, und $\pi + \varkappa + \varrho + \cdots = n$ ist.

aus folgt dann auch leicht, daß diese Zerlegung nur auf eine öglich ist. Denn nach 1. kann in der durch die Formel (4) Zahl m keine andere Primzahl aufgehen, als $p, q, r, \ldots$, und zahl p kann nicht öfter als π mal, q nicht öfter als $\varkappa$ mal fgehen usf.

Die Menge der Primzahlen ist unendlich.[1])

re die Menge aller existierenden Primzahlen endlich, so müßte rößte geben. Nehmen wir also an, es sei ω die größte Prim-ann lassen sich die sämtlichen existierenden Primzahlen 2,

Nimmt man in (5) für ω irgend eine bestimmte Primzal wird Ω größer als ω, aber durch keine Primzahl unter ω teilba muß also Ω entweder selbst eine Primzahl sein, oder durch eine zahl über ω teilbar sein. Beides kann vorkommen, z. B.:

$$2 \cdot 3 + 1 = 7, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311, \text{ Primzahl},$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \text{ zusammengeset}$$

Die Auffindung der Primteiler einer zusammengesetzten Zahl die Entscheidung darüber, ob eine vorgelegte Zahl Primzahl sei nicht, ist weit schwieriger als etwa die Auffindung des größte meinschaftlichen Teilers zweier gegebenen Zahlen. Eine allge direkte Methode zur Lösung dieser Aufgabe besitzen wir nicht denn überhaupt die Erforschung der Verteilungsgesetze der zahlen zu den tiefsten Problemen der Arithmetik gehört. Wir w im vierzehnten Abschnitt noch einiges über diese Frage beibri Für jetzt mag noch folgendes bemerkt werden.

4. Ob eine gegebene Zahl m durch die ersten Primz 2, 3, 5 teilbar ist, dafür gibt es einfache Kennzeichen, wenn Zahl m dekadisch geschrieben ist. Es sei nämlich, wenn die Za mit n Ziffern geschrieben wird,

$$\begin{aligned} m &= a_1 a_2 \ldots a_n \\ &= a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} 10 + a_n. \end{aligned}$$

Da nun 10 und alle seine Potenzen durch 2 und durch 5 te sind, so wird m durch 2 oder durch 5 teilbar sein, wenn d. h. die letzte Ziffer von m, durch 2 oder durch 5

$$= a_1(10^{n-1} - 1) + a_2(10^{n-2} - 1) + \cdots + a_{n-1}(10 - 1),$$

n

$$10 - 1 = 9, \quad 10^2 - 1 = 99, \quad 10^3 - 1 = 999, \ldots$$

9 teilbar sind, so ist auch $m - q$ durch 9 teilbar. Wenn en beiden Zahlen m, q die eine durch 3 oder durch 9 teilbar ; das Gleiche von der anderen, und wir erhalten die Regel: Zahl m ist durch 3 oder durch 9 teilbar, wenn ihre me durch 3 oder durch 9 teilbar ist. Ähnlich ergibt wir mit q' die Summe

$$q' = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots \pm a_1$$

,

$$= a_{n-1}(10 + 1) + a_{n-2}(10^2 - 1) + a_{n-3}(10^3 + 1) + \cdots$$

n $10 + 1 = 11$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 + 1 = 1001, \ldots$ durch sind, so ergibt sich, daß m gleichzeitig mit q' durch 11 oder nicht.

Venn die Zahl m keine Primzahl ist, so kann sie in zwei zerlegt werden, deren jeder größer als 1 ist. Ist also nd $a < b$, so ist

$$a^2 \overline{\gtrless} m,$$

aß also unter den Faktoren von m wenigstens einen geben, adrat nicht größer ist als m. Um also festzustellen, ob elegte Zahl m eine Primzahl ist oder nicht, wird man zuch Nr. 4 untersuchen, ob sie durch 2, 3, 5, 11 teilbar ist. icht der Fall, so dividiert man weiter durch alle Primren Quadrat nicht größer ist als m, die man als bekannt en muß, und wenn alle diese Divisionen nicht aufgehen, so wiß eine Primzahl. Geht aber eine dieser Divisionen auf, n den Quotienten, der dann jedenfalls kleiner ist als m, in en Weise weiter zu untersuchen. Wenn also z. B. eine r 100 durch 2, 3, 5, 7 nicht teilbar ist, so ist sie eine

Man schreibe alle Zahlen bis zu der vorgeschriebenen der Reihe nach auf und beginne dann von der ersten Primzah jede zweite Zahl durchzustreichen. Dann sind alle Vielfachen (nicht aber 2 selbst) durchgestrichen. Hierauf zähle man v nächsten stehen gebliebenen Zahl, also von 3 an weiter, die durchstrichenen Zahlen mitzählend, und durchstreiche jede dritt und so fahre man fort, immer von der nächstfolgenden nicht strichenen Zahl an soviel weiter zu zählen und durchzustreiche diese Zahl angibt. Was schließlich noch stehen geblieben is allein die Primzahlen. Nach 5. braucht man damit aber lange fortzufahren, als das Quadrat der Ausgangszahl einer Z nicht größer ist als die größte Zahl der Reihe. So hätte ma bei der Ermittelung der Primzahlen unter $121 = 11^2$ nur di fachen von 2, 3, 5, 7 zu durchstreichen. Es empfiehlt sich, Verfahren vollständig klar zu machen, diese Abzählung etwa Zahlen bis 100 wirklich durchzuführen.

Die Anwendung des Siebes sowohl als die unmittelbare D durch die bekannten Primzahlen hat natürlich bei großen bald eine Grenze erreicht, über die sie der allzugroßen Rechn wegen nicht mehr zum Ziele führen können. Die Ermittelu Teiler sehr großer Zahlen oder die Entscheidung darüber, Primzahlen sind, gehört zu den schwierigsten Aufgaben der matik. Man hat sich darum bemüht, die Faktoren der Zahl die Primzahlen unter einer gewissen Grenze in Tabellen zusa zustellen. Man hat jetzt solche Faktorentafeln bis zur 9ten einschließlich.[1]) Die Anzahl der Primzahlen unter hundert 15, derer unter tausend 168, unter neun Millionen gibt es na Zählung von Glaisher 602567 Primzahlen. Insoweit also al sich auf die Korrektheit der Tafeln verlassen kann, sind die zahlen unter neun Millionen als bekannt anzusehen. Da abe Menschenwerk Irrtümern unterworfen sein kann, und ein so gew

egung sehr großer Zahlen hat man die Hilfsmittel der Arithmetik herangezogen, im besonderen die Theorie der hen Formen, wovon später ein einfaches Beispiel ausgeführt oll.

§ 18. Brüche.

)ie Aufgabe der Division einer Zahl a durch eine andere ann, wenn a durch b teilbar ist, so gefaßt werden: Es soll ıl c gefunden werden, mit der man die gegebene multiplizieren muß, um die gleichfalls gegebene u erhalten.

iesem Sinne kann die Division als die Umkehrung der Ope- r Multiplikation bezeichnet werden. Wie wir aber früher hrung der Addition verallgemeinert haben, und dadurch zur ıg einer neuen Zahlenart, der negativen Zahlen, gedrängt) können wir auch die Aufgabe der Division verallgemeinern, wenn wir das Reich der Zahlen abermals erweitern und n bisher benutzten ganzen Zahlen die gebrochenen oder Brüche einführen. Dies geschieht, indem wir uns zu- formaler Weise ein Begriffssystem bilden und eine Vor- s Rechnens feststellen. Aber dieses neue Zahlensystem ist derum geeignet, um gewisse Beziehungen der Dinge der t darzustellen oder abzubilden.

Zu dem Begriff eines Bruches gelangen wir am einfachsten ndem Wege. Es sei m ein Zeichen, das jede Zahl der ıhlenreihe bedeuten kann (Null, positiv, negativ) und n ein für eine positive Zahl. Das aus diesen beiden Zeichen gesetzte Zeichen m/n oder $\frac{m}{n}$ (gesprochen: m geteilt durch über n) ist also durch irgend zwei Zahlen m und n voll-

Die Unterdrückung eines gemeinschaftlichen Teilers, also da Ersetzen von qm/qn durch m/n, heißt den Bruch mit q hebe Die umgekehrte Operation, d. h. das Ersetzen von m/n durch qm/q heißt den Bruch mit q erweitern.

Es gibt nach dieser Festsetzung für jeden Bruch eine gewiss einfachste Form, die man auch die reduzierte Form nennt, die ma erhält, wenn man mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler von Zähle und Nenner hebt. In einem reduzierten Bruch sind Zähler un Nenner relative Primzahlen.

Wir können zwei oder mehr Brüche immer so darstellen, da der Nenner in beiden derselbe wird. Wir brauchen nur als gemein schaftlichen Nenner irgend ein gemeinschaftliches Vielfaches m de einzelnen Nenner zu nehmen, und dann durch Erweiterung die g gebenen Brüche alle auf diesen Nenner zu bringen. Z. B. können w drei beliebige Brüche a/a_1, b/b_1, c/c_1 so darstellen, wenn wir $n = a_1 b_1$ setzen:

1) $$\frac{a}{a_1} = \frac{a b_1 c_1}{n}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{b c_1 a_1}{n}, \quad \frac{c}{c_1} = \frac{c a_1 b_1}{n}.$$

3. Wir setzen nun fest, daß von zwei Brüchen mit den selben Nenner der der größere sein soll, der den größere Zähler hat.

Diese Festsetzung ist verträglich mit der Bestimmung 2. Den durch Erweiterung oder Hebung der Brüche wird in deren Größen folge nichts geändert. Auch ist die Grundvoraussetzung für jed Größenordnung befriedigt: Sind α, β, γ drei Brüche und α größe als β, β größer als γ, so ist auch α größer als γ. Wir könne die Größenbestimmung auch in die Formel zusammenfassen:

Sind $\alpha = a/a_1$, $\beta = b/b_1$ zwei Brüche, so ist α kleiner al β, gleich β oder größer als β, je nachdem

leich sein soll, also

$$\frac{a}{1} = a.$$

n die früher festgesetzte Größenordnung der ganzen Zahlen die Brüche geltenden enthalten.

urch ist die Gesamtheit der gebrochenen Zahlen mit Ein- r ganzen positiven und negativen Zahlen in eine Reihe die wir die Reihe der rationalen Zahlen nennen. e bei den ganzen Zahlen unterscheiden wir auch bei den Zahlen die absolute Größe von der algebraischen Bei der absoluten Größe werden nur die absoluten oder Werte miteinander verglichen, während bei der algebraischen die negativen Zahlen immer kleiner sind als die posi- von zwei negativen die die größere ist, die den kleineren Wert hat. Ein Bruch, dessen absoluter Wert kleiner als ßt ein echter Bruch. Ein echter Bruch ist also ein essen Zähler dem absoluten Werte nach kleiner als der .

n ein anschauliches Bild und zugleich eine wichtige An- der Brüche auf reale Dinge zu erhalten, denke man sich Linie, wie auf einem Maßstab, Punkte in gleichen Ab- twa im Abstand eines Centimeters, markiert; diesen Ab- nen wir die Längeneinheit, bezeichnen einen beliebigen kte mit 0 und zählen auf der Linie nach rechts die posi- en Zahlen $+1, +2, +3, \cdots$, nach links die negativen $-3, \cdots$. Dann teilen wir jedes Intervall in eine be- nzahl, etwa n, gleiche Teile und zählen auf den so ge- Teilpunkten (mit Einschluß der ersteren) wieder die $1, +2, +3, \cdots$ nach rechts und $-1, -2, -3, \cdots$

Diese Punkte geben dann ein Bild der Größenordnung Brüche, die den Nenner n haben oder durch Heben oder

Sind α, β zwei beliebige ungleiche rationale Zahlen, s
kann man beliebig viele gebrochene Zahlen finden, die de
Größe nach zwischen α und β liegen.

Es sei nämlich $\alpha > \beta$ und

$$\alpha = \frac{a}{a_1}, \quad \beta = \frac{b}{b_1},$$

also $ab_1 > ba_1$ und folglich $ab_1 - ba_1$ eine positive ganze Zahl. Ma
kann daher den Multiplikator q so bestimmen, daß $q\,(ab_1 - ba_1)$ größe
als 1 oder als eine beliebige Zahl r wird (§ 15, 1.), und daß also b
liebig viele ganze Zahlen zwischen qab_1 und qba_1 liegen. Ist x ein
solche Zahl, so ist

$$qab_1 > x > qba_1$$

und folglich

$$\frac{a}{a_1} > \frac{x}{q a_1 b_1} > \frac{b}{b_1}.$$

Bei der Darstellung der rationalen Zahlen durch die Teilpunkt
eines Maßstabes verbindet sich mit dem Begriff des Abnehmens de
absoluten Werte die Vorstellung von einer immer kleiner werden
den Strecke, und ähnlich ist es bei allen Anwendungen der ge
brochenen Zahlen auf andere reale Dinge. Begrifflich liegt aber in de
getroffenen Festsetzung über die Größenordnung nichts von einer objek
tiven Kleinheit oder Größe.

7. Wir haben bisher den Bruch m/n nur für positive Nenne
erklärt, und im Grunde genommen ist dies auch ausreichend. Manch
mal ist es aber zweckmäßig, auch negative Nenner zuzulassen. Wi
erklären daher diese Brüche durch die Gleichung:

$$(4) \qquad \frac{m}{-n} = \frac{-m}{n}.$$

n nun

$$\alpha = \frac{a}{n}, \quad \beta = \frac{b}{n}$$

inieren wir als Summe und als Differenz

$$\alpha + \beta = \frac{a+b}{n}, \quad \alpha - \beta = \frac{a-b}{n}.$$

man als Summe und als Differenz von irgend zwei Brüchen nen Bruch, der aber nicht notwendig die reduzierte Form $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$). Das Resultat ist aber unabhängig von deren Form, in der α, β angenommen sind; denn wenn wir mit q erweitern, so erscheint auch $\alpha \pm \beta$ in einer durch q n Form.

ach ist die Bildung von Summen aus beliebig vielen ge- Zahlen von selbst klar, und auch die Gesetze, die wir 8 und § 13 für das Rechnen mit ganzen Zahlen kennen ben, gelten unverändert hier. Es ist überhaupt das Rechnen en, sofern es sich nur um Addition und Subtraktion einer n Anzahl von Brüchen handelt, nichts anderes als das mit ganzen Zahlen, angewandt auf eine bestimmte Art von eren Einheit $1/n$ heißt. Das was dem Bruchrechnen eigen- t, ist nur das vorläufige Einrichten der Brüche und zuletzt ultat das Heben überflüssiger Faktoren.

ultiplikation. Unter dem Produkt zweier Brüche a/a_1 verstehen wir den Bruch $ab/a_1 b_1$. Es ergibt sich daraus orschrift, die wir gleich auf das Produkt aus beliebig vielen ausdehnen können:

Brüche zu multiplizieren, multipliziert man sämt- ler und sämtliche Nenner miteinander. Das Pro- Brüche ist ein Bruch, der zum Zähler das Produkt er und zum Nenner das Produkt der Nenner hat.

soluten Größe statt ...

Das Produkt $\alpha\beta$ ist dem absoluten Werte nach kl... oder größer als α, je nachdem β ein echter oder ei... echter Bruch ist. Denn setzen wir $\alpha = a/a_1$, $\beta = b/b_1$, so ... nach § 18, 3. kleiner oder größer als α, je nachdem

$$a a_1 b < a a_1 b_1 \text{ oder } > a a_1 b_1,$$

also, wenn a, a_1 positiv vorausgesetzt werden, je nachdem $b < b$... $b > b_1$, d. h. je nachdem β ein echter oder ein unechter Bruch ...

3. Sind α, β, γ Brüche, so kann, wenn γ von Null verse... ist, nur dann $\alpha\gamma = \beta\gamma$ sein, wenn $\alpha = \beta$ ist. Dies ergibt sic... § 18, 3. Denn ist $\alpha = a/a_1$, $\beta = b/b_1$, $\gamma = c/c_1$, so ist, ... $\alpha\gamma = \beta\gamma$ ist:

$$a c b_1 c_1 = b c a_1 c_1,$$

und da c und c_1 von Null verschieden sind, so folgt hieraus ... dem Schlußsatz von § 9

$$a b_1 = b a_1$$

oder $\alpha = \beta$.

4. Division. Nun können wir in der so erweiterten Z... reihe die Aufgabe der Division allgemein stellen und lösen.

Es seien α, β zwei gegebene rationale Zahlen. Es wird ... Zahl ξ gesucht, mit der man β multiplizieren muß, um α zu erh... also eine Zahl, die der Bedingung

$$(2) \qquad \alpha = \xi\beta$$

genügt. Die Aufgabe hat offenbar keine Lösung, wenn $\beta = 0$ ... nicht $= 0$ ist, weil dann das Produkt $\xi\beta$ für jedes ξ den Wert ... Sind aber α und β beide $= 0$, so ist jede beliebige Zahl ξ eine L... der Aufgabe. Ist aber β nicht $= 0$, so kann die Aufgabe nur ... Lösung haben. Denn angenommen, sie hätte zwei Lösungen ... ξ', so müßte $\xi\beta = \xi'\beta$ sein, was nach 3. nicht möglich ist, w... von ξ' verschieden ist.

Es handelt sich also nur noch darum, irgend eine Lösung ...

nennen die Bildung der Zahl ξ die **Division** von α durch
den **Dividendus**, β den **Divisor**, ξ den **Quotienten**.
den Fall, daß α und β ganze Zahlen sind, erhalten wir für
ruch und wenn β in α aufgeht, eine ganze Zahl. Die Auf-
ze Zahlen **ohne Rest** zu dividieren, kann also im all-
nur durch Brüche gelöst werden, und ist als Spezialfall in
on von Brüchen enthalten.
bezeichnen die Lösung der Divisionsaufgabe (2) auch so:

$$\alpha : \beta, \quad \alpha/\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a b_1}{b a_1}$$

durch β, α über β) und fassen das in 4. enthaltene Re-
lie Regel zusammen:
zwei Brüche zu dividieren, multipliziert man den
es Dividenden mit dem Nenner des Divisors und
ner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors
nt das erste dieser Produkte als Zähler, das zweite
er des Resultates.
nennt auch in (4) α den Zähler, β den Nenner des Bruches α/β.
Bruch $1/\alpha$ heißt der **reziproke Wert** von α. Man erhält
man den Bruch α „umkehrt", d. h. den Nenner zum Zähler
Zähler zum Nenner macht.
ßt sich dann die Division auf die Multiplikation zurück-
ch der Vorschrift:

m einen Bruch α durch einen Bruch β zu dividieren,
α mit dem reziproken Werte von β zu multipli-

die Gleichung (2) für $\beta = 0$ entweder gar keine oder eine
stimmte Lösung hat, ist der Grund, warum man in der
die Division durch Null und damit Brüche mit dem
ull ein für allemal ausschließt. In gewissen Teilen der
nalysis ist es dagegen zweckmäßig, auch dem Zeichen $1/0$

die sich für positive ganzzahlige m und n aus der Definition e allgemeine Gültigkeit zuschreiben.

Setzen wir demnach in (5) $n = 0$, so folgt

$$\alpha^m \alpha^0 = \alpha^m$$

und daraus, wenn α und folglich α^m von Null verschieden was wir jetzt voraussetzen wollen,

$$\alpha^0 = 1. \tag{6}$$

Setzen wir dann aber in (5) $n = -m$, so folgt

$$\alpha^m \alpha^{-m} = \alpha^0 = 1,$$

also

$$\alpha^{-m} = \frac{1}{\alpha^m}. \tag{7}$$

7. Wenn also die Formel (5) allgemeine Gülti haben soll, so muß α^0 gleich 1 und α^{-m} der reziproke von α^m sein.

Die Gleichung $1^m = 1$ gilt auch nach dieser Erweiterun gemein.

8. Ist α ein unechter Bruch, so wächst α^n zugleich wie sich aus der Erklärung der Potenz durch wiederholte plikation ergibt. Wir können aber dieses Wachsen jetzt noch genauer bestimmen.

Ist p eine positive ganze Zahl und größer als 1, so i größer als α und wir können nach § 18, 6. eine Zahl γ zwisch und α einschieben, die also der Bedingung

$$\alpha^p > \gamma > \alpha \tag{8}$$

genügt. Daraus ergibt sich nun durch Multiplikation mit α:

$$\alpha^{p+1} > \gamma\alpha = \gamma + \gamma(\alpha - 1) > \gamma + \alpha(\alpha - 1) > \alpha. \tag{9}$$

Wendet man dasselbe Verfahren nochmals an, indem man in

den Übergang zu dem reziproken Wert folgt daraus, wenn $\alpha < 1$ ist, m so groß nehmen kann, daß α^n unter ebig gegebenen positiven Wert c heruntersinkt, wenn

n wir zu dem Fall $\alpha > 1$ zurück, so ist nach (10) um so $> n\alpha(\alpha - 1)$ und es ergibt sich $\alpha^n > n\alpha(\alpha - 1)\alpha^{-p}$ oder, zur Abkürzung $\alpha(\alpha - 1)\alpha^{-p} = \Delta$ setzt:

$$\alpha^n > \Delta n,$$

Δ eine von α abhängige, aber von n unabhängige positive Diese Formel gilt für jede positive ganze Zahl n.

$+ 1$ eine beliebig gegebene positive ganze Zahl, so kann groß auch die ganze Zahl m sei, immer zwei aufeinander ielfache von $k + 1$ angeben, zwischen denen m liegt, also:

$$(k + 1)n < m < (k + 1)(n + 1),$$

man also beide Seiten der Ungleichung (11) zur Potenz ebt, so ergibt sich, da $\alpha^m > \alpha^{(k+1)n}$ ist:

$$\alpha^m > \Delta^{k+1} n^{k+1}.$$

ner nach (12), wenn $m > 2(k + 1)$, also $1 - \frac{k+1}{m} > \frac{1}{2}$ ge- ird:

$$n > \frac{m - k - 1}{k + 1} = \frac{m}{k + 1}\left(1 - \frac{k + 1}{m}\right) > \frac{m}{2(k + 1)},$$

h nach (13)

$$\alpha^m > m^k \frac{\Delta^{k+1} m}{(2(k + 1))^{k+1}}.$$

eine beliebig gegebene Größe, so kann man m so groß daß

$$\frac{\Delta^{k+1} m}{(2(k + 1))^{k+1}} > c$$

h

§ 20. Rechnen mit Dezimalbrüchen.

1. Unser indisches Ziffernsystem gestattet es, eine geg natürliche Zahl mit einer beliebig vergrösserten Anzahl von Ziffe schreiben, wenn man von Anfang links die nötige Anzahl von N schreibt. So ist 03 soviel wie 3 und 000650 soviel wie 650. Diese N am Anfang links sind aber überflüssig und werden also nicht g

Wir betrachten jetzt aber Brüche, deren Nenner eine Poten 10 ist, also wenn A eine natürliche Zahl ist, Brüche von der

(1) $$\alpha = A 10^{-n},$$

und solche Brüche lassen sich auf Grund der soeben gemachte merkung durch den bloßen Stellenwert der Ziffern von eindeutiger Weise darstellen.

Wir schreiben nämlich die Zahl A mit mehr als n Stellen, mit $n + m + 1$ Stellen, worin m nicht negativ ist. Wir bezei die höchste dieser Ziffern mit a_m und bezeichnen die folgenden Indizes in absteigender Reihenfolge, wobei dann aber auch neg Indizes vorkommen können:

$$A = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}.$$

Hierin bedeuten die a Ziffern aus der Reihe $0, 1, \ldots, 9$. Unter ständen sind aber hier vom Anfang an Nullen zu nehmen. setzen wir

(2) $$\alpha = A 10^{-n} = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0, \quad a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n},$$

und dieser Ausdruck soll die Bedeutung haben

$$a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \cdots + a_{-n}$$

Es wird also durch das Komma angedeutet, wo die negative tenzen von 10 beginnen.[1])

a nach Belieben Nullen angehängt werden. Nullen, die etzten von Null verschiedenen Ziffer folgen, werden geicht geschrieben.

wir uns zur Bezeichnung einer dekadisch geschriebenen lgemeinen Symbole a bedienen, also

$$a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_n$$

worin m, n positive, negative oder verschwindende ganze euten und $m > n$ ist, während die a_{m-1}, a_{m-2}, ... Ziffern 4, 5, 6, 7, 8, 9) darstellen, so brauchen wir das Komma zu setzen, da der Stellenwert der Ziffer durch den Index gekennzeichnet ist.

uch, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, heißt, wenn orm (2) geschrieben ist, ein Dezimalbruch. Zum Unterein Bruch, der in der gewöhnlichen Art geschrieben ist, ner Bruch genannt.

im Rechnen mit den Dezimalbrüchen kann man sich derhode bedienen, wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen.
Addieren und beim Subtrahieren muß man die Zahlen so aß Ziffern von gleichem Stellenwerte untereinander stehen, e Kommata in allen Zahlen untereinander stehen. Hängt am Ende Nullen an, bis alle Zahlen die gleiche Stellendem Komma haben, so kann man ganz so rechnen, als mma vorhanden wäre, hat aber im Resultat das Komma lie gleiche Stelle zu setzen, die es in den einzelnen Zahlen

ein Dezimalbruch mit 10 zu multiplizieren, so rückt omma um eine Stelle nach rechts, und wenn mit 10^h zu eren ist, um h Stellen nach rechts. Hat man durch 10 10^h zu dividieren, so rückt das Komma um eine oder en nach links. Diese Operation ist immer ausführbar,

§ 21. Gekürzte Dezimalzahlen.

1. Der Stellenwert einer Ziffer eines Dezimalbruches wi so kleiner, je weiter die Ziffer nach rechts steht. Es kommt n vor, daß man bei Zahlenangaben oder Rechnungen die am wei rechts stehenden Ziffern von einer gewissen Stelle an nicht berücksichtigt („vernachlässigt"), sei es, weil sie nicht bekannt sei es, weil bei der Natur der besonderen Aufgabe nichts dara kommt. Das Weglassen dieser Ziffern heißt K ü r z e n d e s D e z b r u c h e s.

Die Berechtigung zu dem Verfahren beruht auf folgendem

E i n e d e k a d i s c h g e s c h r i e b e n e Z a h l

$$\varrho = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_k \tag{1}$$

(w o r i n s o w o h l n a l s k a u c h n e g a t i v s e i n k ö n n e n, a b e r i s t (§ 20, 1.)) i s t i m m e r k l e i n e r a l s 10^n.

Denn man erhält aus ϱ eine größere (jedenfalls nicht k Zahl, wenn man sämtliche Ziffern $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots a_k$ durch N ersetzt. Es ist also

$$\varrho \gtreqless 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 10^{k+1} + \cdots + 9 \cdot 10^{n-1},$$

und wenn man hierzu 10^k addiert, also die letzte Ziffer un Einheit vergrößert, so hat man

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^k \quad + 10^k \quad &= 10^{k+1}, \\ 9 \cdot 10^{k+1} + 10^{k+1} &= 10^{k+2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1} &= 10^n, \end{aligned}$$

und daraus durch Addition, wobei rechts und links 10^{k+1}, 10^{k+} 10^{n-1} weggehoben werden können:

$$\varrho + 10^k \gtreqless 10^n,$$

und folglich, wie bewiesen werden sollte

'ehler, den man beim Abbrechen nach der Stelle α_n ;t also kleiner als 10^n

gemeinen wird man immer suchen, die Kürzung des Dezimal- vorzunehmen, daß der Fehler absolut genommen möglichst . Man kann nun, bei gleicher Stellenzahl, α entweder der durch A' ersetzen. Es ist dann

$$\alpha = A + \varrho = A' - (10^n - \varrho),$$

also (vom Vorzeichen abgesehen) das einemal ϱ, das $\varrho' = 10^n - \varrho$. Der letzte Fehler wird kleiner sein als der $\varrho > 10^n - \varrho$ oder $2\varrho > 10^n$ ist. Dies findet statt, wenn ffer α_{n-1} von ϱ gleich 5, 6, 7, 8, 9 ist, während $\varrho < 10^n - \varrho$ $\alpha_{n-1} = 0, 1, 2, 3, 4$ ist. Die einzige Ausnahme ist, wenn st und alle folgenden Ziffern 0 sind. Dann ist $\varrho = \varrho'$ und en A, A' sind gleich gut.

rgibt sich hieraus für das Kürzen eines Dezimal- ie Regel, daß man die letzte beibehaltene Ziffer aöht, wenn die erste weggelassene Ziffer größer

'enn man mit gekürzten Dezimalbrüchen zu rechnen hat, die weggelassenen Stellen auf die, die beibehalten werden h Einfluß haben. Hat man k solche Zahlen zu addieren ıbtrahieren, so kann, wenn die Kürzung nach der in 1. Regel vorgenommen ist, die niedrigste beibehaltene Stelle ım $k/2$ zu groß oder zu klein sein. Diese äußerste Grenze s wird aber nur dann erreicht, wenn die Einzelfehler alle möglichen Wert und alle den gleichen Sinn haben. Ist ıer bekannt, als die abgekürzten Zahlen, so ist die Wahr- eit eines Fehlers von einer gewissen Größe nach der Wahr- eitsrechnung zu beurteilen. Die größeren Fehler sind dar- ger wahrscheinlich als die kleineren.

Es seien zwei auf vier Stellen abgerundete Zahlen

$$\alpha = a_3 a_2 a_1 a_0 ,$$
$$\beta = b_3 b_2 b_1 b_0$$

miteinander zu multiplizieren.

Beginnt man bei der Multiplikation mit der höchsten Stell β, so stellt sich die Rechnung bei dem genauen Verfahren der plikation so:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & & \\
b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\
\hline
a_3 b_3 & a_2 b_3 & a_1 b_3 & a_0 b_3 & * & * & * \\
 & a_3 b_2 & a_2 b_2 & a_1 b_2 & a_0 b_2 & * & * \\
 & & a_3 b_1 & a_2 b_1 & a_1 b_1 & a_0 b_1 & * \\
 & & & a_3 b_0 & a_2 b_0 & a_1 b_0 & a_0 b_0 \\
\hline
c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 ,
\end{array}$$

wobei natürlich bei den Produkten $a_h b_k$ und bei den Summen c die Zahl 9 übersteigen, die Zehner als Einer auf die nächst h Stelle zu werfen sind.

An den Stellen, wo in unserem Schema die Sternchen st sollten aber nicht Nullen, sondern unbekannte Ziffern stehen, s also auch die Ziffern c_2, c_1, c_0 mit Fehlern behaftet sein können, zwar wird die Unsicherheit größer von c_2 nach c_0. Die Unsiche in c_2 kann, im ungünstigsten Fall, wenn alle Summanden von groß als möglich sind, bis auf drei Einheiten in der Stelle c_4 zu wirken. Man wird also der Stelle c_2 selbst keinen Wert mehr legen, wird aber doch den Wert der einzelnen Summanden absch und zur Korrektur von c_3 und c_4 benutzen. Ebenso wird man Kenntnis, die man über den Wert der Sternchen hat, zur Verb rung der beibehaltenen Stellen benutzen. Die geschickte Benut

n Euklids Elementen finden wir eine Zahlentheorie, die im en alles enthält, was auch heute noch als Fundament der rithmetik gilt. Die dem Euklid eigentümliche geometrische g und Darstellung ist durch den Mangel einer einfachen nung, wie wir sie in dem indischen Ziffernsystem und in abenrechnung besitzen, begründet und erschwert für unsere ten das Verständnis.

er z. B. (Buch IX Nr. 20) unbestimmte Primzahlen durch angenommene Strecken darstellt, so trägt dies zu dem es in Rede stehenden Satzes nicht das mindeste bei, und Grund nur in dem Bedürfnis, ein konkretes Zeichen für akten Gedanken vor Augen zu haben.

vollen hier in der Kürze die Sätze hervorheben, auf die es sächlich anzukommen scheint.

veiten Buch sind die Hauptsätze über Multiplikation von abgeleitet (s. oben § 10). Hier hat die geometrische Me- tiefere Bedeutung, als in der Zahlentheorie, insofern die in ommenden Größen als wirkliche Strecken und ihre Produkte n aufgefaßt werden, wodurch die Beweise in der Tat aus uung genommen werden.

II. Buch werden zunächst — z. T. in wenig verständlicher Definitionen gegeben, aus denen soviel unzweifelhaft her- aß unter Zahlen nur ganze positive (natürliche) Zahlen zu sind. Es werden gerade Zahlen, Primzahlen, relative Prim- adratzahlen, Kubikzahlen, vollkommene Zahlen erklärt, und nt die Untersuchung mit dem, was auch heute noch das aller Zahlentheorie ist, mit dem Aufsuchen des größten ftlichen Maßes zweier Zahlen und der Erkennung relativer (VII. 1, 2, Euklidscher Algorithmus. § 16).

veit später (VII. 34, 36) wird das kleinste gemeinschaft- ache zweier oder mehrerer Zahlen erklärt und bestimmt. rd sodann (VII. 15, 16) der Satz von der Vertauschbarkeit

Primzahl teilbar ist; der Satz, daß jede Zahl in eine endliche
von Primfaktoren zerlegt werden kann, und daß diese Zerlegung
deutig ist, ergibt sich hieraus als unmittelbare Folgerung, wird
nicht ausdrücklich ausgesprochen. Nur weit später (IX. 14) f
noch der dahin gehörige Satz eine Stelle, daß ein Produkt aus meh
Primzahlen durch keine von diesen verschiedene Primzahl teilba
Der Primzahlpotenzen wird hierbei nicht gedacht.

Sehr bemerkenswert ist noch der Beweis des Satzes, daß es
Primzahlen gibt, als jede angebbare Zahl von Primzahlen oder,
wir es ausdrücken, daß die Anzahl der Primzahlen unendlich
(IX. 20, § 17).

Dieser Beweis ist so einfach und einleuchtend, daß er kaum d
einen besseren ersetzt werden kann. Er läßt sich aber nicht
tiefer liegenden Fragen, z. B. die Anzahl der Primzahlen in
arithmetischen Progression oder die Anzahl der Primfaktoren
höheren Zahlkörpern ausdehnen. Daher ist ein weit schwierig
von Euler herrührendes, auf der Betrachtung unendlicher Reihen
ruhendes Beweisverfahren von großer Wichtigkeit, das später beson
von Dirichlet weiter gebildet ist.

Den Schluß des IX. Buches und damit der Untersuchungen
die ganzen Zahlen bildet die Summenformel für die geometris
Reihen und der Hauptsatz über die vollkommenen Zahlen.

Über die Lebensumstände des Euklid ist uns wenig beka
Er lebte z. Z. des ersten Ptolemäers (Ptolomäus Lagi), der von
—285 v. Chr. in Ägypten regierte, und lehrte und schrieb in Ale
drien. Seine Schriften, von denen uns verhältnismäßig viel erha
ist, genossen zu allen Zeiten ein hohes Ansehen, sind vielfach
ausgegeben und übersetzt und haben eine ausgedehnte Literatur
vorgerufen. Von Schriften, in denen man näheres darüber fi
seien hier außer den schon früher erwähnten Werken über allgem
Geschichte der Mathematik (S. 18) nur genannt:

Chr., also ein Spielraum von 550 Jahren angeben. Wahrschein-ünde setzen seine Blütezeit gegen Ende dieser Periode. Er em Mittelpunkt der damaligen griechischen Wissenschaft, in , und schrieb in griechischer Sprache. Aber die Fremd-er ganzen Erscheinung veranlaßte Hankel zu der Vermutung, n Grieche sondern ein Barbare gewesen von einem der mme, deren Eindringen in die griechische Welt damals be-tte, eine Vermutung, die freilich durch keine positive An-tzt wird.

weit überwiegende Mehrzahl der Probleme, die bei Diophant sind, gehören zu denen, die auch heute noch als diophan-ichnet werden, nämlich solche, bei denen es sich darum bekannte, ganze Zahlen zu finden, die gewissen Gleichungen Daß Diophant sich nicht auf ganze Zahlen beschränkt, tionale Brüche sucht, ist kein prinzipieller Unterschied, da üche Quotienten ganzer Zahlen sind. Der einfachste Fall gabe, der jetzt in den Schulen mit Hilfe des Euklidschen us behandelt und als die Lehre von den Diophantischen en bezeichnet wird, nämlich der Fall der unbestimmten leichungen, kommt allerdings im Diophant nicht vor.

Aufgaben und deren Lösung, in denen es sich um die Er-ganzzahliger Werte der Unbekannten aus linearen Glei-andelt, finden sich nach Diophant in Europa (vorher schon und Indien) zuerst bei Bachet de Méziriac in der Schrift s plaisants et délectables" (1612, 2e éd. 1624)[1]) und in den gen zu der von demselben Verfasser herrührenden ersten Diophant-Ausgabe (1621).

abschätzigen Urteil von Hankel über die Diophantische kann ich nicht ganz beitreten. Es ist richtig, daß ein sammenhang, System und Methode in den von Diophant und gelösten Aufgaben nicht zu erkennen ist. Es ist aber lgemeine Charakter zahlentheoretischer Fragen, daß sie will-

treben, zerstreute Sätze zu konzentrieren, als durch das Bedürfn gestellt werden, welches ihnen bei der Behandlung von Fragen fühlba wird, die den bekannten Mitteln nicht mehr zugänglich sind." (Dirichle Untersuchungen über die Theorie der quadratischen Formen.)

Erst die neuere Zeit hat angefangen, den inneren Zusammenhar der arithmetischen Gesetze zu erforschen. Gerade dies Willkürlich Unvermittelte ist es, was manchem Anfänger den Zugang zur Zahle theorie erschwert, was aber andererseits auf den Kenner den unwide tehlichen Zauber ausübt, der ihn nicht wieder verläßt. So kan nan wohl sagen, daß auf Diophant die Zahlentheorie aufgebaut is Hat doch sein Werk die besten Geister aller Zeiten beschäftigt.

Der bedeutendste französische Algebraiker des 16. Jahrhundert François Vieta (1560—1603), gab in den fünf Büchern „Zetetica" ein Sammlung von teils dem Diophant entlehnten teils ihm nachgebildete Aufgaben und ähnlich der schon erwähnte Bachet de Méziriac. De größte von allen diesen an Diophant anknüpfenden Zahlentheoretiker st aber Pierre Fermat.[1])

Die wichtigsten Entdeckungen auf dem Gebiete der Zahlentheor hat er in Briefen an verschiedene Gelehrte, besonders aber in Rand bemerkungen zu der Diophant-Ausgabe von Bachet niedergelegt, d päter (1670) nach des Verfassers Tode von dessen Sohne in eine neuen Diophant-Ausgabe veröffentlicht worden sind.[2])

Der vorzugsweise mit dem Namen „Fermatscher Satz" bezeichnet Lehrsatz, daß, wenn a eine beliebige Zahl und n eine Primzahl is $a^n - a$ immer durch n teilbar ist, der mit seinen Verallgemeinerunge für die neuere Zahlentheorie und Algebra von der größten Wichtig keit geworden ist, findet sich zuerst in einem Briefe von 1640 a Frénicle. Der Beweis dieses Satzes ist nicht schwierig. Anders ve hält es sich aber mit anderen von Fermat ausgesprochenen Sätzen.

Als Beispiel sei die von Kronecker als „der große Fermatsch Satz" bezeichnete Behauptung von Fermat erwähnt, die weniger durc

eis entdeckt, aber der Raum (des Buches in das er seine gen eintrug) ist zu klein ihn zu fassen."

nds anderswo findet sich eine Andeutung über diesen Beden Bemühungen der größten Zahlentheoretiker der späteren nicht gelungen, ihn wieder zu entdecken. Für die dritten n Potenzen ist der Satz von Euler bewiesen, für die fünften hlet. Am weitesten gehen die Resultate, die Kummer er-, der wenigstens für eine große Klasse von Exponenten s geliefert hat, allerdings mit Anwendung der tiefsten und gen Hilfsmittel der Analysis, die Fermat gewiß noch nicht standen.

es verhält es sich mit einem anderen Satz, den Fermat für lt, nämlich daß eine um die Einheit vermehrte Potenz von 2, onent selbst eine Potenz von 2 ist, immer eine Primzahl Fermat erklärt selbst, daß er den Beweis „noch nicht vollbe erledigen können". Der Satz würde, wenn er richtig Mittel enthalten, Primzahlen von beliebiger Größe zu finden, kein anderes Mittel besitzen. Er ist aber, wie Euler get, nicht richtig, denn bereits $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ ist (teilbar durch 641).

Vierter Abschnitt.

Irrationalzahlen.

---

§ 23. Quadratwurzeln.

1. In der Reihe der natürlichen Zahlen sind gewisse Z
enthalten, die die zweiten Potenzen (Quadrate) von anderen
lichen Zahlen sind, z. B.

$$(1) \qquad 1 = 1^2,\ \ 4 = 2^2,\ \ 9 = 3^2,\ \ 16 = 4^2,\ \ 25 = 5^2,$$
$$36 = 6^2,\ 49 = 7^2,\ 64 = 8^2,\ \ 81 = 9^2,\ 100 = 10^2;$$

diese Zahlen 1, 4, 9, 16, . . . nennt man Quadratzahlen un
Zahlen 1, 2, 3, 4, . . ., deren zweite Potenzen sie sind, ihre Wu
(genauer Quadratwurzeln). Man schreibt, um dies Verhältn
zudeuten,

$$1 = \sqrt{1},\ \ 2 = \sqrt{4},\ \ 3 = \sqrt{9},\ \ 4 = \sqrt{16}\ \ \text{u. s. f.}$$

Die n^{te} Quadratzahl ist n^2, und der Unterschied zwischen der n^{te}
der $n - 1^{\text{ten}}$, also $n^2 - (n-1)^2$ ist gleich $2n - 1$, also gleic
n^{ten} ungeraden Zahl.

2. Aufgabe. Es ist eine dekadisch geschriebene g
Zahl a gegeben; es soll entschieden werden, ob a
Quadratzahl ist oder nicht und im ersten Fall ihre Wu
im zweiten die größte in a enthaltene Quadratzahl

n der b, c Ziffern bedeuten. Es entsteht dann a_1 aus a ingen von zwei Ziffern bc, und a_1 wird also mit zwei ir geschrieben als a. Wir setzen

$$\alpha_1 = 10\alpha + \beta$$

also β so zu bestimmen, daß

$$(10\alpha + \beta)^2 \overline{<} a_1 < (10\alpha + \beta + 1)^2.$$

ß nun β ebenfalls eine Ziffer sein; denn wäre $\beta \overline{>} 10$, so (5) folgen

$$100(\alpha + 1)^2 < (10\alpha + \beta)^2 < 100a + 10b + c,$$

$$(\alpha + 1)^2 < a + b10^{-1} + c10^{-2},$$

$0^{-1} + c10^{-2}$ kleiner als 1 und $(\alpha + 1)^2$ eine ganze Zahl ist:

$$(\alpha + 1)^2 < a,$$

oraussetzung (2) widerspricht, nach der $(\alpha + 1)^2$ größer

ich verlangt (5), daß die größtmögliche Zahl β berde, die der Bedingung genügt, daß

$$\beta(20\alpha + \beta) \overline{<} 100(a - \alpha^2) + 10b + c$$

a β nur 10 verschiedene Werte haben kann, nämlich 0, so wird diese Bestimmung bald gelingen. Um einen Anzu gewinnen, dividiert man die Zahl $10(a - \alpha^2) + b$ durch hält in dem Quotienten einen vorläufigen Wert von β, der Umständen noch um eine oder mehrere Einheiten vererden muß; bei einiger Übung ist die Rechnung leicht und führen. Hierauf beruht der bekannte Algorithmus des ens, von dem wir hier nur ein Beispiel anführen wollen.

$$\sqrt{8.40.00.00} = 2898$$

2. Man kann durch dasselbe Verfahren einen Dezimalbruc stimmen, dessen Quadrat sich so wenig als man will von de gebenen Zahl a unterscheidet.

Zu diesem Zwecke sucht man die größte ganze Quadratza die in $10^{2n}a$ enthalten ist. Dann ist

(7) $$\alpha^2 \leqq 10^{2n}a < (\alpha + 1)^2,$$

und wenn man dann

(8) $$\alpha_n = \alpha 10^{-n}$$

setzt, so ist

(9) $$\alpha_n{}^2 \leqq a < (\alpha_n + 10^{-n})^2.$$

Man erhält die Zahl $10^{2n}a$ aus a, indem man $2n$ Nullen anh und dann α_n aus α, indem man die letzten n Ziffern von α l ein Komma setzt. Wenn man dann die letzte Ziffer von α_n um Einheit erhöht, so erhält man bereits einen zu großen Wert.

Diese Zahlen α_n heißen die genäherten Werte der Qu wurzel aus a. So ist in obigem Beispiel 28,98 ein genäherter der Quadratwurzel aus 840.

Ebenso kann man aber auch verfahren, um die genäherten V der Quadratwurzeln aus Dezimalbrüchen zu erhalten. Man hat die Stellen vom Komma aus nach beiden Seiten paarweise schneiden, nötigenfalls nach Anhängen einer Null am Ende.

§ 24. Irrationalzahlen.

1. Ob eine natürliche Zahl Quadratzahl sei oder nicht, läßt leicht entscheiden, wenn die Zerlegung dieser Zahl in ihre I faktoren bekannt ist. Sind nämlich $a, b, c, \ldots$ voneinander schiedene Primzahlen, sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positive Exponenten un

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

nen ungeraden Exponenten hat, so kann mq^2 nicht gleich
eil sonst a mit einem ungeraden Exponenten in p^2 ent-
müßte.

kann ein reduzierter Bruch m/n nur dann das Quadrat
en Bruches p/q sein, wenn m und n beide Quadrat-
d. Denn wenn $mq^2 = np^2$ wäre, und n und m keine ge-
Teiler haben, so müßte, wenn wieder a^α mit ungeradem α
Potenz der Primzahl a ist, die in m aufgeht, da a
aufgeht, a auch mit einer ungeraden Potenz in p^2 ent-
[1])

er stößt die Aufgabe, die Operation des Potenzierens um-
schon des Potenzierens mit 2), auf eine Schranke. Die
ebensowenig lösbar, wie die Aufgabe der Teilung ganzer
der Einführung der Brüche.

nan diese Lösung trotzdem erzwingen, so bleibt nichts
eine abermalige Erweiterung des Zahlbegriffs durch die
neuer Zahlen, die man jetzt allgemein Irrationalzahlen
en gegenüber die bisher betrachteten Zahlen, die als spe-
in den allgemeinen Zahlen enthalten sein müssen, von
tionale Zahlen heißen.

neuen Zahlen sind, wie die Zahlen überhaupt, willkürliche
n unseres Geistes, und es ist lediglich eine Zweckmäßig-
ob wir diesen erweiterten Begriff benutzen und Namen
uchen wollen oder nicht.

en praktischen Rechner, der seine Operationen doch nur
en Zahlen ausführen kann, ist diese Frage allerdings ziem-
gültig. Aber die innere Harmonie des Gebäudes der Arith-
ert eine solche Erweiterung des Zahlbegriffs, ohne die
Ausdrucksweise und die Formulierung vieler Sätze, be-
der höheren Analysis, äußerst schwerfällig und weitläufig
rde.

Begriffssysteme bilden, deren Individuen sich in eindeutiger W
aufeinander abbilden lassen, deren jedes daher dem Zweck, de
Einführung der Irrationalzahlen hat, gleich gut entspricht. Man
etwa von den unendlichen Dezimalbrüchen ausgehen, oder vo
endlichen Kettenbrüchen; dasselbe leisten G. Cantors „Zah
reihen“ oder Christoffels „Charakteristiken“. Die Wahl
Weges wird nur durch die Einfachheit oder leichtere Verstän
keit bestimmt, und in dieser Beziehung scheint der von Dede
geschaffene Begriff des „Schnittes“ als Ausgangspunkt den V
zu verdienen.

Die Gesamtheit der in den Systemen enthaltenen Elemente
bei der eindeutigen Abbildung untereinander verbunden sind, l
einen Gattungsbegriff, den wir eine irrationale Zahl nennen.
ist gleichgültig, an welchen Repräsentanten wir die Eigensch
dieser Gattungen studieren. Solche Repräsentanten nennen wi
legentlich auch selbst irrationale Zahlen, z. B. einen unendl
Dezimalbruch.

3. Das Nächstliegende und Einfachste würde es wohl sein,
man sich auf die Raumanschauung berufen und Zahlen geradez
Strecken erklären wollte. Man müßte dann ein Axiom etwa
genden Inhaltes voraussetzen:

Wenn die Gesamtheit der Punkte einer Geraden, die
horizontal vor Augen liegt, derart in zwei Teile A und A' ge
ist, daß jeder Punkt aus A links liegt von jedem Punkt aus
so kann man die Linie selbst durch einen bestimmten Pun
derart in zwei Teile zerschneiden, daß der eine Teil alle Punkte
A, der andere alle Punkte aus A' enthält.

Die Existenz dieses Punktes α ist aber ein Axiom, das aus
Natur unserer Raumanschauung stammt, das sich aus reinen Begr
in keiner Weise beweisen läßt.

a, die aus A' mit a' bezeichnet sein. In derselben Weise
r die anderen Buchstaben der drei Alphabete.

beistehende
die Zahlen-
llt, mag
chaulichen.

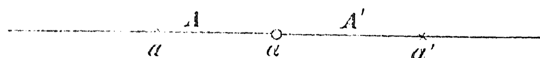


Fig. 3.

ationale Zahl r erzeugt einen oder genauer ge-
Schnitte R/R'.

wir nämlich alle Zahlen, die kleiner als r sind zu R, alle
größer als r sind zu R', und r selbst entweder zu R oder
en, dann ist r selbst die größte Zahl von R oder die
R'. Schnitte, die auf diese Weise entstehen, nennen wir
Schnitte.

aber auch Schnitte gibt, die nicht so durch rationale
ugt werden können, und die wir dann irrationale
ennen, zeigt das folgende Beispiel:

hme in A alle Zahlen a auf, deren Quadrat kleiner als 2,
Zahlen, deren Quadrat größer als 2 ist. Dann sind alle
ahlen untergebracht, da es keine Zahl gibt, deren Quadrat
, und jede Zahl a ist kleiner als jede Zahl a'. Es gibt
größte Zahl in A und keine kleinste in A'; denn ist
können wir eine natürliche Zahl n so annehmen, daß

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2$$

ann ist zwar $a + 1/n > a$, aber doch noch $(a + 1/n)^2 < 2$;
läßt sich zeigen, daß es keine kleinste Zahl a' gibt.

ist also A/A' ein rationaler Schnitt, wenn es
ein größtes a oder ein kleinstes a' gibt, und ein
er Schnitt, wenn es weder ein größtes a noch ein
a' gibt.

r A/A' irrational, so kann man zu jedem a noch größere

wird dann eine letzte in A enthalten sein, die wir mit $m/\imath$ zeichnen, und es ist

$$\frac{m}{n} = a, \quad \frac{m+1}{n} = a'$$

und

$$a' - a = 1/n < d.$$

Bei einem irrationalen Schnitt gibt es zwischen diesen be Zahlen a, a' noch beliebig viele andere sowohl in A als in A', rationalem Schnitt wenigstens in einem der beiden Teile.

Den beiden durch eine rationale Zahl r erzeugten tionalen Schnitten ordnen wir nun eben diese Zahl r betrachten also diese beiden Schnitte als von gleichem Zahlenwe

Einem irrationalen Schnitt ordnen wir ein Individ der neuen Zahlenart, eine Irrationalzahl zu, die wir m bezeichnen. Es soll für die nächsten Betrachtungen daran gehalten werden, daß die kleinen lateinischen Buchstaben ratio die griechischen Buchstaben irrationale Zahlen bedeuten.

6. Es kommt jetzt darauf an, die Irrationalzahlen in Größenordnung zu bringen, in der auch die rationalen Zahlen, zwar ihrer Größe nach, eine Stelle finden.

Wir betrachten zwei verschiedene Schnitte A/A' und I Wenn es nur eine Zahl a' gibt, die zugleich ein b ist, so ist die kleinste aller a' und zugleich die größte aller b; die Sch sind rational und haben denselben Zahlenwert ($\alpha = \beta$). Wir nieren also folgendermaßen:

Die Zahl α heißt kleiner als β,

$$\alpha < \beta,$$

wenn es wenigstens zwei Zahlen a' gibt, die zugleich Zal b sind.

— A', so ist auch $-A'/-A$ ein Schnitt. Die durch
e Zahl wird mit $-\alpha$ bezeichnet und heißt die zu α
esetzte
e Zahl.

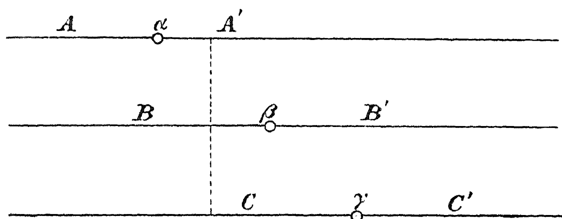


Fig. 4.

ı könnte
rch wei-
dung des
Schnitte
ıen Zah-
gelangen.
cht mög-
gibt sich durch folgende Betrachtung: Es sei A/A′ ein
Gebiete der irrationalen Zahlen, in der Weise, daß
α aus A kleiner ist als jede Zahl α' aus A′. Ein
nitt wird aber immer durch eine bestimmte irrationale
ugt, in der Weise, daß σ entweder die größte Zahl in A
einste in α' ist. Wenn nämlich eine rationale Zahl r als
ler irrationalen Zahlen betrachtet wird, so ist r entweder
in A′ enthalten. Bezeichnet man die ersten mit a, die
a', so ist ein Schnitt A/A' und dadurch eine irrationale
ärt. Ist α in A enthalten, aber nicht die größte Zahl
bt es in A auch rationale Zahlen a, die größer sind als α
ist auch σ größer als α, und ebenso sieht man, daß, wenn
ber nicht die kleinste Zahl in A′ ist, $\sigma < \alpha'$ ist. Es
für σ nur noch die Möglichkeit übrig, daß es die größte
oder die kleinste Zahl in A′ ist. Der Schnitt A/A′ erzeugt
ındere Zahl als A/A'.

§ 25. Obere und untere Grenze.

T irgend eine Zahlenmenge, deren Elemente rationale

Man kann sie kürzer auch so erklären:

Die obere Grenze ist eine Zahl, die durch keine Zahlen τ an Größe übertroffen wird, der aber doch Zahl bis auf jeden Grad nahe kommen.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß es höchstens eine sc Zahl γ geben kann. Denn sind es zwei, etwa γ und γ', und $\gamma < \gamma'$, so gibt es nach b) eine Zahl τ, für die $\gamma < \tau \leqq \gamma'$ ist; Zahl γ hat also nicht die Eigenschaft a).

Um aber die Existenz einer solchen Zahl γ nachzuweisen, merken wir, daß, wenn r irgend eine rationale Zahl ist, von zw nur eines möglich ist: Entweder es gibt eine Zahl τ, die gr ist als r; solche Zahlen r wollen wir mit c bezeichnen. Oder es keine Zahl τ, die größer ist als r; diese Zahlen r mögen mit c' zeichnet sein. Zunächst folgt aus der Voraussetzung, daß es so Zahlen c als Zahlen c' gibt, denn jede rationale Zahl r, die gr ist als t, ist eine Zahl c', und wenn τ irgend eine Zahl in T ist ist jedes r, was kleiner ist als τ, ein c. Ferner ist jedes c kl als jedes c' und die Zahlen c, c' bilden also einen Schnitt C/C' definieren eine Zahl γ, von der man nun sofort sieht, daß sic beiden Eigenschaften a), b) hat.

Denn gibt es eine Zahl τ über γ, so gibt es auch eine ratic Zahl r, für die $\gamma < r < \tau$ ist. Diese Zahl r müßte also einer zu den c, andererseits zu den c' gehören, was nicht möglich Und wenn $\varepsilon < \gamma$ ist, so gibt es eine Zahl c zwischen ε und γ, folglich auch ein τ, das der Bedingung $\varepsilon < c < \tau \leqq \gamma$ genügt.

2. Ebenso läßt sich der folgende Satz beweisen:

Gibt es eine Zahl t' von der Art, daß alle Zahlen der Meng größer sind als t', so existiert eine und nur eine Zahl γ' von doppelten Eigenschaft:

a') Alle Zahlen in T sind größer als γ' oder mindes gleich γ'

Null zur unteren Grenze; eine obere Grenze ist nicht vor-
ie Gesamtheit der negativen Zahlen hat die Null zur
ze, aber keine untere Grenze. Die Gesamtheit der positiven
he hat die Null zur unteren, die 1 zur oberen Grenze.
tere oder obere Grenze einer Menge braucht nicht zu der
ehören. Wenn sie dazu gehört, so nennt man die untere
Minimum, die obere das Maximum der Menge.
A' ein Schnitt, der die Zahl α erzeugt, so ist α
lie obere Grenze aller Zahlen a und die untere
er Zahlen a'.

§ 26. Rechnen mit Irrationalzahlen.

r haben nun die fundamentalen Rechenoperationen im Ge-
ationalzahlen zu erklären. Es genügt dabei, auf eine der-
die Addition, etwas genauer einzugehen, da für die übrigen
asselbe gilt. Sind α und β irgend zwei durch die Schnitte
B/B' definierte Zahlen, so hat die Zahlenmenge $a+b$ eine
e γ und die Menge $a'+b'$ eine untere Grenze γ'. Diese
zen γ und γ' können aber nicht voneinander verschieden sein.
ngenommen, es sei $\gamma' < \gamma$, so gibt es in beliebiger Nähe
größer als γ' eine Zahl $a'+b'$ und in beliebiger Nähe
kleiner als γ eine Zahl $a+b$ und es ist also $a'+b' < a+b$,
ich ist, da $a < a'$, $b < b'$ ist.
r zweitens $\gamma < \gamma'$, so nehme man zwei rationale c, c', so
$< c < c' < \gamma'$. Dann sind alle $a'+b'$ größer als c' und
kleiner als c, also:

$$c' < a'+b' \quad \text{für alle} \quad a', b',$$

$$c > a+b \quad \text{für alle} \quad a, b.$$

h ist für alle Zahlen a, b, a', b'

$$c'-c < (a'-a)+(b'-b),$$

Unter der Differenz $\alpha - \beta$ der Zahlen α und β verstehen die obere und untere Grenze der Zahlen $a - b'$ und $a' - b$.

3. Die Multiplikation und Division erklären wir zunächst für tive Zahlen α, β. Beschränken wir uns dann auch auf positive en a, b, so ergibt sich ebenso, daß ab und a/b' eine obere, und a'/b eine untere Grenze haben, und daß die obere Grenze ab gleich der unteren Grenze von $a'b'$, die obere Grenze von gleich der unteren für a'/b ist.

Unter dem Produkt $\alpha\beta$ der positiven Zahlen α und β tehen wir die gemeinsame (obere und untere) Grenze Zahlen ab und $a'b'$, unter dem Quotienten α/β die ge- nsame (obere und untere) Grenze der Zahlen a/b' und a'/b.

Um die Multiplikation und Division auch auf negative Zahlen udehnen, lassen wir dieselben Definitionen gelten, wie bei den nalen Zahlen (§ 14), wonach

$$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta, \quad -\alpha(-\beta) = \alpha\beta,$$
$$-\alpha/\beta = \alpha/-\beta = -\alpha/\beta, \quad -\alpha/-\beta = \alpha/\beta.$$

einer der Faktoren des Produktes $\alpha\beta$ oder der Zähler des ienten α/β gleich Null, so geben wir dem Produkt oder dem ienten selbst den Wert Null. Den Nenner β des Quotienten dürfen wir nicht gleich Null nehmen.

4. Bei dieser Definition der vier Grundoperationen besteht nun der nde wichtige Satz, den wir den Satz von der Stetigkeit nennen en, durch den diese Definitionen erst praktischen Wert erlangen:

Es seien α, β zwei beliebige Zahlen, immer mit der Beschränkung, bei der Division α/β der Wert $\beta = 0$ ausgeschlossen ist, und deute $f(\alpha, \beta) = \varrho$ das Resultat einer der vier mit diesen Zahlen nehmenden Grundoperationen $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, α/β, ferner $b) = r$ das Resultat der mit den rationalen Zahlen a, b aus-

n kann dem Resultat einer Rechnung $f(\alpha, \beta)$ mit alzahlen durch die gleiche Rechnung mit rationalen $f(a, b)$ **beliebig** nahe kommen, wenn man die Zahlen Zahlen α, β **genügend** nahe annimmt.

he Zahlen a, b heißen Näherungswerte der Zahlen α, β. Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Defir Rechenoperationen mit irrationalen Zahlen, und es wird auf eine derselben etwas genauer einzugehen. Nehmen wir Addition $\alpha + \beta$; da ϱ die obere Grenze der $a + b$ und die renze der $a' + b'$ ist, so kann man, wenn c, c' in dem ϱ ern Schnitt C/C' beliebig gegeben sind, zwischen c und ϱ ein as wir mit $a_1 + b_1$ bezeichnen, einschieben, und ebenso zwischen ϱ und c'. Es ist also

$$c < a_1 + b_1 < a_1' + b_1' < c'.$$

er nun a und b den Ungleichungen (3) genügen, so ist

$$a_1 + b_1 < a + b < a_1' + b_1',$$

t ist der Beweis geführt.

Dieser Satz gestattet nun eine Verallgemeinerung:

damentalsatz der Stetigkeit. Ist ϱ das Ergebnis urch beliebige Wiederholung der vier Grundrechten aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zusammengesetzten ng $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, sind ferner h, h' zwei beliebig ge- Zahlen, für die

$$h < \varrho < h',$$

man die Zahlen $a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'; \ldots$ so bestimmen,

$$a_1 < \alpha < a_1'; \quad b_1 < \beta < b_1'; \quad c_1 < \gamma < c_1', \cdots,$$

3, wenn die rationalen Zahlen $a, b, c, \ldots$ den Be- en

und für ein zweites Zahlensystem

(13) $$\mu, \nu, \ldots$$

und die Rechenoperation

(14) $$\varphi(\mu, \nu, \ldots) = \sigma;$$

wir wollen ihn daraus ableiten für eine mit den beiden Zah
ausgeführte Rechenoperation

(15) $$F(\varrho, \sigma) = \tau.$$

Wir nehmen also die zwei Zahlen h, h' beliebig an, so daß

(16) $$h < \tau < h'$$

ist. Nach dem Satze 4. können wir dann für ϱ und σ Werte k
so bestimmen, daß

(17) $$k < \varrho < k', \quad l < \sigma < l',$$

und daß $F(r, s)$ auch zwischen den Grenzen h und h' liegt, wo
Näherungswerte von ϱ, σ zwischen den Grenzen (17) bedeute

(18) $$k < r < k'; \quad l < s < l'.$$

Dann aber können wir nach der Voraussetzung, daß der Satz
Zahlen ϱ, σ bereits bewiesen sei, für die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$
wieder rationale Näherungswerte

$$a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$$

innerhalb hinlänglich enger Grenzen setzen, so daß die dadur
entstehenden Zahlen

$$f(a, b, c, \ldots) = r, \quad f(m, n, \ldots) = s$$

in den Intervallen (18) liegen, und damit ist der Beweis des
allgemein geführt.

6. Wir können dem Fundamentalsatz noch eine etwas s
Fassung geben, die für manche Zwecke nötig ist, und die sich
beweisen läßt:

$$f(a, b, c, \ldots) = r, \quad \varphi(a, b, c, \ldots) = s$$

den Bedingungen

$$h < r < h', \quad k < s < k'$$

genügen.

Denn bestimmt man die Grenzen (9) zunächst für f
so braucht man diese Grenzen dann nur durch engere z
beiden Forderungen genügen.

7. Diese Sätze geben nicht nur dem praktischen
Gewißheit, daß er durch seine Rechnungen, die der Na
nach nur mit Näherungswerten geschehen können, jede
benen Grad der Genauigkeit erreichen kann; er gibt
theoretisch wichtige Resultat, daß eine Gleichung o
gleichung, die für alle rationalen Zahlen als
kannt ist, auch für irrationale Zahlen richtig b

Jede Gleichung zwischen rationalen Zahlen kann
gebracht werden

(19) $$f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

wo f irgend eine wiederholte Anwendung der vier Gr
arten bedeutet. Ist nun eine solche Gleichung richtig
lichen rationalen Zahlen $a, b, c, \ldots$, so muß sie auch
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ richtig bleiben, d. h. es ist auch

(20) $$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0.$$

Wäre nämlich $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ nicht Null, sondern z.
nehme man zwei positive Zahlen h, h' so an, daß

(21) $$h < f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < h';$$

dann wäre aber auch für gewisse rationale Näherungswer
zwischen h und h' enthalten, also positiv, entgegen der

Ebenso verhält es sich mit Ungleichungen, wo
schärfere Fassung 6. des Fundamentalsatzes angewandt

Wenn z. B. f und φ zwei Rechenverbindungen sin

Fundamentalsatzes anzuwenden. Denn nach dieser ka
$f(\alpha, \beta, \ldots) = 0$ ist, die Näherungswerte $a, b, \ldots$ so a
$\varphi(a, b, \ldots)$ positiv bleibt, während $f(a, b, \ldots)$ negativ

Von den Sätzen, die durch diese Betrachtung allg
sind, führen wir hier die folgenden an:

1) Das kommutative und das assoziative Gesetz be
und Multiplikation.

2) Die Subtraktion ist die Umkehrung der Additi

$$(\alpha - \beta) - \beta = \alpha.$$

3) Die Division ist die Umkehrung der Multiplika

$$(\alpha/\beta)\beta = \alpha.$$

4) Eine Summe wächst, wenn der eine Summand

5) Ein Produkt aus positiven Faktoren wächst, w
Faktoren wächst, und um so mehr also, wenn alle Fak

6) Ein Quotient zweier Zahlen nimmt ab, wenn der

7) Die Differenz zweier Zahlen ist positiv oder ne
dem der Subtrahend kleiner oder größer ist als der Mi

8) Eine Potenz einer Zahl, die größer als 1 is
dem Exponenten und zwar über jede Grenze.

9) Eine Potenz einer positiven Zahl, die kleiner
positiv, sinkt aber mit wachsendem Exponenten unter j
Zahlenwert herunter.

Hier liegt der Grund, warum der Nenner eines
gleich Null genommen wird. Denn wollte man dem Br
Zahlenwert beilegen, so würde 6) nicht mehr gelten.

§ 27. Unendliche Dezimalbrüche.

1. Es sei A_n ein Dezimalbruch mit n Steller
Komma und beliebigen Stellen vor dem Komma, so

Setzt man

(1) $$A'_n = A_n + 10^{-n},$$

so ist, wenn $n > 0$ ist, A'_n ein Dezimalbruch, der au wenn man die letzte Ziffer um eine Einheit erhöht (wo letzte Ziffer von A_n gleich 9 ist, 0 dafür gesetzt un gegangene Ziffer um 1 erhöht wird). Durch An $(n+1)^{\text{ten}}$ Ziffer z an A_n entsteht A_{n+1}, und es ist

$$A_{n+1} = A_n + z\,10^{-n-1},$$
$$A'_{n+1} = A_n + (z+1)10^{-n-1},$$

woraus hervorgeht

(2) $$A_n \leqq A_{n+1} < A'_{n+1} \leqq A'_n.$$

Die Zahlen $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ bleiben also alle unte $A'_n, A'_{n+1}, A'_{n+2}, \ldots$ sind alle größer als A_n.

Es haben also die A_n eine obere Grenze und die A Grenze, und da $A'_n - A_n = 10^{-n}$ für ein genügend g jeden Wert heruntersinkt, so sind diese beiden Grenze einander verschieden. Die durch diese beiden Grenzen d α heißt der Zahlenwert des unendlichen Dezimal liegt seiner Größe nach zwischen je zwei A_n, A'_n, die d der untere Näherungswert von α heißen. Sie kom und auch der Zahl α um so näher, je größer n ist. D positiv sind, so ist auch α positiv.

2. Ebenso können wir jeder positiven Zahl α eine Dezimalbruch zuordnen. Wir ordnen die rationalen Br Nenner 10^n der Größe nach, und bezeichnen den größten der nicht größer als α ist, mit A_n, setzen also.

(3) $$A_n \leqq \alpha < A'_n.$$

Es gibt dann eine und nur eine Ziffer z, für die

(4) $$A_{n+1} \leqq \alpha < A'_{n+1},$$

und wir können also den Dezimalbruch A_n in eindeuti

und folglich, wenn $n > k$, also nach (2) $B_n > B_k$, A'_n

(6) $$B_n - A'_n \overline{\overline{>}} (b_k - a_k - 1)\, 10^{-k}.$$

Da nun $B_n - A'_n$ unter jeden Zahlenwert heruntersinken
$b_k - a_k - 1 = 0$ sein, also

(7) $$b_k = a_k + 1,$$

und folglich nach (6) für jedes $n \geqq h$

(8) $$B_n = A'_n = A_n + 10^{-n}.$$

Es ist also auch, wenn die $(n+1)^{\text{ten}}$ Ziffern mit
zeichnet werden:

(9) $$B_n + b_{n+1} 10^{-n-1} = A_n + (a_{n+1} + 1)\, 10^{-n-}$$

also nach (8): $10^{-n} + b_{n+1} 10^{-n-1} = (a_{n+1} + 1)\, 10^{-n-}$

$$a_{n+1} = b_{n+1} + 9.$$

Da aber a_{n+1} nicht größer als 9 sein kann, so muß b_{n+1}
sein, sobald $n \overline{\overline{>}} k$ ist; und dann haben auch in der
Dezimalbrüche A_n und B_n denselben Grenzwert, näml
lichen Dezimalbruch B_k. Zwei Dezimalbrüche wie

$$0{,}999\ldots,\quad 1{,}000\ldots$$

haben denselben Zahlenwert 1.

4. Hiernach hätten wir die Theorie der Irratio
von den unendlichen Dezimalbrüchen aus begründen
wäre dies darauf hinaus gekommen, daß man die Sch
Gebiete aller rationalen Brüche, sondern nur im Ber
lichen) Dezimalbrüche gemacht hätte. Einerseits hätte
zug gehabt, daß die Begriffsbildung unmittelbar an
lichen Algorithmus der Berechnung solcher Zahlen an
Andererseits aber wäre die Beweisführung weniger ein
Die Erscheinung, daß gewisse Zahlen zwei verschieden
zeugen, die sich bei der ersten Betrachtung bei alle

§ 28. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimal

1. Ein gemeiner Bruch kann nur dann als endlicher geschrieben werden, wenn er durch Multiplikation mit ein 10 in eine ganze Zahl verwandelt werden kann. Dies nur dann möglich, wenn in der reduzierten Form des der Nenner n keine anderen Primfaktoren enthält als 2 also $n = 2^a 5^b$ ist, wo a und b ganze Zahlen sind; de wenn c ganzzahlig und nicht kleiner als die größer Zahlen a und b ist, $10^c m/n$ eine ganze Zahl.

Haben wir aber irgend einen Bruch m/n, so könn auf folgendem Wege mit Dezimalbrüchen in Beziehung

Nach dem Verfahren der Division können wir ein z und einen Rest m_1, der kleiner als n ist, so bestimm

(1) $$m = zn + m_1$$

wird. Darin ist z eine ganze Zahl, die positiv oder Ebenso ist m_1 positiv und kleiner als n und nur dan wenn m durch n teilbar, also m/n eine ganze Zahl ist.

Wir verfahren nun ebenso mit $10 m_1$, setzen also

(2) $$10 m_1 = z_1 n + m_2,$$

und somit ist

$$10 m_1 > z_1 n,$$

also $z_1 < 10$. Es ist also z_1 eine Ziffer (0, 1, 2, . . ., 9 so ist m/n gleich dem Dezimalbruch z, z_1, ist aber m_2 es kleiner als n, und wir können nach derselben Regel

(3) $$\begin{aligned} 10 m_2 &= z_2 n + m_3 \\ 10 m_3 &= z_3 n + m_4 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ 10 m_s &= z_s n + m_{s+1}, \end{aligned}$$

oder als Dezimalbruch geschrieben:

$$\frac{m}{n} = z, z_1 z_2 \cdots z_s + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s}. \tag{4}$$

Ist $m_{s+1} = 0$, so ist m/n als Dezimalbruch geschrieben, und d also nur in dem vorher erwähnten Falle eintreten, wenn n (b zierter Darstellung des Bruches) die Form $2^a 5^b$ hat. In Fällen kann die Rechnung, welche, wie man sieht, nichts and die gewöhnliche Division der Elementararithmetik ist, unl fortgesetzt, also in (4) die Zahl s beliebig groß angenommen Der Dezimalbruch

$$\delta_s = z, z_1 z_2 \cdots z_s \tag{5}$$

ist dann immer kleiner als der gemeine Bruch

$$\gamma = \frac{m}{n} \tag{6}$$

und da $m_{s+1} < n$ ist, so ist der Unterschied $\gamma - \delta_s$ kleiner a Dieser Unterschied wird also um so kleiner, je größer die zahl des Bruches δ_s ist, und sinkt, wenn s groß genug ist jeden vorgeschriebenen Zahlenwert herab. Man kann also i Anwendungen, in denen die Zahlen überhaupt nur approxim kannt sind, z. B. in Rechnungen, deren Daten auf Messung ruhen, die gemeinen Brüche mit jedem vorgeschriebenen G Genauigkeit durch Dezimalbrüche ersetzen. Man nennt dann Dezimalbruch δ_s einen Näherungswert des gemeinen Bruches Ermittelung des Dezimalbruches δ_s aus γ heißt (wenn auch uneig die Verwandlung des gemeinen Bruches in einen Dezimalbr

Man schreibt dann auch die Gleichung (4), indem man d $m_{s+1}/10^s n$ nicht mit in die Bezeichnung aufnimmt, und die unbe Fortsetzbarkeit durch Punkte andeutet:

$$\frac{m}{n} = z, z_1 z_2 z_3 \cdots.$$

Bei der Berechnung der Ziffern $z, z_1, \ldots$ ist es gleichgültig

heißen **verschieden**, wenn bei hinlänglicher Fortsetzung
an gleicher Stelle stehende Ziffern z_s, z_s' voneinander ver

Brüche, die sich um ganze Zahlen voneinander
haben dieselbe Mantisse, und daher genügt es, um die M
Brüche mit dem Nenner n zu erhalten, wenn wir nu
Brüche m/n betrachten.

Es gilt der Satz:

**Verschiedene echte Brüche γ und γ' haben v
Mantissen.**

Um ihn zu beweisen, nehmen wir an, es sei γ'
stimmen, was nach § 19, 8. immer möglich ist, s so, da

$$10^s(\gamma' - \gamma) > 1$$

wird. Dann ist

(7) $$\gamma' > \gamma + 10^{-s}.$$

Setzen wir

$$\delta_s = 0, z_1 z_2 \cdots z_s, \quad \delta_s' = 0, z_1' z_2' \cdots z_s',$$

so ist, wie wir gesehen haben,

$$\gamma > \delta_s, \quad \gamma' < \delta_s' + 10^{-s},$$

und folglich ist nach (7)

$$\delta_s' + 10^{-s} > \gamma' > \gamma + 10^{-s} > \delta_s + 10^{-s},$$

also $\delta_s' > \delta_s$. Es müssen also die Mantissen Z und Z'
spätestens in der s^{ten} Stelle voneinander verschieden sein

Dieser Satz wird ergänzt durch den ähnlichen:

**Kein echter Bruch γ hat eine Mantisse, die
Neunern besteht.**

Denn wählen wir s so groß, daß $10^s(1 - \gamma) > 1$, also
ist, so ist um so mehr $1 > \delta_s + 10^{-s}$. Wenn aber z_1,
gleich 9 wären, so wäre $\delta_s + 10^{-s} = 1$, was dieser
widerspricht. Es kommt also spätestens in der s^{ten} Ste
tisse von γ eine Ziffer vor, die kleiner als neun ist.

Jeder gemeine Bruch ruft in der Gesamtheit der

stehen können, wohl aber gibt 4. eine Erklärung darüber, wa
Größen ein Verhältnis haben, wenn nämlich die kleinere von ih
nügend vervielfältigt, die größere an Größe übertrifft[1]) und Nr.
gibt sodann eine strenge Erklärung, wann zwei Verhältnisse
gleich sind und wann das eine größer ist als das andere (

Die Erklärung 3. ist, was wir heute das Stetigkeitsaxiom
dem in Buch X, 1. auch der Ausdruck gegeben wird: We
von einer Größe mehr als die Hälfte wegnimmt, von de
bleibenden wieder mehr als die Hälfte u. s. f., so kommt man
auf eine Größe, die kleiner ist als eine gegebene Größe. (Stat
als die Hälfte" könnte ein beliebiger Bruchteil genommen we

Daß es kommensurable und inkommensurable Größen gi
(nach unserem Sprachgebrauch) rationale und irrationale Verh
hat vermutlich schon Pythagoras deutlich erkannt. Euklid bew
X^ten Buch Nr. 9, daß die Seiten von Quadraten, deren Fläche
in dem Verhältnis von Quadratzahlen stehen, inkommensurab
Ein besonderer Fall wird in X. Nr. 117 noch einmal besond
zwei Arten behandelt, wenn bewiesen wird, daß die Diagona
Quadrats zu der Seite in irrationalem Verhältnis steht. Dieser
den schon Aristoteles andeutet, zeigt, daß es nicht zwei ganze
x, y ohne gemeinsamen Teiler geben kann, die der Bedingung 2
genügen; denn sonst müßte y gerade, also y^2 durch 4 teilbar sein
aber müßte x^2 durch 2 teilbar, also x gerade sein, was doc
möglich ist, da x und y keine gemeinschaftlichen Teiler haben

Hätte Euklid die Gesamtheit aller untereinander gleiche
hältnisse zu einer Idee (einem Gattungsbegriff) zusammengef
hätte er eine strenge Definition des allgemeinen Zahlbegriffs
nale und irrationale Zahl) gehabt. Dieser Gedanke aber lag
Anschauungsweise fern.[2]) Erst unsere Zeit hat bewußt solche
systeme gebildet, die als allgemeine Definition der Zahl be
werden können. Alle diese Begriffssysteme sind gleichberechti

wieder zu einen Gattungsbegriff zusammenfassen, der d
noch höheren Sinn den Zahlbegriff darstellen würde.
Begriffssystemen die hiernach als Repräsentanten des
zu betrachten sind, sind die wichtigsten und einfach
R. Dedekind und G. Cantor ausgebildeten, die beide vo
vorausgesetzten Begriff der rationalen Zahl ausgehe
(Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872)
griffssystem des Schnittes (im Gebiet der rationalen Za
(§ 22, 4.) und G. Cantor verwendet zu demselben Zwec
der Zahlenreihen (Math. Annalen 5). Verwandt mit
schen Zahlenreihen sind die von Méray zur Definition
zahlen geschaffenen Varianten (variantes).[1]) Näheres ü
ratur dieses Gegenstandes enthält der Artikel von Pri
„Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse“
klopädie der mathematischen Wissenschaften Band I.
gehender ist die Darstellung von J. Molk im ersten He
sischen Ausgabe der Encyklopädie.

Erwähnt sei noch, daß Kronecker den Begriff d
zahlen ganz verwirft und bestrebt ist, die gesamte Math
Gewand der ganzen Zahlen zu zwängen. Auf die Möglic
hat, wie Dedekind bemerkt, schon Dirichlet in Ge
gewiesen. Aber eben um die damit verbundenen groß
keiten zu vermeiden, hat die Wissenschaft, ausgehend vo
der ganzen Zahl, den Zahlbegriff, den jeweils auftauch
nissen entsprechend, in einer logisch einwandfreien Weis
erweitert und die Kroneckersche Auffassungsweise hat
bisher keine Nachfolger gefunden.

Freilich haben die Bestrebungen der Mengenlehre
allen Punkten zu befriedigender Klarheit geführt. Es sin
Zeit gewisse Zweifel und Bedenken aufgetaucht, die
spruchsvollen Begriff der „Menge aller Mengen“ anknü
vollständig geklärt sind. Es sind hierfür zu erwähnen d

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse.

---

§ 30. Meßbarkeit.

1. Wir haben nun die Frage zu erörtern, in welcher W Zahlbegriff, der, wie schon mehrfach hervorgehoben ist, e geistiger ist, auf die Dinge der Außenwelt angewandt wird. wendung der natürlichen Zahlen geschieht einfach du Zählen, wie schon im ersten Abschnitt auseinandergesetzt ist, wir hier nicht noch einmal zurückkommen wollen. Die gebr rationalen und die irrationalen Zahlen werden durch die Tä des Messens auf die Außenwelt angewandt.

Meßbar ist alles, was auf unsere Sinne Eindruck in versc Stärke macht, z. B. Lichtintensitäten, Temperaturen, Tonhöhe stärken, Gewichte, Härte, Schmerz u. s. w. Die unmittelbare wahrnehmung gestattet aber nur unbestimmte Schätzungen d oder Weniger. Exakte Messungen sind erst dann möglich, gelungen ist, diese Vorgänge mit Raum und Zeit derart in dung zu setzen, daß die Stärke des Eindrucks der Größe eine lichen und zeitlichen Veränderung entspricht, und dies g durch die Meßinstrumente. Bei den Raumgrößen haben wir dreierlei verschiedenartige zu unterscheiden: nämlich Längen,

Eine dritte Art von Grundgrößen sind die Massen, die wir du
e Wage messen, deren Maß also auf der Voraussetzung einer ri
gen Wage und unveränderlicher Massen beruhen.

Alle diese Voraussetzungen sind in der Wirklichkeit nicht ge
füllt, am besten wohl die erste, am wenigsten die letzte, und
eibt kaum etwas anderes übrig, als die idealen Maße au
ssen als eine Art von Mittelwerten, die sich durch Ausgleichu
r verschiedenen Abweichungen durch lange und vielfältige Erf
ng in unserer Vorstellung gebildet und zu Ideen verdichtet hab

2. Während im reinen Zahlenreiche selbst der Unterschied
n Größen nur eine willkürliche Schöpfung des Geistes ist, dem e
schauliche Bedeutung nicht beiwohnt, verbinden wir mit den m
ren Dingen der Außenwelt unmittelbar eine Vorstellung der Grö
ch dem Grad und der Stärke sinnlicher Eindrücke. Selbst
sdrücken wie „sehr groß", „sehr klein", „angenähert"
nden wir wenigstens eine ungefähre Vorstellung, indem wir e
ır klein solche Größen nennen, die wir nur mit Mühe oder
cht mehr durch unsere Sinne direkt oder mit Hilfe der Instrume
hrnehmen können.

Da keine Messung mit absoluter Genauigkeit ausgeführt wer
nn, auch unsere geometrischen Konstruktionen uns keine wirklic
nkte, Linien oder Flächen liefern, so genügen zur Darstellu
pirisch gegebener Größenverhältnisse die rationalen Zahlen; nirge
hier eine Nötigung zu weitergehenden Zahlenbildungen.

Gleichwohl können wir uns nicht wohl des Gedankens e
nlagen, daß z. B. die Diagonale eines Quadrates oder die Kr
ripherie eine ganz bestimmte Länge haben, die durch Zahlen a
ickbar sind; und ähnlich ist es bei Zeiträumen oder Gewicht
d wir sind geneigt anzunehmen, daß das ganze Zahlenreich in
eßbaren Dingen sein Äquivalent findet.[1])

3. Wir erblicken das Wesen der Meßbarkeit einer Me

2. Ist a irgend ein Element der Menge, so gibt es Elem kleiner sind als a (unbegrenzte Teilbarkeit).

3. Sind a, b zwei (gleiche oder verschiedene) Elemente, es ein drittes Element $c = a + b$ der Menge, das der Sun beiden Elemente gleich ist. Die Summe ist größer als je Summanden.

Für die Summenbildung gelten das kommutative assoziative Gesetz der Addition (§ 8).

4. Ist b kleiner als c, so gibt es ein bestimmtes Element a von der Beschaffenheit, daß $a + b = c$ ist.

5. Durch Wiederholung der Summenbildung aus m gleichen Elementen a gelangt man zu dem Begriff des Vi ma, worin m eine natürliche Zahl ist. Für die Vielfachen Axiom des Archimedes (Euklid):

Sind a und b irgend zwei Elemente der Menge, so gibt es ein Vielfaches ma von a, das größer ist als b. Es gibt also meßbaren Menge weder ein kleinstes noch ein größtes Eleme aus 2., 3., 4. folgt, daß es zwischen irgend zwei verschieden menten noch andere Elemente gibt. Endlich soll noch gelten

6. Ist a ein beliebiges Element der Menge und n eine na Zahl, so existiert ein Element b von der Beschaffenheit, daß ist. Dieses Element b heißt der n^{te} Teil von a und wird mit bezeichnet. Daß es nicht zwei verschiedene solche Elemente kann, ist eine leicht zu ziehende Folgerung aus den anderen setzungen. Denn ist $b' > b$, so ist $nb' = nb + n(b' - b)$ größer

Wir bezeichnen der Kürze wegen bisweilen die Gesamtl untereinander gleichen Elemente auch als ein Element.

§ 31. Verhältnisse.

1. Zwei Elemente a, b einer meßbaren Menge, zu den

Die Gleichung (1) bleibt bestehen, wenn die Eler demselben Multiplikator vervielfältigt oder durch dense teilt werden, und dasselbe gilt, wenn die Zahlen p, q meinschaftlichen Faktor multipliziert, oder wenn ein licher Teiler weggehoben wird. Das Verhältnis de bleibt daher ungeändert, wenn der numerische Wert d ungeändert bleibt, und man kann also die Verhältnisse und folglich auch die Verhältnisse irgend zweier k Elemente der meßbaren Menge den rationalen Brüch zuordnen. Man deutet dann die Gleichheit des Ver durch (1) auch durch die Gleichung

$$a : b = p : q \quad \text{oder} \quad a/b = p/q$$

an, und man nennt das Verhältnis a/b größer al $a'/b' = p'/q'$, wenn der Bruch p/q größer ist als p'/q'.

Man nennt a und b Zähler und Nenner des Ver $a = b$, so ist ihr Verhältnis $= 1$. Ist das Verhältnis p kann man von den beiden Elementen a, b eines noc nehmen. Denn ist z. B. p, q und b gegeben, so teile ment pb in q Teile, um das Element a zu erhalten, chung (1) genügt.

2. Hält man dieses eine Element b fest, so erhä Element a der Menge, das mit b kommensurabel ist, Zahl p/q zugeordnet, und das Element b selbst erhä Es heißt darum die Einheit einer Maßbestimmung. Einheit steht in unserer Willkür und wird durch Zw gründe bestimmt. Von größter Wichtigkeit aber ist für wissenschaftlichen Gebrauch, daß die Einheit unz niert sei und zu jeder Zeit unverändert wieder aufge kann. Freilich kann diese Forderung niemals mit ab erfüllt werden, aber es sind große Mittel aufgewandt nach Möglichkeit zu genügen.

Unsicherheit. Die republikanische Regierung in Frankreich h
das Meter als Längeneinheit eingeführt, das ursprünglich
zehnmillionste Teil des Erdquadranten definiert war, in Wirk
aber auf ein willkürliches, genau bestimmtes und sicher aufbe
Normalmeter gegründet wird. Für die meisten Kulturstaa
der im Jahre 1875 abgeschlossenen *internationalen Met*
vention beigetreten sind, ist das Meter jetzt die gesetzliche
einheit, die nach strenger Dezimalteilung weiter abgeteilt ist.

Auf die metrische Längeneinheit gründen sich die Einhei
Flächen- und für *Körpermaß*, deren Einheiten das *Quadra*
und das *Kubikmeter* oder deren dezimale Teile sind, und a
Masseneinheit wird darauf zurückgeführt, indem das Gramm
wird als Masse eines Kubikcentimeters reinen Wassers im
seiner größten Dichtigkeit.[1])

Auch *Winkel* bilden eine meßbare Menge eigener Art
Messung wird praktisch auf Längenmessung zurückgeführt,
auf die Ablesung an einem geteilten Kreise.

Sie haben aber ihre eigene Art Einheit, und zwar sind z
Winkeleinheiten in Gebrauch, eine für praktische Zwecke, die
mehr bei theoretischen Untersuchungen. Um die erstere zu ge
wird der ganze Kreis in 360 gleiche Teile, *Grade* genannt, geteil
Grad wird in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden weiter
Der rechte Winkel hat 90 Grad, der gestreckte Winkel 18(
Abkürzend bezeichnet man Grade, Minuten und Sekunden a
z. B. $57^0\ 17'\ 44{,}8''$, sprich 57 Grad, 17 Minuten, 44,8 Sekund

Die zweite Art der Winkeleinheit ist der Winkel, dessen
gleich dem Radius ist. Hierbei erhält der Winkel von 180 G
Maßzahl $\pi = 3{,}14159265\ldots$, nämlich die Länge der Kreisper
deren Durchmesser die Längeneinheit ist. Ein Winkel von einer
hat also die Maßzahl 0,017 453 292 5 und die Sekunde: 0,000 00
Die Maßzahl 1 erhält ein Winkel von $57^0\ 17'\ 44{,}8''$ oder 20

Seite, die negativen die Punkte auf der anderen Seite
punktes. Dies ist am einleuchtendsten bei Längenmaß
maß, wird aber auch bei Geschwindigkeiten, Kräften un
anderen angewandt. Man gewinnt dann den Vor
nicht nur die Addition, sondern auch die Subtraktion
führen läßt.

§ 32. Physikalische Maße.

1. Zunächst und unmittelbar können meßbare Di
Einheiten derselben Art gemessen werden, so Läng
Länge, Flächen durch eine Fläche, Zeiten durch eine Z
digkeiten durch eine Geschwindigkeit, elektrische Wid
einen elektrischen Widerstand, und im praktischen L
nicht auf den höchsten Grad der Genauigkeit ankommt
das Zweckmäßigste und Einfachste. Für die Wissensch
von größter Bedeutung, daß man nicht für jede die
meßbaren Größen, deren Zahl sich mit dem Fortschri
schaft noch vergrößert, eine besondere Maßeinhei
in gesichertem unverändertem Zustand aufbewahrt
und es ist darum ein großer Fortschritt in der neuere
es gelungen ist, alle diese Maße auf die drei Grundm
der Zeit und der Masse zurückzuführen.

Dies ist von Gauß für die magnetischen Maße
und ist in der neueren Elektrizitätslehre und in ihr
Anwendungen von großer Wichtigkeit geworden.

Eine Einheit irgendwelcher Art, die durch die
der Länge, der Zeit, der Masse ausgedrückt ist, heißt
Einheit, und der ganze Komplex dieser Maße das a
system.

Es wird am besten sein, dies an einigen Beispielen
die sich leicht vermehren ließen.

Die Geschwindigkeit wird verdoppelt, verdreifacht u. s. w. in derselben Zeit die doppelte oder dreifache Strecke zurü wird, oder wenn der Körper zur Durchlaufung der gleichen nur die Hälfte oder den dritten Teil der Zeit gebraucht.

Das Geschwindigkeitsmaß wird aber dadurch auf Rau Zeitmaß zurückgeführt, daß man eine solche Geschwindigk Einheit nimmt, bei der in der Zeiteinheit die Einh Weglänge zurückgelegt wird.

Ein Körper, der in der Zeit τ die Strecke λ zurücklegt, Geschwindigkeit λ/τ, und es erhält also die Division dieser be Zahlen hierdurch eine bestimmte Bedeutung, aber in einer Gr die von den beiden, der Länge und der Zeit, verschieden ist.

Die Art, wie die Wahl der Einheiten in die Bezeichnu genommen werden, zeigen die folgenden Beispiele. Nehmen ein Schnellzug legt in der Stunde einen Weg von 70 K zurück. Man schreibt dann: seine Geschwindigkeit ist

$$70 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Stunde}}$$

oder

$$70\,000 \frac{\text{Meter}}{\text{Stunde}} = 1167 \frac{\text{Meter}}{\text{Minute}} = 19{,}44 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}.$$

Ein Punkt des Erdäquators durchläuft bei der Umdreh Erde einen Weg, der gleich dem Umfang des Äquators, ang gleich 40 Millionen Meter ist. Seine Geschwindigkeit ist also

$$40\,000\,000 \frac{\text{Meter}}{\text{Tag}} = 463 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}.$$

Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt in der geograp Breite 52° 30′ (Berlin) oder 48° 35′ (Straßburg)?

Ein Fußgänger legt den Kilometer in 12 Minuten zurück. Geschwindigkeit ist also

Merkur	58	Millionen	Kilometer	88 Tag
Venus	108	„	„	225 „
Mars	227	„	„	688 „
Jupiter	777	„	„	4333 „

und wenn die Bahnen als Kreise betrachtet werden?

Die Geschwindigkeit des Schalles in trockner 331 Meter/Sekunden, während die Lichtgeschwindigkeit Meter/Sekunden beträgt.

3. *Beschleunigung.* Ein anfahrender Eisenbah sofort seine volle Geschwindigkeit, sondern erlangt sie nach Verlauf einer gewissen Zeit. Ebenso verliert er di keit beim Halten nicht plötzlich.

Ein zur Erde fallender schwerer Körper durchläu nicht überall mit derselben Geschwindigkeit, sondern di keit wächst allmählich mit der Tiefe. Hieraus entspri der Beschleunigung und Verzögerung einer Bewegung.

Als Einheit der Beschleunigung wird die Geschwindigkeit um die Geschwindigkeits-Ei Einheit der Zeit betrachtet.

Wenn ein Körper seine beschleunigte Bewegun schwindigkeit Null beginnt, und nach Verlauf der schwindigkeit v erlangt, so ist die Beschleunigung $v/$ dieser Zeit τ den Weg λ durchlaufen, so werden wi Geschwindigkeit verstehen müssen, die der Körper müßte, wenn er *ohne Beschleunigung* in der gle gleichen Weg durchlaufen haben würde. Diese ist abe aus der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Endges und wir erhalten also, wenn wir die Beschleunigung mi

(1) $$\tfrac{1}{2} v = \lambda/\tau, \quad g = 2\lambda/\tau^2.$$

Beginnt die Bewegung nicht mit der Geschwindig dern mit der Geschwindigkeit v_0, so ist

Um die Weglänge für zwei Sekunden zu ermitteln, hat den Formeln (1) $\tau = 2$ zu setzen, und erhält also einen Weg v 19,6 Meter. Also ist der Weg in der zweiten Sekunde 14,

Die Beschleunigung nimmt mit wechselnder Höhe über oberfläche ab, und zwar gilt dabei das Newtonsche Gese die Beschleunigung an zwei Stellen im umgekehrten Ver zu den Quadraten der Abstände vom Erdmittelpunkt d. h. sind g, g_1 die Beschleunigungen der Schwere an zwei in den Entfernungen r, r_1 vom Erdmittelpunkt, so ist

$$g : g_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2} = r_1^2 : r^2.$$

Wie groß würde die Beschleunigung in der Entfernung des sein, wenn die Entfernung des Mondes von der Erde zu 52 (Länge des Erdradius zu 858,5 Meilen angenommen wird? (das Verhältnis r_1/r vorkommt, so kommt es hierbei nicht gewählte Längeneinheit an.)

$$g_1 = 9{,}8 \cdot \frac{858{,}5^2}{52\,000^2} = 0{,}0027 \text{ Meter/Sek}^2$$
$$= 0{,}27 \text{ Zentimeter/Sek}^2.$$

4. Kraft. Als Masseneinheit wird die Masse eines zentimeter reinen Wassers benutzt und „Gramm" genannt. Masse hat dann den Zahlenwert m, wenn sie auf einer W Masse von m Kubikzentimetern Wasser das Gleichgewicht häl

Von der Masse ist wohl zu unterscheiden das Gewicht, w man das Produkt mg aus der Masse mit der Beschleu der Erdschwere versteht.

Während also die Masse eines Körpers etwas an allen Gleichbleibendes ist, hängt sein Gewicht von dem Ort ab, der Körper sich befindet. Es nimmt ab mit der Entfernu der Erdoberfläche und nimmt zu mit der geographischen Brei

Beispiel. Wie groß ist, in Dynen ausgedrückt, die Erde auf den Mond ausübt?

Das Volumen der Erde beträgt etwa

$$1083 \cdot 10^{24} \text{ Kubikzentimeter}^{1}),$$

und diese Zahl würde also die Erdmasse in Gramm a sie nur aus Wasser bestände. Nun ist aber die mittl der Erde etwa 5,5 mal so groß als die des Wassers, der Erde ist tatsächlich 5,5 mal so groß, als wenn Wasser bestände, also etwa gleich

$$6 \cdot 10^{27} \text{ Gramm.}$$

Die Masse des Mondes ist etwa der 80te Teil von Erde, und also ungefähr gleich

$$75 \cdot 10^{24} \text{ Gramm.}$$

Diese Zahl hat man mit der in Zentimeter und S gedrückten Beschleunigung der Erdschwere in der E Mondes, also mit 0,27 zu multiplizieren, um die Zahl

$$2025 \cdot 10^{22}$$

für die Anzahl der Dynen zu erhalten, mit der die Mond wirkt.

Man kann auch eine Kraft direkt mit einem Gewic Man hat dann als Einheit der Kraft das Gewicht ei an der Oberfläche der Erde, etwa in der mittleren Breite von 45°, wo die Beschleunigung der Schwere

$$g_0 = 981 \text{ Zentimeter/Sekunden}^2$$

ist, anzunehmen, und erhält für die Kraft, die einer Beschleunigung g erteilt, den Zahlenwert mg/g_0, durch im Gramm ausgedrückt ist.

So erhält man z. B. das Gewicht des Mondes i gedrückt, wenn man die Zahl $2025 \cdot 10^{22}$ durch 981

§ 33. Inkommensurable Größen.

1. Den bisherigen Betrachtungen und Definitionen lag die setzung zugrunde, daß die zueinander in ein Verhältnis g Größen kommensurabel und ihre Verhältnisse daher rationa und für praktische Zwecke ist diese Annahme auch ausr Jetzt aber müssen wir noch einen Schritt weiter gehen un irrationale Verhältnisse betrachten.

Nach dem Begriff der Meßbarkeit ist, wenn e irgend ein I einer meßbaren Menge und r eine positive rationale Zahl gleichfalls ein bestimmtes Element derselben Menge. Ist nun a ein Element dieser Menge, so erhalten wir einen Schnitt R/R' (§ wenn wir alle Zahlen r, für die $re < a$ ist, zu R und alle Za für die $r'e > a$ ist, zu R' rechnen, wobei eine Zahl r, für die ist, wenn sie existiert, nach Belieben zu R oder zu R' ge werden kann. Durch diesen Schnitt R/R' ist nun eine all Zahl α definiert, und diese Zahl ordnen wir dem Element a z setzen $\alpha e = a$, und nennen α die Maßzahl des Elementes a. Zahl ändert sich natürlich, wenn das Element e, das die dieser Maßbestimmung darstellt, geändert wird. Ist $\beta e =$ anderes Element derselben Menge, und ist $a < b$, so ist auch

Daß es zu jedem Paar a, e einer meßbaren Menge eine bes Maßzahl α gibt, ist hiernach eine Folgerung aus den Vorausset durch die wir die Meßbarkeit definiert haben; daß es aber au gekehrt bei gegebenem e zu jeder Zahl α ein bestimmtes I a gibt, dessen Maßzahl α ist, ist eine neue Voraussetzung, vermöge einer Art innerer Anschauung zu machen geneigt sin die wir von jetzt an machen wollen, die wir als die Stetigk Menge bezeichnen.

Eine sinnliche Vorstellung kann mit diesem Begriff der St nicht verbunden werden, und keine äußere Erfahrung kann

Wenn nun immer, welche Zahlen m, n man a
mag, gleichzeitig auch

(2) $$mA < nB, \quad mA = nB, \quad mA > nB$$

ist, so hat a dasselbe Verhältnis zu b wie A zu
Wir bezeichnen dies durch die Gleichung

(3) $$a : b = A : B.$$

Wir bemerken noch, daß hierbei die Elemente
Menge im absoluten Sinn (als positive Größen) zu
Es ergibt sich hieraus:

Das Verhältnis zweier positiver Zahlen α und
dem Verhältnis der Zahl α/β zu der Zahl 1, als

(4) $$\alpha : \beta = \alpha/\beta : 1.$$

Denn aus

$$m\alpha \lesseqgtr n\beta$$

folgt durch Division mit β:

$$m\frac{\alpha}{\beta} \lesseqgtr n \cdot 1.$$

Wir betrachten also die Zahl α/β als Maß für das
Zahlen α und β und für alle diesem gleichen Verhältn

3. Das Verhältnis zweier Elemente a, b ein
Menge ist gleich dem Verhältnis ihrer Maßzahle
nämlich

(5) $$m\alpha < n\beta$$

ist, so kann man zwischen $m\alpha$ und $n\beta$ zwei rationa
schieben, die man in der Form mr, ns annehmen ka
so, daß

(6) $$m\alpha < mr < ns < n\beta.$$

also

(9) $$m\alpha < n\beta.$$

Ebenso kann man zeigen, daß die beiden Ungleichungen n
und $m\alpha > n\beta$ stets miteinander verbunden sind, woraus dan
folgt, daß auch $ma = nb$ immer $m\alpha = n\beta$ zur Folge h
umgekehrt.

Hiernach ist der Quotient α/β auch das Maß für das Ve
von a zu b und ist von der Wahl der Einheit e unabhängi
den Maßzahlen kann man rechnen wie mit allen Zahlen; es fr
aber, welche Bedeutung man den Ergebnissen dieser Rechnu
zulegen hat.

Der Addition und der Subtraktion pflegt man nur da
Bedeutung beizulegen, wenn die Maßzahlen derselben meßbaren
angehören; man wird z. B. nicht Zeiträume und Längen addier
subtrahieren. Beziehen sich aber beide Maßzahlen auf diesel
heit, z. B. die Längeneinheit, so gibt ihre Summe und ihre D
die Maßzahl für die Summe und Differenz der gemessenen G
der gleichen Einheit.

Dies folgt bei rationalen Maßzahlen aus den Bestimmun
§ 30 und für irrationale aus der vorausgesetzten Stetigkeit.

Das Produkt von Maßzahlen gibt die Maßzahlen in eine
Menge, deren Einheit als das Produkt der Einheiten der
Faktoren definiert wird, und ebenso ist es bei den Quotient
ist das Produkt zweier Längen ein Flächenmaß, das Produkt
Längen ein Körpermaß, der Quotient einer Länge durch ei
ist eine Geschwindigkeit. Der Quotient zweier Maßzahlen de
Menge ist aber ein Verhältnis und als solches eine reine Za

§ 34. Proportionen.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Maßzahlen von $a, b, c, d,$ s
aus (1) eine Zahlenproportion:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \tag{2}$$

oder eine Gleichung:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \tag{3}$$

und aus den arithmetischen Folgerungen aus dieser G
man entsprechende Folgerungen über die a, b, c, d zie

Wenn von den vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ drei beliebig
so ist die vierte eindeutig bestimmt. Daraus folgt, d
Voraussetzung zu jeder Maßzahl eine bestimmte n
gehört:

Wenn von den vier Gliedern einer Propor
liebig gegeben sind, so ist das vierte dadur
bestimmt.

2. Aus (3) ergeben sich nach den Regeln der
Gleichungen:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma +}{\gamma -}$$

und demnach ergeben sich aus der Proportion (1)
Proportionen:

$$\begin{aligned} (a+b) : b &= (c+d) : d, \\ (a-b) : b &= (c-d) : d, \\ (a+b) : (a-b) &= (c+d) : (c-d). \end{aligned} \tag{4}$$

Vorausgesetzt ist hierbei, daß $a - b$ und folglich auch $c -$

3. Aus (3) folgt $\alpha/\gamma = \beta/\delta$. Hieraus läßt sich
ein Schluß über die a, b, c, d ziehen, wenn a und c
zueinander haben, d. h. wenn die vier Elemente a
selben Menge angehören. Unter dieser Voraussetz

wenn a, b beliebig gegeben sind, ihre mittlere Proport
bestimmen? Kann man also ein Element x finden, das d

(7) $$a : x = x : b$$

genügt? Selbstverständlich ist das nur möglich, wenn
selben Menge angehören. Dann aber ergibt sich, wer
Maßzahlen von a, b, x sind, aus (7)

$$\frac{\alpha}{\xi} = \frac{\xi}{\beta}, \quad \xi^2 = \alpha\beta.$$

Man setze also $\xi = \sqrt{\alpha\beta}$, wodurch die Zahlenproportion

(7') $$\alpha : \xi = \xi : \beta$$

befriedigt ist. Hieraus aber folgt (7). Die Bestimmung
Proportionale führt also auf eine Quadratwurzel.

Wenn a und b Längen sind, so ist die mittlere
die Seite eines Quadrates, das dem aus den Seiten c
struierten Rechteck flächengleich ist.

5. Diese Aufgabe läßt sich folgendermaßen erweiter
die beiden Größen x, y so bestimmt werden, daß

(8) $$a : x = x : y = y : b.$$

Nennen wir die Maßzahlen α, ξ, η, β, so ergibt sich

(9) $$\alpha : \xi = \xi : \eta = \eta : \beta,$$

und aus dieser Proportion folgt

(10) $$\alpha\eta = \xi^2, \quad \beta\xi = \eta^2, \quad \alpha\beta = \xi\eta,$$

also

(11) $$\alpha^2\beta = \xi^3, \quad \alpha\beta^2 = \eta^3;$$

man hat also

(12) $$\xi = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}, \quad \eta = \sqrt[3]{\alpha\beta^2},$$

6. Der goldene Schnitt. Es soll eine gegeb
so in zwei Teile x und $a - x$ geteilt werden, daß der
$a - x$ sich zum größeren x so verhält, wie der größe
ganzen Strecke. Es soll also die Proportion

(13) $$(a - x) : x = x : a,$$

oder, wenn α, ξ die Maßzahlen von a und x sind,
$\xi^2 = \alpha(\alpha - \xi)$ oder:

$$\xi(\xi + \alpha) = \alpha^2$$

bestehen. Schreibt man dies so:

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha^2,$$

so folgt nach der Formel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\alpha^2$$

und daraus

(14) $$\xi + \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}\,\alpha}{2}.$$ [1]

Bei der Wahl der Beispiele dieses Abschnittes h
Teil Begriffe und Sätze benutzt, die erst in den späten
über Geometrie und Mechanik genauer erörtert werden

---

angewiesen worden sein, einen Altar des Apollo, der Würfelgest
doppeln. Eine geometrische Lösung des Problems wird Plat
Näheres über die Sage und die Geschichte des Problems s. Cant

1) Der „goldene Schnitt", wie ihn eine spätere Zeit genan
den Pythagoräern eine mystische Bedeutung. In der griechisch
er als dem Auge besonders wohlgefälliges Verhältnis vielfache
funden haben. Eingehend ist die ästhetische Bedeutung des g
in dem unter Lionardo da Vincis Einfluß und Mitwirku
Werke „Divina Proportione" von Luca Paciuolo (1509) behand
Literatur über den goldenen Schnitt ist noch zu erwähnen:
Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers a
unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdring
logischen Grundgesetz entwickelt. Leipzig 1854. Dieses Gru

Sechster Abschnitt.

Potenzen und Logarithmen.

---

§ 35. Wurzeln.

1. Ist p eine natürliche Zahl und a eine beli
tive Zahl, so gibt es eine und nur eine positive
der Bedingung

$$x^p = a$$

genügt.

Daß es nicht mehr als eine solche Zahl geben ka
Folge des Satzes von den Potenzen, daß x^p mit x zug
Es kann also, wenn x von y verschieden ist, nicht $x^p =$

Um die Existenz einer Zahl x nachzuweisen, bild
Schnitt X/X', indem wir alle Zahlen, deren p^{te} Potenz
oder gleich a ist, zu X, die deren p^{te} Potenz größer als
rechnen. Es sind dann alle Zahlen in X oder in X' u
und wenn x die durch diesen Schnitt erzeugte Zahl ist, s

Denn wäre $x^p < a$, so müßte es nach dem Satze vo
keit (§ 26, 5) auch Zahlen in X' geben, deren p^{te} Po

Die dritte Wurzel wird Kubikwurzel genannt. Allg
die Zahlen $\sqrt[p]{a}$ auch Radikale.

2. Für das Rechnen mit Radikalen gelten die be

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}, \quad \sqrt[p]{a}/\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a/b},$$

oder in Worten ausgesprochen:

Um zwei Radikale gleichen Grades p zu mu
oder zu dividieren, multipliziert oder dividie
Radikanden und nimmt die p^{te} Wurzel aus de
oder dem Quotienten.

Es ergibt sich dies einfach aus dem kommutative
Multiplikation, wonach $(\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b})^p = (\sqrt[p]{a})^p(\sqrt[p]{b})^p = ab$ ist.

Für die Addition und Substraktion gibt es keine
Regeln.

Über die Größenbeziehungen der Wurzeln gelter
den Sätze:

3. Ist $a > b$, so ist $\sqrt[p]{a} > \sqrt[p]{b}$, oder in Worten: I
wächst mit dem Radikanden.

Denn wäre $\sqrt[p]{a} \overline{\gtrless} \sqrt[p]{b}$, so wäre auch $\sqrt[p]{a}^p \overline{\gtrless} \sqrt[p]{b}^p$, d.
Die $\sqrt[p]{1}$ ist gleich 1, folglich, wenn $a > 1$ ist, auch

4. Ist $a > 1$ und $p > q$, so ist

$$\sqrt[p]{a} < \sqrt[q]{a},$$

d. h.: Ist der Radikand größer als 1, so ist auch die V
als 1, nimmt aber mit wachsendem Wurzelexponenten a

5. Ist $a < 1$ und $p > q$, so ist $1 > \sqrt[p]{a} > \sqrt[q]{a}$, d
Radikand kleiner als 1, so ist auch die Wurzel k
nimmt aber mit wachsendem Wurzelexponenten

Alle diese Sätze sind leicht aus § 19 zu beweisen.
nämlich, wenn a und folglich nach 3. auch $\sqrt[q]{a}$ größer als
$p > q$ ist, $(\sqrt[p]{a})^p > (\sqrt[p]{a})^q$, d. h. $a > (\sqrt[p]{a})^q$ und folglich $\sqrt[q]{a} > \sqrt[p]{}$
der Satz 4. behauptet, und dies braucht man nur auf den rez
Wert von a anzuwenden, um den Satz 5. zu erhalten.

Nun ist aber, wenn c_1 kleiner und c_2 größer als 1 is
§ 19, 8. für jeden hinlänglich großen Exponenten p, was
sein mag,

$$c_1^p < a < c_2^p,$$

und daraus ergibt sich 6. nach 3.

§ 36. Allgemeine Theorie der Potenzen.

1. Der Nachweis der Existenz der Wurzeln eröffnet
den Weg, die Potenzen, die wir in § 19 für positive und
ganzzahlige Exponenten erklärt haben, auch für gebrochene u
irrationale Exponenten zu definieren.

Es war eine aus dem Begriff der Potenz abgeleitete For

(1) $$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn},$$

und es war immer

(2) $$\alpha^{-m} = 1 : \alpha^m, \quad \alpha^0 = 1,$$

worin m und n positive oder negative ganze Zahlen sein
und α ebenfalls eine beliebige Zahl war, die wir jetzt, um an
daß sie auch irrational sein kann, mit griechischem Buchs
zeichnen.

Es fragt sich nun, was sollen wir unter α^μ verstehen
eine gebrochene Zahl, $\mu = p/q$ ist?

Wollen wir hierbei große Komplikationen vermeiden, s

Nach dieser Definition ist für jeden Exponenten μ

(6) $$1^\mu = 1.$$

Wir haben nun für die verallgemeinerten Potenz
den Sätze:

2. Es ist

(7) $$\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^\mu \alpha^\nu,$$

(8) $$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}.$$

Setzen wir nämlich

$$\mu = \frac{m}{p}, \quad \nu = \frac{n}{q},$$

so ist, wenn p, q positiv angenommen werden,

$$(\alpha^{\mu+\nu})^{pq} = \alpha^{mq+np} = \alpha^{mq}\alpha^{np},$$

und folglich, indem man die pq^{te} Wurzel zieht,

$$\alpha^{\mu+\nu} = \sqrt[pq]{\alpha^{mq}\alpha^{np}} = \alpha^\mu \alpha^\nu.$$

Dadurch ist (7) bewiesen. Ebenso ist

$$((\alpha^\mu)^\nu)^q = (\alpha^\mu)^n = \alpha^{n\mu} = \sqrt[p]{\alpha^{mn}}$$

und

$$(\alpha^{\mu\nu})^q = (\alpha^\mu)^n = \sqrt[p]{\alpha^{mn}},$$

und hieraus ergibt sich, indem man die q^{te} Wurzel zieht,

3. Ist $\alpha > 1$ und $\mu > \nu$, so ist

(9) $$\alpha^\mu > \alpha^\nu.$$

Denn es ist

$$(\alpha^\mu)^{pq} = \alpha^{mq}, \quad (\alpha^\nu)^{pq} = \alpha^{np},$$

und wenn $\mu > \nu$ ist, so ist $mq > np$, folglich

$$(\alpha^\mu)^{pq} > (\alpha^\nu)^{pq},$$

und daraus die Formel (9).

5. Ist $\alpha > 1$ und sind a, a' untere und obere
von α, sind ferner c_1 und c_2 zwei der Bedingung

$$c_1 < \alpha^\mu < c_2 \tag{11}$$

genügende Zahlen, so ist, wenn $a' - a$ hinlänglich kle

$$c_1 < a^\mu < a'^\mu < c_2. \tag{12}$$

Man hat nämlich, um dies zu erreichen, a und
zunehmen, daß

$$c_1^{1/\mu} < a < \alpha < a' < c_2^{1/\mu}$$

wird.

6. Nun läßt sich auch leicht eine Potenz mit
Exponenten erklären. Es sei ξ also eine Irrationalz
den Schnitt X/X' erzeugt wird, und x, x' seien die Zah
Es sei ferner α eine positive Zahl, die wir größer
setzen wollen. Es ist dann immer $x < x'$ und folglich

$$\alpha^x < \alpha^{x'}. \tag{13}$$

Daraus folgt, daß die Zahlenmengen α^x eine obere,
Grenze haben und diese beiden Grenzen können nicht
sein. Bezeichnen wir nämlich diese Grenzen mit β un
β' nicht kleiner als β sein. Denn es gibt immer Zahl
α^x der Grenze β, und Zahlen x', für die $\alpha^{x'}$ der Gren
nahe kommt. Wäre also $\beta > \beta'$, so könnte man x, x'
daß $\alpha^x > \alpha^{x'}$ wäre, was der Formel (13) widerspricht.

Wäre aber $\beta < \beta'$, also β'/β ein unechter Bruch, s

$$1 < \beta'/\beta < \alpha^{x'-x},$$

wie auch x, x' gewählt sind. Das aber ist nach 4. u
$x' - x$ beliebig klein werden kann.

Wir verstehen also unter

Zunächst ist nämlich, nach dem Begriff der Grenz

$$c_1 < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < c_2,$$

sobald $x' - x$ unter eine hinlänglich kleine Zahl her ist. Dann aber kann man nach Nr. 5 $a' - a$ so klein

$$c_1 < a^x < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < a'^{x'} < c_2,$$

und hierin ist der Beweis des Satzes enthalten.

8. Hiernach läßt sich der Fundamentalsatz von (§ 26, 5.) dahin erweitern, daß in der Rechenvorschrift auch Potenzen von positiver Basis mit irrationalen Ex kommen dürfen, und hieraus folgt weiter, daß alle S über Potenzen mit rationalen Exponenten kennen geler für irrationale Exponenten richtig bleiben.

§ 37. Logarithmen.

1. Nach dem, was wir im vorigen Paragraphen b läßt sich, wenn a eine positive und x eine belieb die positive Zahl y durch die Gleichung

$$y = a^x$$

eindeutig definieren. Ebenso läßt sich, wenn x und Zahl y gegeben sind, a durch

$$a = y^{1/x}$$

eindeutig bestimmen. Naturgemäß erweitert sich die durch die folgende Frage:

Wenn a und y gegebene positive Zahlen sin man x? Oder in Worten: Zu welcher Potenz positive Zahl a erheben, um die gegebene pos zu erhalten?

wendbar. Wir nehmen, was an sich nicht nötig wäre, die
größer als 1 an. Da unter dieser Voraussetzung a^x für pos
größer, für negative x kleiner als 1 ist, und da überdies a^{-x}
ist, so folgt, daß unechte Brüche positive, echte B
negative Logarithmen haben, und daß zwei zueinander
proke Zahlen y und $1/y$ entgegengesetzt gleiche
rithmen haben.

2. Daß für gegebene y und a immer ein Logarithmus e
können wir wieder mit Hilfe des Schnittes nachweisen. W
einigen alle Zahlen x, für die $a^x < y$ ist, in ein System
die Zahlen x', für die $a^{x'} > y$, in ein System X'. Dann is
x' größer als jedes x, und wir haben einen Schnitt X/X',
Zahl ξ definiert. Wäre nun a^ξ größer als y, so müßte es
geben, für das $y < a^x < a^\xi$ wäre, was der Definition des x
spricht, und ebenso kann a^ξ nicht kleiner als y sein, und m
lich gleich y sein.

Es hat daher jede positive Zahl y für eine von
schiedene positive Basis einen und nur einen Logar

3. Die Grundformeln für die Rechnung mit Logarith
geben sich aus den entsprechenden Formeln für die Potenzen
setzen wir in die Form:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}, \quad a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}, \quad a^{\mu x} = (a^x)^\mu,$$

worin x, x_1, x_2, μ beliebige positive oder negative ration
irrationale Zahlen bedeuten können. Setzen wir also

$$a^x = y, \quad a^{x_1} = y_1, \quad a^{x_2} = y_2,$$

so können auch y, y_1, y_2 beliebige, aber nur positive Zah
und wir haben

$$x = \log y, \quad x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2,$$

In Worten lassen sich diese Formeln so ausdrücken:

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Sum
r Logarithmen der Faktoren.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Dif
ız des Logarithmus des Dividenden und des Logarithm
s Divisors.

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produl
s Exponenten mit dem Logarithmus der Basis.

4. Sind a und b zwei positive Zahlen, so ist nach der D
ion des Logarithmus

$$a = b^{\overset{b}{\log} a},$$

glich, wenn x beliebig, y positiv ist:

$$a^x = b^{x \overset{b}{\log} a} = y$$

er

$$x = \overset{a}{\log} y, \quad x \overset{b}{\log} a = \overset{b}{\log} y$$

o:

$$\overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log} a \overset{a}{\log} y.$$

ese Formel vermittelt den Übergang von einer Basis a zu ei
dern Basis b.

Multipliziert man die Logarithmen aller positiven Zahl
r die Basis a mit einem und demselben Faktor $\overset{b}{\log} a$,
hält man die Logarithmen derselben Zahlen für die Basi

5. Wenn $y = a^x$, also x der Logarithmus von y ist, so wir
ch der Numerus (Zahl) von x (für die Basis a) genannt, so
le der beiden Gleichungen

$$x = \overset{a}{\log} y, \quad y = \overset{a}{\text{num}}\, x$$

s der andern folgt. Die Basis a wird, wenn sie sich aus

ischen Erweiterung der Potenzen und deren Umkehrung entwick
ondern, was freilich im Prinzip auf dasselbe hinauskommt, aus
ergleichung einer arithmetischen mit einer geometrischen Progressi

Unter einer arithmetischen Progression versteht man e
ufeinanderfolge von Zahlen, in der jede folgende Zahl aus der vor
egangenen durch Hinzufügung einer und derselben Zahl, die
)ifferenz der arithmetischen Progression genannt wird, entste
ine geometrische Progression ist eine Zahlenfolge, in der je
olgende Glied aus dem vorangegangenen durch Multiplikation
inem und demselben Faktor, dem Quotienten der geometrisch
rogression, entsteht.

2. Betrachten wir z. B. die folgende kleine Tabelle, bei der
er ersten Reihe die natürlichen Zahlen stehen, die eine arithmetisc
rogression bilden, während die entsprechenden Stellen der zweit
eihe durch die aufeinander folgenden Potenzen von 2, die ei
eometrische Progression bilden, ausgefüllt sind:

.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

,

haben wir hier eine Logarithmentafel mit der Basis 2. In d
sten Zeile steht der Logarithmus der darunter stehenden Za
an kann diese z. B. so verwenden: Um das Produkt $8 \cdot 64$ zu finde
ldiere man die Logarithmen 3 und 6 von 8 und 64 und erhält
ozu der Numerus 512 gehört.

Diese Tafel kann man auch nach der linken Seite hin fortsetze

)

-4	-3	-2	-1	0	1
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

,

ch nicht genau, so doch mit großer Annäherung, in der ari
tischen und in der geometrischen Progression vorkommt.

Bezeichnet Δ eine kleine Größe, so lasse man die Zahlen
thmetischen und geometrischen Progression in folgender We
ander entsprechen:

$$0, \quad \Delta, \quad 2\Delta, \quad 3\Delta, \quad 4\Delta, \quad 5\Delta, \cdots,$$
$$1, \quad 1+\Delta, \quad (1+\Delta)^2, \quad (1+\Delta)^3, \quad (1+\Delta)^4, \quad (1+\Delta)^5, \cdots.$$

de positive Zahl liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Glied
: ersten Reihe und ist also in dieser Reihe bis auf einen Feh
n $\frac{1}{2}\Delta$ enthalten, und jede Zahl, die größer ist als 1, ist zwisc
ei Zahlen der zweiten Reihe gelegen, also etwa zwischen $(1+$
d $(1+\Delta)^{n+1}$ und das Maximum des Fehlers ist hier also

$$\frac{1}{2}\left((1+\Delta)^{n+1}-(1+\Delta)^n\right)=\frac{1}{2}\Delta(1+\Delta)^n,$$

rd also um so größer, je größer die Zahl selbst ist.

Um zwei Zahlen der zweiten Reihe

$$a=(1+\Delta)^m, \quad b=(1+\Delta)^n$$

multiplizieren, addiert man die entsprechenden Zahlen der ers
ihe

$$\alpha=m\Delta, \quad \beta=n\Delta,$$

d sucht die der Summe $\alpha+\beta=(m+n)\Delta$ entsprechende Z
$=(1+\Delta)^{m+n}$ der zweiten Reihe auf.

Man kann auch statt der steigenden eine fallende geometris
ogression berechnen $1,\ 1-\Delta,\ (1-\Delta)^2,\ (1-\Delta)^3, \ldots,$ erhält a
nn nur Zahlen, die kleiner als 1 sind.[1])

4. Setzt man

$$a=(1+\Delta)^m, \quad \alpha=m\Delta,$$

ist

$$a=(1+\Delta)^{\frac{\alpha}{\Delta}}$$

Nach der Neperschen Tafel ergibt sich für diese Basis der Lo ithmus von 2 gleich 0,693 146 922, während nach neueren Ta er sogenannte natürliche Logarithmus von 2, d. h. der Lo ithmus von 2 für die Basis

$$e = 2{,}718\,281\,828\,46$$

ich fast genau ebenso, nämlich 0,693 147 180 ergibt. Die Basis Teperschen Logarithmen stimmt also sehr nahe mit der Zahl e über

§ 39. Briggische Logarithmen.

1. Man kann noch auf eine andere Weise zwei aufeinander ogene Zahlenreihen einer arithmetischen und geometrischen P ression ergänzen. Hat man für eine beliebige Basis die Logarithm weier Zahlen:

.) $$x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2,$$

folgt nach § 37

) $$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \log \sqrt{y_1 y_2}.$$

ie Zahl $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ nennt man das arithmetische Mittel d eiden Zahlen x_1, x_2, und $\sqrt{y_1 y_2}$ das geometrische Mittel der (p iven) Zahlen y_1, y_2, und wir können den Inhalt der Formel (ich so aussprechen:

Das arithmetische Mittel der Logarithmen zweier Za n ist der Logarithmus des geometrischen Mittels der be n Zahlen.

Ist $x_1 < x_2$, so ist auch $y_1 < y_2$ und es ist zugleich

$$x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2,$$

Auf diese Weise kann man eine Logarithmentafel für eine
bige Zahl als Basis konstruieren und es war zuerst Henry Brig
Zeitgenosse und Freund Nepers, der die großen Vorzüge
sis 10 erkannt und eine Tafel dafür berechnet hat (gedruckt 16
d 1624). Daher werden diese Logarithmen auch die Briggisch
garithmen genannt. Der Vorzug dieser Basis besteht aber
gendem:

Wenn eine im dekadischen Ziffernsystem dargestellte Zahl,
eine ganze Zahl oder ein Dezimalbruch, mit m Ziffern (vor d
mma) geschrieben wird, so liegt sie ihrer Größe nach zwisc
$^{m-1}$ und 10^m und folglich liegt ihr Briggischer Logarithmus zwisc
-1 und m (die untere Grenze $m-1$ eingeschlossen).

Man kann also sofort die Ganzen des Logarithmus, d. h.
hl vor dem Komma angeben, indem man die Stellenzahl des N
rus vor dem Komma um 1 vermindert. Diese Zahl heißt
arakteristik oder auch die Kennzahl und ist in den gebräu
hen Tafeln nicht mit angegeben. Die nach dem Komma folgen
zimalstellen werden die Mantisse des Logarithmus genannt. Di
det man in den Tafeln allein angegeben. Wenn man umgeke
s der Tafel zu einem gegebenen Logarithmus den Numerus
tteln will, so sucht man die Mantisse in der Tafel auf und erl
e zugehörige Zahl, von der man eine Stelle mehr vor das Kom
setzen hat, als die Charakteristik angibt. Zahlen, die kleiner
sind, also Zahlen, die, dekadisch geschrieben, nur eine Null
n Komma haben, haben negative Logarithmen. Um aber nur
sitiven Zahlen zu rechnen, nimmt man die Mantisse immer pos
d nur die Kennziffer negativ, d. h. man multipliziert eine sol
t gebrochene Zahl mit einer geeigneten Potenz von 10 und
nn von der als Logarithmus gefundenen Zahl den Exponenten die
tenz von 10 zu subtrahieren.

Es ist also z. B.

Anwendungen der Logarithmen der Gebrauch 10stelliger Tafeln nic notwendig ist, und so sind die siebenstelligen Tafeln die verbreitetst geworden. Solche Tafeln sind von Vega (1793) herausgegeben u seitdem, später in der Bearbeitung von Hülsse, in sehr vielen A lagen verbreitet. Später hat man gefunden, daß für viele Zweck besonders auch in der blos die Übung bezweckenden Anwendung Schulunterricht, aber auch in naturwissenschaftlichen Anwendunge die keine große Genauigkeit gestatten, selbst sieben Stellen noch viel und zu unhandlich sind, und hat Tafeln mit 6, mit 5 und selb mit 4 Stellen konstruiert. Unter den zahlreichen Werken dieser A die zum Teil auch Erleichterung des Gebrauches durch die inne Anordnung und den Druck zu erreichen suchen, mögen hier erwäh sein die Tafeln von Schrön, Bremiker, Wittstein, Grev F. G. Gauß, Heyer, Schülke.

Es kommen aber, nicht bloß in den Naturwissenschaften, b sonders der Astronomie, sondern auch in zahlentheoretischen Unte suchungen Fälle vor, in denen selbst die siebenstelligen Tafeln nic ausreichen, und es ist darum für den Mathematiker notwendig, sic auch einige Übung in dem Gebrauch größerer Tafeln zu erwerbe Unter diesen ist wohl die wertvollste und verhältnismäßig leicht z gänglich der „Thesaurus logarithmorum" von Vega, der 179 in Leipzig erschienen ist, der eine vollständige 10stellige Tafel d briggischen Logarithmen, außerdem aber die Tafeln von Wolfra enthält, in denen die natürlichen Logarithmen der Zahlen bis z 10009 auf 48 Dezimalstellen gegeben sind.

Da man jede ganze Zahl als Produkt aus Primzahlen darstelle kann, so läßt sich jeder Logarithmus einer ganzen Zahl durch Additio den Logarithmen von Primzahlen finden, und wenn man daher d Zerlegung der Zahlen in ihre Primfaktoren als bekannt voraussetze darf, so genügt eine Tafel, in der nur die Logarithmen der Prim zahlen verzeichnet sind. Von dieser Vereinfachung, die freilich de

§ 40. Interpolation.

1. Jede der verbreiteten Logarithmentafeln gibt in der Ei eine Anweisung über den Gebrauch, und manche kleine Vorte man erst in der Anwendung und durch Übung kennen. Es ein Punkt von allgemeinerer Bedeutung, den wir hier etv gehender besprechen müssen, das ist die sogenannte Interpo

Die siebenstelligen Tafeln z. B. enthalten direkt die M der Logarithmen aller Zahlen bis zu 99 999, also aller fünfst Zahlen bis auf sieben Dezimalen.

Handelt es sich aber um die Auffindung des Logarithmu siebenstelligen Zahl, so findet man diesen aus der Tafel nu direkt, wenn die beiden letzten Ziffern Nullen sind. Vo siebenstelligen Tafel kann man aber verlangen, daß man aus Logarithmen aller siebenstelligen Zahlen mit gleicher Gen finden könne.

Ebenso wird man einen gegebenen Logarithmus, zu d Numerus bestimmt werden soll, in der Regel nicht genau in d finden, und doch soll der Numerus wieder bis auf sieben genau ermittelt werden.

Dies geschieht nun mit Hilfe der Interpolation, die a folgenden Gedanken beruht.

Es sei $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Reihe von Zahlen, die i metischer Progression mit der Differenz D stehen:

$$x - x_1 = x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \cdots = D,$$

und sei

$$\begin{aligned}
& y = \log x, \\
(1) \qquad & y_1 = \log x_1, \quad y_1 - y = \Delta, \\
& y_2 = \log x_2, \quad y_2 - y_1 = \Delta_1, \\
& y_3 = \log x_3, \quad y_3 - y_2 = \Delta_2.
\end{aligned}$$

$$) \quad \beta = \frac{\Delta}{D}\alpha.$$

In den Tafeln sind zur Erleichterung der Rechnung unter
berschrift P. P. (Partes proportionales, Proportionalteile) die Di
nzen Δ und die Vielfachen

$$\frac{\Delta}{10}, \quad \frac{2\,\Delta}{10}, \ldots, \quad \frac{9\,\Delta}{10}$$

gegeben mit der Genauigkeit, mit der sie in die Rechnung ein
zen sind.

Aus denselben Tafeln findet man, wenn β gegeben ist, α n
r Formel

$$\alpha = \frac{D\beta}{\Delta}.$$

an hat also hier noch eine kleine Division auszuführen, bei
an sich des abgekürzten Verfahrens bedienen oder auch die Hi
feln der Proportionalteile benutzen kann.

Da die Differenzen Δ am größten sind bei den kleineren Zah
on 10000 ab), so ist in diesen Teilen der Tafel die Interpolat
i wenigsten genau, und darum gehen manche Tafeln noch ein St
er die fünfstelligen Zahlen hinaus (z. B. Vega bis 107999) u
ben für diese die Logarithmen auf acht Stellen.

2. In den zehnstelligen Tafeln des Thesaurus sind die Lo
hmen aller fünfstelligen Zahlen direkt angegeben. Auch hier w
e Interpolation nach denselben Grundsätzen ausgeführt. Um a
ese Tafeln vollständig auszunutzen, genügt es bisweilen nicht ga
e zwischenliegenden Logarithmen in arithmetischer Progression
nehmen.

Man nimmt dann die Differenz Δ, Δ_1, Δ_2, ... nicht konst
ndern in arithmetischer Progression an, und erhält für die Lo

also findet man β aus

$$(3) \qquad \beta = \frac{\Delta}{D}\alpha + \frac{\alpha(D-\alpha)\Delta'}{2D^2}.$$

Die Zahl $\Delta - \Delta_1 = \Delta'$ heißt die zweite Differenz. Ihr Ein meist nur in der letzten oder höchstens in den beiden letzte malen noch merklich.

Betrachten wir y als zehnstellige, x als fünfstellige gan (ohne Dezimalstellen), so ist $D = 1$ und $\alpha = 0{,}abcde$ zu worin a, b, c, d, e die 6te, 7te, 8te, 9te, 10te Dezimalstelle der ge Zahl $x + \alpha$ sind. Wegen der Kleinheit von Δ' in Vergleic genügt es, wenn man in dem zweiten Gliede auf der rechte der Formel (3) nur zwei Dezimalen von α berücksichtigt.

Ist also N die Zahl, deren Logarithmus gefunden werd und n die aus den fünf ersten Ziffern von N gebildete Z findet man $\log n$ auf 10 Stellen genau in der Tafel, und mar dann aus (3)

$$(4) \qquad \log N = \log n + 0{,}abcde\,\Delta + \frac{1}{2}\,0{,}ab(1 - 0{,}ab)\Delta'.$$

In dieser Formel ist N so zu verstehen, daß die fünf Steller dem Komma stehen. Je nach der wirklichen Stellung des hat man dann noch die Charakteristik beizufügen.

Wenn von der Zahl N mehr als 10 Ziffern bekannt s kann man bei der Multiplikation im zweiten Gliede noch d berücksichtigen.

Es soll z. B. der Briggische Logarithmus der Zahl e

$$e = 2{,}718\,281\,828\,46$$

auf zehn Stellen genau gefunden werden. Man findet in de die Logarithen von fünf aufeinander folgenden Zahlen auf zehn

	Δ	Δ'
$\log 27182 = 4342814081$		

$$\begin{array}{r}
4342814081 \\
127816 \\
1597 \cdot 7 \\
1278 \cdot 16 \\
31 \cdot 95 \\
12 \cdot 78 \\
64 \\
9 \\
\hline
15 \\
\hline
0{,}434\,294\,481\,8{\cdot}77,
\end{array}$$

as bis auf 10 Dezimalen richtig ist. Die zweite Differenz gibt h
ur ungefähr eine halbe Einheit in der letzten Stelle, und wird a
ur bei ganz scharfen Rechnungen in Betracht kommen. Die zwei
ifferenzen sind um so größer, je kleiner die Zahlen sind, de
ogarithmen gesucht werden.

Die in der Tafel enthaltenen Nebentafeln, über deren Einrichtu
nd Gebrauch die Einleitung belehrt, haben den Zweck, die Mu
likationsrechnung zu vereinfachen.

Die Lösung der umgekehrten Aufgabe, nämlich zu einem g
ebenen Logarithmus den zugehörigen Numerus zu finden, geschie
ei Berücksichtigung der ersten Differenz nach der Formel (2). I
erücksichtigung der zweiten Differenz würde nach einer der Formel (
nalog gebildeten Formel möglich sein, erfordert aber bei der Ei
chtung der Tafel einen größeren Aufwand von Rechnung.

Im allgemeinen wird die Berücksichtigung der zweiten Differe
m so eher nötiger sein, je größer die Intervalle der Zahlen sin
eren Logarithmen in der Tafel direkt gegeben sind. Man erhält z.
ne vollständig ausreichende vierstellige Logarithmentafel, die a
ner halben Seite Platz hat, wenn man die Logarithmen aller zwe

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59$$

olfische Zahl. Man findet dann auf 10 Stellen richtig

$$\log(\pi \log e) = 0{,}134\,934\,1840.$$ [1]

bt sich aus theoretischen Betrachtungen, die hier nicht be- werden können[2]), daß die Zahl

$$z = e^{\pi\sqrt{19}}$$

r ganzen Zahl um weniger als $\frac{1}{4}$ übertroffen wird. Welches ganze Zahl?

hat aus (4)

$$\log\log z = \log\sqrt{19} + \log(\pi \log e),$$

n man aus der zehnstelligen Tafel

$$\log\sqrt{19} = 0{,}639\,376\,800\,5$$

t, nach (3)

$$\log\log z = 0{,}774\,310\,984\,5.$$

ß also zweimal nacheinander den Numerus aufsuchen und

$$\log z = 5{,}947\,178\,65,$$
$$z = 885\,479{,}8.$$

chte Zahl ist also

$$A = 885\,480.$$

e der Richtigkeit, die wir freilich hier auch nicht begründen dient, daß $A - 744$ eine Kubikzahl sein muß, und es ist in

$$A - 744 = 884\,736 = 96^3.$$

Thesaurus

$$A = 88\,473\,644.$$

Die beiden anderen Zahlen gehen aber weit über d
Thesaurus hinaus. Man kann sie aber aus dem Ums
daß auch

$$z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{163}}$$

ganzen Zahlen B nahe kommen, wenn auch nicht in
die Zahlen z, und daß dann

$$A = B^3 + 744$$

wird.

Es ergibt sich z. B.

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}} = 960{,}000\,042$$

oder $B = 960$, und in den beiden anderen Fällen

$$B = 5280, \quad B = 640\,320.$$

Diese Beispiele beruhen auf tiefliegenden arithn
schaften, die den Zahlen 19, 43, 67, 163 und kein
kommen.

§ 42. Historisches über die Logarithme

Als mit dem Aufleben der Wissenschaften im 15
hundert die Astronomie wieder lebhafter betrieben wu
mächtig das Bedürfnis nach neuen wirksameren Hilfs
wältigung der großen Zahlenrechnungen. Die Trig
sich zum wirksamsten Hilfsmittel der Astronomie entw
sie wurden umfangreiche Tabellenwerke berechnet, vo
deutendste das Opus Palatinum ist. Dieses großarti

die geometrische Anschauung leicht verständlich schien, Begriff der Exponentialfunktion, also der Potenzen mi Exponenten, der damaligen Mathematik ganz fern lag daß in den trigonometrischen Tafeln bereits ein vortre mittel für den Rechner vorlag. So entstand die Metho dem eigentümlichen Namen der Prosthaphaeresis bek πρόςϑεσις und ἀφαίρεσις, Hinzufügung und Wegnahme), in der Benutzung der trigonometrischen Formeln bestan

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Sollte also das Produkt zweier Zahlen (kleiner al werden, so konnte man aus den Tafeln zu diesen Zahle finden, deren Kosinusse oder Sinusse sie waren. Dann h der Summe und der Differenz dieser Winkel wieder die suchen und die Summe durch 2 zu dividieren.

Das Verfahren ist zwar viel umständlicher als die Rechnung und gestattet z. B. nicht eine so unmittelba auf Division, Potenzieren, Radizieren, es beruht aber d selben Grundgedanken, und wird durch die moderne A trigonometrischen Funktionen als Exponentialfunktione nären Exponenten mit den Logarithmen in eine un ziehung gesetzt.

Erfunden wurde diese Methode von dem Nürnb Johannes Werner (1468—1528), der dem Kreise des ber nistischen Ratsherrn Willibald Pirkheimer angehörte. S wieder in Vergessenheit und wurde erst wieder aufgefun ausgebaut und bewiesen auf der Sternwarte Uranienburg de (seit 1580) und am Hofe des um die Astronomie hochv fürsten Wilhelm IV. in Cassel (1532—1592) von

fangend, in geometrischer Proportion stehen, das P
Zahlen erhalten wird, wenn man die Zahl sucht, die
soweit absteht wie die zweite von der Einheit. Das
sieht, der Grundsatz des logarithmischen Rechnens.
dem Zeitalter der Wiedergeburt der Wissenschaft nimm
Gedanke in der Praxis des Rechnens einen Platz ein.

Der merkwürdigste unter den Vorläufern ist Michael
1486 oder 1487 in Eßlingen in Württemberg; als August
Lutherischen Lehre übergetreten und mit Luther befreun
als Prediger an verschiedenen Orten und starb in Jena 15
im Jahre 1544 in Nürnberg gedruckten Arithmetica
er die Zahlen einer arithmetischen Progression mit dene
trischen durch die folgende Zusammenstellung in Bezie

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Die Zahlen der oberen Reihe nennt er die Expone
daß die beiden Reihen nach beiden Seiten hin fort
können, daß der Addition, Subtraktion, Multiplikatio
der ersten Reihe Multiplikation, Division, Potenzieren,
der zweiten entspricht und kennt also die fundamentalen
der Logarithmen. Daß aber für alle zwischenliegende
zweiten Reihe Zahlen in der ersten Reihe eingeschaltet w
also von der Stetigkeit der Logarithmen, durch die sie
stets anwendbaren praktischen Hilfsmittel des Rechnens
sich bei Stifel keine Spur.

Diesen Schritt und zugleich die Konstruktion de
lichen Logarithmentafeln verdanken wir zwei Männern,
gleichzeitig und unabhängig voneinander gearbeitet hab

Jobst Bürgi, ein Schweizer (1552—1632) aus L

$$y = 10^8\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{x}{10^5}},$$

und es ist daher $x = 10^5 \log(y\,10^{-8})$, wenn als Ba
$(1+1/10^4)^{10^4}$ genommen wird, die mit der Basis e unse
Logarithmensystems in den drei ersten Dezimalen überei
Tafel von Bürgi ist also eigentlich eine Tafel von A
d. h. man findet darin unmittelbar zu einem gegebene
die zugehörige Zahl. Auch hier treten die natürliche
auf. Die Zahlen als Potenzen einer bestimmten Bas
und die Logarithmen als Exponenten lag aber Bürgi fe

John Neper oder Napier, Baron von Merchiston, is
Nähe von Edinburg geboren und lebte bis zu seinem T
Schottland. Seine „Descriptio mirifici logarithmorum can
1614 im Druck.

In einer sehr sinnreichen Weise macht sich Neper
da unser heutiger Funktionsbegriff noch nicht ausgebi
stetige Folge von Logarithmen und Zahlen anschauli
sich zwei Punkte gleichzeitig auf einer geradlinigen
wegung. Der eine bewegt sich so, daß er in gleichen
Strecken durchläuft, und wenn also sein Weg x in eine
gleich Δ ist, so ist nach n Zeitelementen

$$x = n\Delta.$$

Der zweite Punkt bewegt sich einem Ziele entgegen
daß er in jedem Zeitelement einen gewissen Bruchteil, 1
vor ihm liegenden Weges durchläuft. Wenn er im erste
ebenfalls den Weg Δ durchläuft, so ist $m\Delta$ die Gesam
Weges. Nehmen wir diesen gleich 1, so ist nach dem
element der noch vor ihm liegende Weg gleich

$$(m-1)\Delta = \left(1-\frac{1}{\ldots}\right),$$

ellungen der geschichtlichen Entwicklung der behandelten Dis
lin zu geben pflegt, weist in dem die Logarithmen behandelnd
eile seiner „Leçons élémentaires“[1]) darauf hin, daß das Problem d
usikalischen Temperatur fast mit Notwendigkeit auf den Begriff d
ogarithmen führen mußte.

Bezeichnet man den Grundton mit 1, so werden, wie schon d
ythagoräern bekannt war, die harmonischen Intervalle dur
eilung der Saite des Monochords in einfachen Verhältnissen bestimm
ie reziproken Werte dieser Verhältnisse sind was wir die Schwingung
hlen nennen:

Grundton	1
Sekunde	9/8
Kleine Terz	6/5
Große Terz	5/4
Quarte	4/3
Quinte	3/2
Sexte	5/3
Septime	15/8
Oktave	2

In dieser Reihe kommt z. B. die Quinte der Sekunde, die d
ahl 27/16 hat, nicht vor, und man muß also, um reine Interval
erhalten, noch Zwischentöne einschieben. Könnte man aber d
hwingungszahlen in einer geometrischen Reihe anordnen, so wür
an eine Tonleiter erhalten, in der jede Schwingungszahl zur vora
henden in dem gleichen Verhältnisse steht, und man würde als
n jedem Tone ausgehend, die nämliche Reihenfolge der Interval
halten. Wegen des praktischen Gebrauches darf aber dieses konstan
erhältnis nicht allzu klein sein, und die Erfahrung der Musiker h
e Zahl von 12 Tönen auf die Oktave als ausreichend erkann
e Intervalle kommen bei dieser sogenannten gleichschwebend
emperatur nicht rein zum Ausdruck, sondern nur genähert. We

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades.

---

43. Gleichungen ersten Grades mit einer und mit zwei Unbekann

Wir haben in § 18 die Notwendigkeit der Einführung
ochener Zahlen aus der Aufgabe abgeleitet:

1. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so soll e
ahl x gefunden werden, die der Bedingung

$$ax = b \tag{1}$$

nügt,

d wir haben dort gesehen, daß es, wenn a und b in dem Geb
r ganzen oder gebrochenen Zahlen enthalten sind, immer eine
r eine Zahl gibt, die dieser Forderung genügt, ausgenomn
nn $a = 0$ ist. Ist dann b nicht $= 0$, so gibt es keine Zahl x,
er zugleich $b = 0$, so genügt jede beliebige Zahl, für x gese
r Bedingung (1).

Nach Einführung der gebrochenen und irrationalen Zahlen dür
und b auch gebrochene und irrationale Zahlen sein.

Man nennt (1) eine Gleichung ersten Grades mit ei
nbekannten, und die Bestimmung der unbekannten Zahl x
sung dieser Gleichung.

In den Übungsbüchern finden sich zahlreiche Beispiele für d

funden werden sollen, von weniger einfacher Art, etwa so, hrere unbekannte Zahlen gleichzeitig aus mehreren Bedingun ichungen gefunden werden sollen. Wir stellen also zunächst gende allgemeinere Aufgabe:

2. Es seien a, b, c, a', b', c' gegebene Zahlen. Es sol e unbekannten Zahlen x, y so bestimmt werden, daß iden Gleichungen befriedigt sind:

$$\begin{array}{l|cc} ax + by = c & b' & -a' \\ a'x + b'y = c' & -b & a \end{array}$$

(Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.)

i der Lösung dieser Aufgabe kann man so verfahren: Man mu ziert mit den beigesetzten Faktoren $b', -b$ und $-a', a$ liert jedesmal. Dadurch erhält man

$$(ab' - ba')\,x = \quad cb' - bc',$$
$$(ab' - ba')\,y = -ca' + ac',$$

o zwei Gleichungen mit je einer Unbekannten. In beiden Gleichun x- und y den nämlichen Faktor

$$\Delta = ab' - ba',$$

die Determinante des Gleichungssystems (2) genannt und ilen auch so bezeichnet wird:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

3. Wenn die Determinante von Null verschieden ist, ot es ein und nur ein Zahlenpaar x, y, das den Gl ungen (2) genügt:

$$x = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad y = \frac{-ca' + ac'}{\Delta}.$$

ıll verschieden. Dann würde, wenn x bekannt wäre, aus der zwei
eichung (2) der zugehörige Wert von y gefunden werden:

$$y = \frac{c' - a'x}{b'}.$$

tzt man aber diesen Wert von y in die erste Gleichung (2)
Substitution"), so folgt nach einiger Rechnung:

$$\varDelta x = cb' - bc',$$

d hieraus ist, wenn $\varDelta$ von Null verschieden ist, x ebenso wie
) bestimmt. Aus (7) erhält man dann einen Ausdruck für y,
enfalls leicht mit (6) in Übereinstimmung gebracht wird.

Es zeigt sich hier aber auch, was eintritt, wenn $\varDelta = 0$
dann $cb' - bc'$ nicht $= 0$, so gibt es keinen Wert von
: der Gleichung (8) genügt, und folglich können auch die G
ıngen (2) nicht befriedigt werden. Wenn aber $\varDelta$ und $cb' -$
ide gleich Null sind, so enthält (8) gar keine Forderung für
hr. Die beiden Gleichungen (2) sind befriedigt, wenn x belie
genommen und y dann aus (7) bestimmt wird.

Wenn aber endlich a, b, a', b' alle vier verschwinden, so könı
Gleichungen (2) nur bestehen, wenn auch c und c' verschwind
nn aber sind sie für beliebige x und y befriedigt. Dies fassen
zusammen:

4. Wenn die Determinante der Gleichungen (6) v
hwindet, so widersprechen die beiden Gleichungen
nander, und es gibt keine Lösung, oder die eine ist e
lge der anderen und es gibt unendlich viele Lösungen.

§ 44. Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten.

1. Die Aufgabe der Lösung von Gleichungen ersten Grades l

$$(2) \qquad \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

lassen sich nun nach der folgenden Regel neun Determin
die man erhält, wenn man je zwei der Gleichungen (1) als
ersten Grades für die Bestimmung je zweier der Unbekannte

$$3) \qquad \begin{aligned} \alpha &= b'c'' - c'b'', & \beta &= c'a'' - a'c'', & \gamma &= a'b'' - \\ \alpha' &= b''c - c''b, & \beta' &= c''a - a''c, & \gamma' &= a''b - b \\ \alpha'' &= bc' - cb', & \beta'' &= ca' - ac', & \gamma'' &= ab' - \end{aligned}$$

Wenn die Koeffizienten (2) alle verschwinden, so
auch alle Determinanten (3). Betrachten wir aber jetzt
zwar alle Determinanten (3), nicht aber alle Koeffizien
schwinden, so sieht man leicht, daß die Gleichungen
einander widersprechen, oder daß aus einer von ihnen
anderen folgen, denn nehmen wir etwa an, es sei c'' v
schieden, so ergibt sich aus der letzten Gleichung (1):

$$(4) \qquad z = \frac{e'' - a''x - b''y}{c''},$$

und wenn man dies in die beiden ersten Gleichungen
so folgt nach (3)

$$(5) \qquad \begin{aligned} \beta' x - \alpha' y &= ec'' - ce'', \\ -\beta x + \alpha y &= e'c'' - c'e'', \end{aligned}$$

und wenn also $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$ ist, so muß, wenn
chungen möglich sein sollen, $ec'' - ce'' = 0$, $e'c'' - c'$
und dann sind die Gleichungen (5) für beliebige x, y
jedem Wertsystem x, y erhält man aus (4) einen bestim

2. Wir betrachten weiter den Fall, daß die Deter
nicht alle verschwinden und die Allgemeinheit wi

Wir setzen wieder zur Abkürzung

$$\Delta = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

er, nach (3) ausgerechnet,

$$\begin{aligned}\Delta = & \, ab'c'' - ac'b'' \\ & + bc'a'' - ba'c'' \\ & + ca'b'' - cb'a'',\end{aligned}$$

d erhalten

$$\Delta x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'',$$

raus, wenn Δ von Null verschieden ist, x eindeutig bestim rden kann, und dann erhält man y und z aus den Formeln (6).

Wenn aber $\Delta = 0$ ist, so ist die Gleichung (9) nur dann lbar, wenn auch

)) $$e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'' = 0$$

und dann enthält sie keine Beschränkung für x. Es bleibt da willkürlich, und y und z werden durch (6) bestimmt.

Die Größe Δ heißt wieder die Determinante des Systems (d man bezeichnet sie auch oft in übersichtlicher Weise so:

.) $$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Die Darstellung (8) zeigt aber, daß sich Δ nicht ändert, we ichzeitig b mit a', c mit a'', c' und b'' vertauscht werden, n also auch

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

zen kann.

Die neun Größen (3) $\alpha = b'c'' - c'b''$, ... werden die Unt terminanten von Δ genannt.

$$(12)\qquad \begin{aligned} \Delta = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ = b\beta + b'\beta' + b''\beta'' &= a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' \\ = c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' &= a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma''. \end{aligned}$$

Diese erhält man, wenn man in (8) die Glieder zusammenfaßt mit a, a', a'' oder mit b, b', b'' oder mit c, c', c'' oder mit a, b, c u multipliziert sind, und die Bezeichnungen (3) berücksichtigt.

Es ergeben sich aber dann weiter die Relationen

$$(13)\qquad \begin{aligned} b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' &= 0, \\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' &= 0, \\ c\beta + c'\beta' + c''\beta'' &= 0, \\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' &= 0, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' &= 0, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

Von diesen Relationen braucht man nur die eine wirklich Rechnung abzuleiten, etwa

$$b(b'c'' - c'b'') + b'(b''c - c''b) + b''(bc' - cb') = 0,$$

die anderen unterscheiden sich von dieser nur in der Bezeichnung man a, b, c auf alle möglichen Arten untereinander vertausch

Mit Hilfe der Relationen (12) und (13) läßt sich das Sys auch direkt (nach der **Eliminationsmethode**) auflösen, we die Gleichungen (1) auf folgende drei Arten mit Faktoren pliziert und addiert:

$$\begin{array}{l|lll} ax + by + cz = e & \alpha & \beta & \gamma \\ a'x + b'y + c'z = e' & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a''x + b''y + c''z = e'' & \alpha'' & \beta'' & \gamma''. \end{array}$$

Man erhält dann mit Benutzung von (12) und (13)

5. Die hier abgeleiteten Sätze über die Gleichungen ers
ades mit drei Unbekannten x, y, z lassen sich geometrisch ver
haulichen, wenn man die Hilfsmittel der analytischen Geometrie
umes voraussetzt, wie sie im zweiten Bande dargestellt si
rnach bestimmen drei beliebige Zahlenwerte x, y, z als Koor
ten einen Punkt im Raume. Alle Punkte, deren Koordinaten ei
eichung ersten Grades

$$ax + by + cz = e$$

nügen, liegen, wenn nicht a, b, c alle drei gleich Null sind,
er Ebene. Die Punkte, deren Koordinaten dieser und einer zwei
eichung

$$a'x + b'y + c'z = e'$$

nügen, liegen auf beiden Ebenen und gehören also der Schni
ie dieser beiden Ebenen an. Kommt eine dritte Gleichung

$$a''x + b''y + c''z = e''$$

azu, so genügen die Koordinaten des Schnittpunktes der d
enen, oder allgemein die Koordinaten aller Punkte, die zugle
f den drei Ebenen liegen, den drei Gleichungen.

Wenn also Δ von Null verschieden ist, so schneiden sich
ei Ebenen in einem Punkte.

Wenn aber $\Delta = 0$ ist, ohne daß die sämtlichen Unterdeter
nten (3) verschwinden, so sind zwei Fälle möglich: entweder
eichung (10) ist befriedigt. Dann bleibt eine der Größen x, y, z w
rlich. Die drei Ebenen haben die Punkte einer geraden Linie geme
er die Gleichung (10) ist nicht befriedigt; dann gibt es kein
nkt, der auf allen drei Ebenen liegt. Die Ebenen schneiden s
zweien in drei parallelen Linien, etwa wie die Seitenflächen ei
eiseitigen Prismas, oder zwei der Ebenen sind parallel und werd
n der dritten in parallelen Geraden geschnitten.

Wenn endlich alle Unterdeterminanten (3) verschwinden, da
terscheiden sich die linken Teile der Gleichungen (1) nur dur
nstante Faktoren voneinander, und die drei Ebenen sind entwe

§ 45. Homogene Gleichungen.

1. Eine besondere Klasse von Gleichungen ersten Grades sin
e *homogenen Gleichungen.* Das sind solche, bei denen i
dem Gliede eine der Unbekannten vorkommt, also z. B. Gleichunge
on der Form
$$ax + by + cz = 0.$$

Eine solche Gleichung ist selbstverständlich immer erfüllt, wen
$= y = z = 0$ ist. Diese Lösung heißt eine *uneigentliche.* Unt
en *eigentlichen Lösungen* verstehen wir solche, bei den
venigstens eine der Unbekannten von Null verschieden ist. Da
kann man die Gleichung durch eine nicht verschwindende U
bekannte, etwa z, dividieren, und man erhält dann eine Gleichun
die nur die Verhältnisse x/z, y/z enthält.

*Die homogenen Gleichungen stellen also nicht Ford
rungen an die Unbekannten selbst, sondern nur an die a
ihnen zu bildenden Quotienten.*

Betrachten wir zunächst ein System von zwei homogenen G
chungen:
$$\begin{array}{l|ll} a'x + b'y + c'z = 0, & b'' & -a'' \\ a''x + b''y + c''z = 0. & -b' & a' \end{array}$$

Daraus können wir die Verhältnisse x/z, y/z nach § 43
stimmen. Multiplizieren wir nämlich mit den beigeschriebenen F
toren und addieren, so folgt
$$(a'b'' - b'a'')x + (c'b'' - b'c'')z = 0,$$
$$(a'b'' - b'a'')y + (a'c'' - c'a'')z = 0,$$

oder in der Bezeichnung § 44, (3):
$$\gamma x - \alpha z = 0, \quad \gamma y - \beta z = 0,$$
nicht $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, folgt:

n wir aus den beiden letzten die Quotienten $x:y:z$ be-
und in die erste einsetzen. Daraus folgt

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

dasselbe ist,

$$\Delta = 0.$$

ber $\alpha = \beta = \gamma = 0$, so ist Δ gleichfalls Null.

folgern hieraus:

System von drei homogenen Gleichungen mit drei
nten hat nur dann eine eigentliche Lösung, wenn
rminante Δ verschwindet.

iese Bedingung befriedigt und sind α, β, γ nicht alle drei
ll, so erhält man die Lösung aus Nr. 1.

n aber $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, so folgt die dritte der Glei-
(1) aus der zweiten, und man erhält die Lösung aus den
sten Gleichungen (1).

n der analytischen Geometrie bedeutet eine homogene Glei-
ten Grades eine Ebene, die durch den Koordinatenanfangs-
nt. Zwei solche Ebenen haben immer eine Gerade mit-
gemein, die gleichfalls durch diesen Punkt geht. Die Glei-
$= 0$ ist die Bedingung dafür, daß sich die drei Ebenen, die
dargestellt sind, in einer Geraden schneiden.

Es ist nach dem bisher Entwickelten klar, wie die Aufgabe
sung linearer Gleichungen verallgemeinert werden kann.

man ein beliebiges System von Gleichungen ersten Grades,
bigen Unbekannten $x, y, z, \ldots$, so nimmt man eine Glei-
e eine der Unbekannten, etwa x wirklich enthält, und drückt
r die Unbekannte x durch die übrigen $y, z, \ldots$ aus. Sub-
man den so gefundenen Ausdruck für x in alle Gleichungen
enen Systems, so erhält man ein neues System, in dem die

ehungen ist. Diesem Übelstande wird durch den Algorithmus d Determinantentheorie begegnet, durch den diese allgemeinen Gese einen sehr eleganten Ausdruck finden. Wir kommen später dara zurück, wenn wir die Eigenschaften der Permutationen kennen g ernt haben.[1])

§ 46. **Anwendungen.**

1. Von den linearen Gleichungen werden mannigfache Anwe ungen in der Geometrie und in den Naturwissenschaften gemac Wir wollen zunächst ein einfaches Beispiel aus der Chemie betrachte ämlich die sogenannte indirekte Analyse. Es seien A, B, P d hemische Elemente, und AP, BP zwei chemische Verbindungen, enen je ein Atom des einen mit einem Atom des anderen verbund st. Diese beiden Verbindungen AP, BP seien in einer Mischu nthalten, und es sei bekannt,

1. das Gesamtgewicht g der Mischung,
2. das Gewicht h der in der Mischung enthaltenen Menge d Substanz P.

Wieviel von jeder der beiden Verbindungen AP, BP ist in d Iischung enthalten?

Sind x, y die unbekannten Gewichtsmengen der AP, BP, so h an zunächst die Gleichung

$$.) \qquad x + y = g.$$

Eine zweite Gleichung erhält man aus den Gesetzen der Chemi nd nämlich a, b, p die Atomgewichte der Elemente A, B, P, so i $+p$ das Gewicht eines Moleküls der Verbindung AP, und die Anzal er Moleküle, die in der Gewichtsmenge x enthalten sind, ist $x/(a+p$ ie Atome der Substanz P in dieser Menge haben das Gewic $x/(a+p)$, und ebenso hat die in der Verbindung BP enthalte

$$\frac{x}{a+p} + \frac{y}{b+p} = \frac{h}{p},$$

us können x und y bestimmt werden (außer wenn $a = b$
n erhält:

$$x = \frac{a+p}{p} \cdot \frac{gp - h(b+p)}{a-b},$$

$$y = \frac{b+p}{p} \cdot \frac{h(a+p) - gp}{a-b}.$$

rfahren ist für die Chemie von praktischer Wichtigkeit, weil rkommt, daß es zwar leicht ist, aus einer Mischung das eine P abzuscheiden und zu bestimmen, während es sehr schwer eiden Elemente A und B voneinander zu trennen.

Beispiele.[1]) Man habe z. B. eine Mischung von 3 gr Chlor- nd Chlornatrium, und darin seien 1,7 gr Chlor gefunden; nd dann die Atomgewichte von Kalium, Natrium, Chlor:

$$a = 39{,}1, \qquad b = 23, \qquad p = 35{,}4,$$
$$a - b = 16{,}1, \quad a + p = 74{,}5, \quad b + p = 58{,}4,$$
$$g = 3, \qquad h = 1{,}7,$$

hert:

$$x = \frac{74{,}5 \cdot (3 \cdot 35{,}4 - 1{,}7 \cdot 58{,}4)}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = \frac{74{,}5 \cdot 6{,}9}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = 0{,}9;$$

$$y = \frac{58{,}4 \;\; (1{,}7 \cdot 74{,}5 - 3 \cdot 35{,}4)}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = \frac{58{,}4 \cdot 20{,}4}{35{,}4 \cdot 16{,}1} = 2{,}1.$$

Stelle der Atome können auch Atomgruppen treten. Hat 2 gr einer Mischung von kohlensaurem Kalk ($CaCO_3$) und rem Strontium ($SrCO_3$) und in dieser Mischung 0,7 gr Kohlen- $_2$) bestimmt, so hat man in den Formeln (3) zu setzen: $= 0{,}7$,

$$SrO : a = 103{,}6, \quad a - b = 47{,}6,$$

seien die Atomgewichte a, b, c, p, p', und die ganzen Me
g, g'. Es seien ferner die Mengen von P und P' mit h
zeichnet. Bezeichnet man dann mit x, y, z die Mengen vo
die beide Male in der Mischung enthalten sind, so ergebe
gende vier Gleichungen:

$$\frac{a+p}{a}x + \frac{b+p}{b}y + \frac{c+p}{c}z = g,$$

$$\frac{a+p'}{a}x + \frac{b+p'}{b}y + \frac{c+p'}{c}z = g',$$

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y + \frac{p}{c}z = h,$$

$$\frac{p'}{a}x + \frac{p'}{b}y + \frac{p'}{c}z = h'.$$

Unter diesen vier Gleichungen finden sich aber keine dr
ander unabhängige; denn aus den beiden letzten folgt h
und dann geben diese beiden Gleichungen nur die eine:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{h}{p},$$

und die beiden ersten geben:

$$x + y + z = g - h = g' - h',$$

und man hat also nur zwei Gleichungen für die drei Un
x, y, z, die zu ihrer Bestimmung nicht ausreichen.

4. Eine andere Anwendung linearer Gleichungen biete
zweigung elektrischer Ströme in Drahtsystemen. Wir
Begriffe der Stromintensität und des elektrischen Wide
eines Drahtes aus der Physik hier voraus und bemerken
wenn die in Betracht kommenden Drähte alle aus gleiche
und von derselben Stärke sind, der Widerstand eines Dr

Zur Beantwortung dieser Frage geben zwei Ge
Kirchhoff aufgestellt sind, immer eine hinreichen
Gleichungen ersten Grades. Diese beiden Gesetze sin

1. Wenn in einem Punkte des Netzes (Knoten
Drähte zusammenlaufen (Fig. 5), in denen die Stromintens
bestehen (positiv gerechnet, wenn sie nach dem Knote
richtet sind), so ist

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \cdots = 0.$$

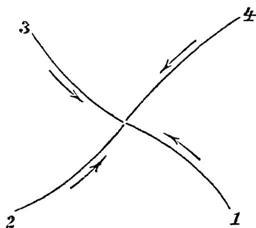


Fig. 5.

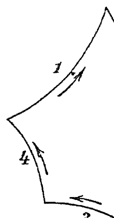
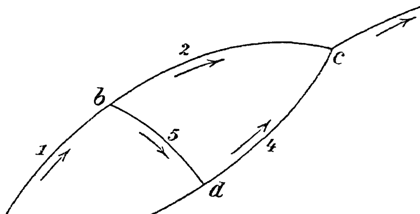


Fig.

2. Wenn man in dem Netze irgend einen Umg
dem man von einem beliebigen der Knotenpunkte au
Durchlaufung der Drähte 1, 2, 3, ... mit den Wide
w_3, ... zu dem Ausgangspunkte zurückgeht (Fi

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 + i_3 w_3 + \cdots = 0.$$



Richtung durch Pfeile angegeben ...

und den Widerständen w_1, w_2, w_3, w_4, w_5.

Nach dem ersten Gesetz ergeben uns die v... folgende vier Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} i &= i_1 + i_3 = i_2 + i_4, \\ i_5 &= i_1 - i_2 = i_4 - i_3, \end{aligned}$$

unter denen aber nur drei voneinander unabhängig ... ersten Doppelgleichung $i_1 - i_2 = i_4 - i_3$ folgt. W... die Umgänge *abd*; *bcd*; *abcd*. Die beiden ersten ... zweiten Gesetz

$$(5) \qquad \begin{aligned} i_5 w_5 &= i_3 w_3 - i_1 w_1, \\ i_5 w_5 &= i_2 w_2 - i_4 w_4, \end{aligned}$$

und der dritte gibt nur die hieraus folgende Rel... $= i_3 w_3 + i_4 w_4$, also nichts neues.

Man erhält nun aus den Gleichungen (4)

$$i_4 = i - i_2, \quad i_3 = i - i_1, \quad i_5 = i_1 - i_2 \ldots$$

und wenn man dies in (5) einsetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} i_1 (w_1 + w_3 + w_5) - i_2 w_5 &= i w_3, \\ - i_1 w_5 + i_2 (w_2 + w_4 + w_5) &= i w_4, \end{aligned}$$

woraus man i_1, i_2 finden kann.

Die hauptsächlichste Anwendung dieses Gleichung... aber darin, daß man durch Verschiebung des einen ... etwa *d*, also durch Veränderung der Widerstände ... reichen sucht, daß die Stromintensität $i_5 = 0$ wird, ... die Beobachtung scharf kontrollieren läßt. Dann ... $i_3 = i_4$ sein, und die Gleichungen (5) ergeben als Be...

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4,$$

und hieraus kann, wenn drei der Widerstände w_1, w_2 ... sind, der vierte gefunden werden.[1])

---

[1]) Die ...

Achter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen und imaginär

§ 47. Quadratische Gleichungen.

1. Die Gleichungen, die wir im siebenten Abschn haben, hatten das Eigentümliche, daß die Unbekannten in der ersten Potenz enthalten waren, und daß auch nich Unbekannte miteinander multipliziert vorkamen. Wir Gleichungen darum auch Gleichungen ersten Grades g nennt sie wohl auch (mit Rücksicht auf eine geomet dung) lineare Gleichungen.

Jetzt wenden wir uns zur Betrachtung von Gleichun mit einer Unbekannten, in denen die Unbekannte nich ersten, sondern auch in der zweiten Potenz vorkommt chungen heißen Gleichungen zweiten Grades oder a tische Gleichungen, und ihre Auflösung erfordert ne

2. Eine quadratische Gleichung hat die folgende F

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Darin hat man sich unter den Koeffizienten a, b, c ge vorzustellen, und x ist eine unbekannte Zahl, die so bes soll, daß die Gleichung (1) erfüllt ist. Es bleibt eins

zu erhalten, in der der Koeffizient von x^2 gleich 1 is
ist hier aber eine andere Annahme über h, nämlic
erhalten wir

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

oder, da $(2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$ ist,

$$(2ax+b)^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

oder, indem wir zur Abkürzung

(2) $$b^2 - 4ac = D$$

setzen,

$$(2ax+b)^2 = D.$$

Dadurch wird mit Hilfe einer Quadratwurzel
Gleichung auf eine lineare zurückgeführt:

$$2ax + b = \sqrt{D}.$$

Da aber das Quadrat einer negativen Zahl ebens
Quadrat der entgegengesetzt gleichen positiven Zahl,

$$2ax + b = -\sqrt{D}$$

gesetzt werden. Diese beiden Gleichungen sind
wenn $D = 0$ ist. Andererseits haben wir aber no
wurzel aus einer negativen Zahl kennen gelernt, u
drei Fälle zu unterscheiden:

1. D negativ: keine Wurzel,
2. $D = 0$: eine Wurzel $x = -b$
3. D positiv: zwei Wurzeln:

(3) $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

was von der Gleichung (1) nur in der Bezeichnung v
so wird $D = 4(a^2 - b)$, und wenn dies positiv ist, s
beiden Wurzeln:

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -a - \sqrt{a^2 - b}, \\ x_2 &= -a + \sqrt{a^2 - b}. \end{aligned}$$

§ 48. **Imaginäre Zahlen.**

1. Wenn man die Disharmonie, die sich darin zeig
quadratische Gleichungen keine Wurzeln haben, besei
sieht man sich abermals zu einer Erweiterung des Z
gedrängt. Die neu einzuführenden Zahlen heißen imagi
und daß diese Erweiterung sachgemäß ist, zeigt die Er
weiteren Entwickelung der mathematischen Wissensch
Gebiete gewinnen dadurch an Abrundung und Vollstän

2. Wir kombinieren die bisher betrachteten Zal
negative, rationale, irrationale Zahlen, die wir von n
ihrer Gesamtheit als reelle Zahlen bezeichnen, zu Pa

Wenn also a, b irgend zwei reelle Zahlen sind,
diesen entsprechend, ein neues Zahlzeichen (a, b) ein.

Diese neuen Zahlengebilde nennen wir imaginä
komplexe Zahlen.

Der Gedanke, der zugrunde liegt, ist ganz ders
durch den die Brüche aus den ganzen Zahlen abgeleite
Regeln für das Rechnen mit diesen Zahlen sind a
schieden, und diese Regeln, die wir willkürlich vorsch
müssen nun zunächst aufgestellt werden.

1) Zwei komplexe Zahlen $\alpha = (a, b)$, $\alpha' = (a', b$
dann einander gleich heißen, wen $a = a'$, $b = b'$ ist.

Man sieht, daß das assoziative und das komm setz hiernach für die Addition der komplexen Zahlen Subtraktion die Umkehrung der Addition ist, und d $b' = 0$ Addition und Subtraktion der komplexen Zahlen Operationen für die reellen Zahlen übergehen.

4) Die Multiplikation wird definiert durch

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba'). \tag{2}$$

Auch dies ergibt für $b = 0$, $b' = 0$ die Multiplikat Zahlen. Assoziatives und kommutatives Gesetz s

Die Potenzierung mit ganzen positiven Exponenten sich als Wiederholung der Multiplikation.

5) Die Division erklären wir als die Umkehrung kation.

Sind (a, b), (a', b') zwei komplexe Zahlen, so wi komplexe Zahl gesucht, die der Bedingung

$$(a, b)(x, y) = (a', b') \tag{3}$$

genügt. Diese Zahl (x, y), falls sie existiert, ist $(a', b')/(a, b)$.

Es folgt aber aus (1), (2) und (3):

$$\begin{aligned} ax - by &= a', \\ bx + ay &= b', \end{aligned} \tag{4}$$

und wir haben also zwei Gleichungen ersten Grades m Unbekannten x, y, die nach § 43 zu behandeln sind.

Die Determinante Δ dieses Systems ist gleich $a^2 + b^2$ nur dann verschwinden, wenn sowohl a als b, folglich a ist. Wir schließen also hier, wie bei der Division r den Divisor Null ein für allemal aus. Dann ergibt sich

3. Aus diesen Definitionen läßt sich eine sehr vereinfachte D
llung der komplexen Zahlen ableiten.

Es ist nämlich nach 3)

$$) \qquad (a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

d nach 2) und 4)

$$) \qquad (a, b) = a + b\,(0, 1),$$

d man kann daher alle komplexen Zahlen mittels reeller Zahl
toren durch die eine imaginäre Zahl (0, 1) darstellen. Man se
r Abkürzung

$$) \qquad (0, 1) = i, \quad (-1)\,i = -i$$

d nennt i die imaginäre Einheit. Es wird dann nach (8)

$$)) \qquad (a, b) = a + bi,$$

d wir können von jetzt an die Bezeichnung (a, b), die nur p
orisch war, ganz fallen lassen; a heißt der reelle Teil, bi o
der imaginäre Teil der komplexen Zahl $a + bi$. Der ima
re Teil heißt positiv oder negativ, je nachdem b positiv o
gativ ist. Eine imaginäre Zahl, deren reeller Teil $= 0$ ist, also
ßt rein imaginär. Zwei Zahlen von gleichem reellen und e
gengesetztem imaginären Teil, also $a + bi$ und $a - bi$, heißen k
giert imaginär.

Wenn man in (2) $a = a' = 0$, $b = b' = +1$ oder $= -1$ se
ergibt sich

$$1) \qquad i^2 = -1, \quad (-i)^2 = -1,$$

d demnach wird i auch die Quadratwurzel aus -1 genannt o

$$2) \qquad i = \sqrt{-1}$$

schrieben. Im Gebiete der imaginären Zahlen gibt es also a
hlen, deren Quadrate negativ sind, und demnach erhalten
biete der imaginären Zahlen die Ausdrücke x_1, x_2 für die Wurz

5. Jedes Rechnungsresultat mit imaginären Zal
nach diesen Formeln in die Form $A+Bi$ bringen,
reelle Zahlen sind. Ersetzt man jede Zahl, die be
des Resultates mitgewirkt hat, durch ihre konjugiert
das konjugiert imaginäre Resultat $A-Bi$. Darau
man in jeder richtigen Gleichung zwischen
Zahlen i durch $-i$ ersetzen darf, ohne die Richti
chung aufzuheben.

§ 49. Quadratwurzeln aus imaginären Zahl

1. Diese Sätze gelten zunächst nur für die Rechnu
der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, di
die rationalen Rechenoperationen bezeichnen.

Es sind damit alle Sätze über lineare Gleichun
bar auf das Zahlenreich komplexer Zahlen übertragbar

Um aber auch die Sätze und Formeln über die
Gleichungen auf das komplexe Zahlenreich übertragen
noch die Erklärung der Quadratwurzel aus einer komp
forderlich. Wir stellen uns also die Aufgabe:

Es ist eine komplexe Zahl $a+bi$ gegeben. Es wi
komplexe Zahl $x+yi$ gesucht, deren Quadrat gleich a
muß also die Gleichung befriedigt sein:

$$(1) \qquad a+bi=(x+yi)^2.$$

Dann nennen wir $x+yi$ eine Quadratwurzel aus $a+$

$$x+yi=\sqrt{a+bi}.$$

Die Gleichung (1) ergibt aber, wenn wir das Qua
und dann den reellen Teil dem reellen, den imaginäre
nären Teil der anderen Seite gleich setzen:

o eine Gleichung vom vierten Grade. Diese Gleichung hat al
ıe so spezielle Form, daß sie leicht aufgelöst werden kann.
nämlich nur vom zweiten Grade, wenn wir x^2 statt x als U
kannte betrachten, und wenn wir sie also nach den Formeln
47 auflösen, so erhalten wir

$$x_1{}^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad x_2{}^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

ın tritt noch die weitere Forderung hinzu, daß x eine reelle Z
n soll; also muß x^2 positiv sein. Da aber $a^2 < a^2 + b^2$, a
$< \sqrt{a^2 + b^2}$ ist, so ist $a - \sqrt{a^2 + b^2}$ negativ, und wir können a
· x^2 nur die zweite dieser beiden Wurzeln nehmen. Demna
ben wir

)

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

ıalten also zwei Werte von x, von denen der eine positiv,
dere negativ ist.

Der Wert von x ist nur dann gleich 0, wenn $b = 0$ und
gativ ist (denn dann ist $\sqrt{a^2} = -a$). In diesem besonderen F
dann, wie sich aus (2) ergibt, $y = \pm \sqrt{-a}$.

Wenn aber x bekannt und von Null verschieden ist, so geht
eite Gleichung (2) in eine lineare Gleichung für y über. I
bekommen wir zu jedem x nur einen Wert und zwar, wenn
sitiv ist, zum positiven x einen positiven, zum negativen x ei
gativen, und wenn b negativ ist, umgekehrt.

2. Etwas eleganter erhält man das Endresultat auf folgend
ege.

Wenn wir die Gleichungen (2) ins Quadrat erheben, so folgt

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = a^2,$$
$$4x^2y^2 = b^2,$$

(4) $$x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+}}{2}}$$

jeder dieser Ausdrücke hat zwei entgegengesetzte Wert binationen würden also vier Wertepaare liefern. Von binationen sind aber nur zwei zulässig, nämlich die bei gleichem Vorzeichen, wenn b positiv ist, und die gesetztem Zeichen, wenn b negativ ist.

Wir sehen also, daß eine Quadratwurzel aus einer k zwei Werte hat, die nur im Vorzeichen voneinander ver Das Zeichen $\sqrt{a+bi}$ ist also zweideutig. Will n deutung fixieren, so muß man irgendwie angeben, welc Wurzeln gemeint ist, z. B. dadurch, daß man fordert, x soll positiv sein. Das Quadratwurzelzeichen wird einem bestimmten Sinne, bisweilen aber auch so gebrau unbestimmt läßt, welcher der beiden Werte gemeint ist

Die Bedeutung höherer Wurzeln aus komplexen Logarithmen komplexer Zahlen und die Potenzen n Exponenten können wir erst später erklären.

§ 50. Funktionen zweiten Grades.

1. Nach der Einführung der imaginären Zahlen is lich, die Gleichungen zweiten Grades ganz allgemein au die Diskriminante positiv oder negativ sein, und selbs wenn die Koeffizienten und die Diskriminante selbst Wir erhalten immer zwei Wurzeln, abgesehen von d die Diskriminante verschwindet. In diesem Falle ist nu vorhanden.

Der Ausdruck

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{D}}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

und hieraus:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2),$$

also

(1) $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Hiermit haben wir den Satz gewonnen:

Eine Funktion zweiten Grades läßt sich in einen faktor a und in zwei Faktoren ersten Grades $x - x_1$ zerlegen.

Aus der Zerlegung selbst ersieht man sofort, daß $f(x)$ fü und $x = x_2$ verschwindet. Die Zerlegung (1) gilt aber allge jeden beliebigen Wert der unbestimmten Größe x und wir eine Identität genannt. Die Größen x_1, x_2 werden auch d zeln der Funktion $f(x)$ (anstatt Wurzeln der Gleichung genannt.

Zur Auffindung dieser Zerlegung muß man die Wur quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ kennen, und der Satz s wesentlich identisch mit dem früher bewiesenen, daß jede tische Gleichung zwei Wurzeln hat. Er hat aber vor die Vorzug, daß auch der Fall einer verschwindenden Diskrimina Ausnahme bildet. In diesem Falle werden beide lineare identisch, und es wird

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

das Quadrat einer linearen Funktion.

Um beide Sätze in völlige Übereinstimmung zu bring man, daß im Falle einer verschwindenden Diskrimina im allgemeinen verschiedenen Wurzeln der quadra

hängige Koeffizient gleich dem Produkt und d
nante gleich dem Quadrat der Differenz der Wu

Hierin zeigt es sich unmittelbar, daß D dann und
schwindet, wenn $x_1 = x_2$ wird.

4. Hiernach führt die Aufgabe, zwei Zahlen z
deren Summe und Produkt gegeben sind, auf eine
Gleichung. Sind die unbekannten Zahlen x und y u

$$x + y = a, \quad (3)$$
$$xy = b$$

gegeben, so sind x und y die Wurzeln der quadratisc

$$z^2 - az + b = 0,$$

und man kann nach Belieben die eine dieser Wurze
andere für y setzen, so daß man nur eine Lösung der
gabe erhält. Man findet die Lösung direkt, wenn man
Gleichungen (3) ins Quadrat erhebt, und das Vierfach
davon subtrahiert:

$$(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 = a^2 - 4b,$$

folglich

$$x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$$

und folglich

$$2x = a + \sqrt{a^2 - 4b}, \quad 2y = a - \sqrt{a^2 - 4b}.$$

Gibt man der Quadratwurzel das andere Zeichen, so v
x mit y.

Ist die Differenz und das Produkt gegeben, also

$$x - y = a, \quad xy = b,$$

so folgt ebenso

$$(x - y)^2 + 4b = (x + y)^2 = a^2 + 4b,$$

folglich

Wenn eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten eine imaginäre Wurzel hat, so hat sie auch eine zweite, zur ersten konjugiert imaginäre Wurzel.

Wenn man aber auch imaginäre Koeffizienten in der quadratischen Gleichung zuläßt, so kann man immer eine quadratische Funktion $(x - \alpha)(x - \beta)$ bilden, deren Wurzeln zwei beliebig gegebene Zahlen α, β sind.

§ 51. Geometrische Darstellung imaginärer Zahlen.

1. Wie man die Gesamtheit der reellen Zahlen geometrisch auf einer geraden Linie darstellt, so kann man die komplexen Zahlen in einem Raumgebiete von zwei Dimensionen, z. B. in einer Ebene darstellen.

Wir denken uns eine Ebene und in ihr zwei zueinander rechtwinklige Gerade, die wir die Koordinatenachsen, die eine die x-Achse, die andere die y-Achse, nennen. Den Schnittpunkt der beiden Geraden nennen wir den Nullpunkt oder den Anfangspunkt und betrachten ihn als Bild für die Zahl Null.

Auf jeder der beiden Achsen unterscheiden wir, vom Nullpunkt ausgehend, nach Willkür eine positive und eine negative Seite. Wir wollen, um das Bild zu fixieren, uns die x-Achse etwa von West nach Ost, die y-Achse von Süd nach Nord gerichtet denken, und auf der x-Achse die Osthälfte, auf der y-Achse die Nordhälfte positiv nennen (man denke an eine Landkarte).

Jede dieser Achsen teilt die Ebene in zwei Halbebenen, von denen wir die eine, die die positive Hälfte der anderen Achse enthält, die positive Halbebene nennen, die andere die negative.

Wir setzen nun noch eine Längeneinheit (etwa das Zentimeter) fest und tragen vom Nullpunkt aus ein Zahlenpaar x, y mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen als zwei Strecken auf der x-Achse und der y-Achse ab.

Den Punkt z betrachtet man auch als das Bi
nären Zahl

(1) $$z = x + yi.$$

Auf diese Weise entspricht jedem Punkte d
imaginäre Zahl, und umgekehrt wird jede in
durch einen und nur einen Punkt der Ebene d

Ebenso wie man die reellen Zahlen auf einer
einerseits durch Punkte, andererseits durch Strecken
wobei die positiven Zah
der einen Richtung (etw
die negativen Zahlen S
entgegengesetzten Rich
so kann man die kor
durch gerichtete Str
lichen, wobei aber ni
Richtungen, sondern alle
einer Ebene in Betracht
würde uns in der Fig.
oz, in der Richtung

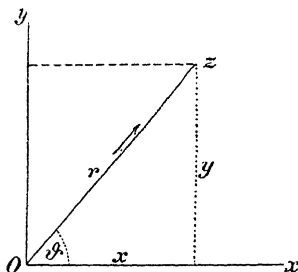


Fig. 8.

nommen, ein Bild der komplexen Zahl z sein.

Hiernach ist es eine durchaus naturgemäße Be
Weierstraß, daß man die Strecke $oz = r$, ohne Rü
Richtung, den absoluten Wert der komplexen Zah
numerischer Ausdruck ist, wie sich aus dem rechtwi
mit den Katheten x, y und der Hypotenuse r ergibt,

(2) $$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Richtung der Strecke oz wird bestimmt dur
den sie mit einer festen Richtung, z. B. mit der pos
bildet.

ngen, die sich um positive oder negative Vielfache von 360 G neinander unterscheiden.

Anstatt den Winkel in Graden zu messen, wird er auch oft genmaß gemessen (§ 31). Dann erhält der Winkel von 180 G Maßzahl π, eine volle Drehung die Maßzahl 2π. Unter der Ph rstehen wir dann einen Winkel, der zwischen 0 und 2π oder zwisc π und $+\pi$ liegt.

2. Die Darstellung komplexer Zahlen durch gerichtete Strec besonders zweckmäßig zur Veranschaulichung der Addition btraktion.

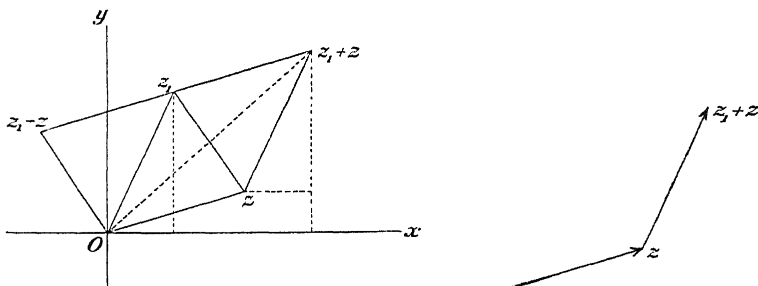
Die Summe zweier komplexen Zahlen

$$z = x + yi, \quad z_1 = x_1 + y_1 i$$

nach § 48, 4.

$$z_1 + z = x_1 + x + i(y_1 + y).$$

ese Summe wird also durch einen Punkt dargestellt, dessen Koo ten $x_1 + x$, $y_1 + y$ sind, und diesen Punkt erhält man, wie g. 9 zeigt, als vierten Eckpunkt eines Parallelogramms, und z m Nullpunkt gegenüberliegend, von dem drei Ecken die Pun z, z_1 sind.



Man erhält dann einen gebrochenen Strec
$z + z_1 + z_2$ usw., in dem jede Strecke ihre eig
und Richtung hat. Der Endpunkt dieses Zuges s
Summe dar.

Wenn man die Summanden untereinander ver
man zwar andere Streckenzüge, aber immer den g
worin das kommutat
tion seinen Ausdru

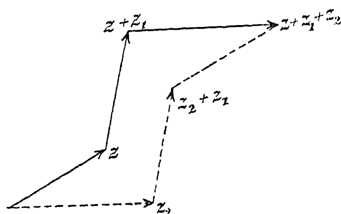


Fig. 11.

Die Subtrakti
tion der entgegen
betrachtet werden.
also die Differenz z
die Strecke z am
in der ihr entgegen
anträgt.

3. Zur Darstellung der komplexen Zahlen dur
den absoluten Wert benutzt man die trigonometri
$\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, deren geometrische Theorie im 2. Ba
deren einfachste Eigenschaften hier vorausgesetzt w

Es sei daran erinnert, daß in einem rechtwinl
dem ein spitzer Winkel $= \vartheta$ ist, das Verhältnis der g
Kathete zur Hypotenuse der Sinus von ϑ, das V
liegenden Kathete zur Hypotenuse der Kosinus von
diese beiden Funktionen mit $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ bezeichnet
diesen bestehen die Relationen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos\vartheta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \quad \vartheta\right) \quad \text{s}$$

$$\sin\vartheta^2 + \cos\vartheta^2 \quad 1.$$

Geht man über den spitzen Winkel hinaus, so bes
Funktionen durch die Gleichungen

$$\cos(\vartheta + \vartheta_1) = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta + \vartheta_1) = \sin\vartheta \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\cos(\vartheta - \vartheta_1) = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta - \vartheta_1) = \sin\vartheta \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta \sin\vartheta_1,$$

l den Kosinussatz aus der Trigonometrie, nach dem, wenn a, l Seiten eines Dreiecks, α der der Seite a gegenüberliegende Win die Relation besteht

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

4. Betrachten wir hiernach das rechtwinklige Dreieck r, x, y ;. 8, so ergibt sich

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

er

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

d diese Formel gilt allgemein, in welchem der vier Quadranten ene der Punkt z liegen mag, und sie t auch noch, wenn man unter ϑ nicht Phase, sondern den Winkel einer bebigen Drehung, die zu z führt, versteht.

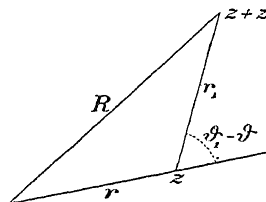


Fig. 12.

5. Es seien z, z_1 zwei komplexe ößen mit den absoluten Werten r, r_1 d den Phasen ϑ, ϑ_1. Die Summe $z + z_1$ be den absoluten Wert R (Fig. 12). Dann gibt sich aus dem Dreieck R, r, r_1, in m der Winkel zwischen r und r_1 gleich $\pi - (\vartheta_1 - \vartheta)$ ist:

$$R^2 = {r_1}^2 + r^2 + 2rr_1\cos(\vartheta_1 - \vartheta),$$

d das kann man in den beiden Formen darstellen:

$$R^2 = (r_1 + r)^2 - 2rr_1(1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta)),$$
$$R^2 = (r_1 - r)^2 + 2rr_1(1 + \cos(\vartheta_1 - \vartheta)).$$

der absoluten Werte, wenn $\vartheta_1 = \vartheta$ und nur dann gleich der Diffe
der absoluten Werte, wenn $\vartheta_1 + \vartheta$ gleich zwei Rechten ist. In d
beiden Fällen ist der Quotient $z/z_1 = \pm\, r/r_1$, also reell und zwa
ersten Fall positiv, im zweiten negativ.

6. Um die Multiplikation und die Division geometrisch zu
anschaulichen, setzen wir

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1),$$

und bilden nach § 48, 4.

$$z z_1 = r r_1\,[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta\cos$$
$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r}\,[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta\cos$$

also nach den Additionsformeln (Nr. 3):

$$z z_1 = r r_1\,[\cos(\vartheta_1 + \vartheta) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta)],$$
$$(10) \qquad \frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r}\,[\cos(\vartheta_1 - \vartheta) + i\sin(\vartheta_1 - \vartheta)].$$

Setzen wir

$$z z_1 = R\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$\frac{z_1}{z} = R'(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

so folgt

$$R = r r_1, \quad R' = \frac{r_1}{r}.$$

Nehmen wir, wie oben festgesetzt, die Phasen zwischen 0 u
an, so kann $\vartheta_1 - \vartheta$ negativ und $\vartheta_1 + \vartheta$ größer als 2π sein, a
Differenz ist größer als -2π, die Summe kleiner als 4π
haben also

$$\theta = \vartheta_1 + \vartheta, \qquad \text{wenn } \vartheta_1 + \vartheta < 2\pi,$$

7. Diese Sätze ergeben für die Konstruktion des Produk folgende Regel.

Man trage auf der positiven x-Achse die Strecke 1 (die I einheit) ab und konstruiere zu dem Dreieck $(o, 1, z)$ ein ähn Dreieck (o, z_1, z_2). Dann ergibt sich aus den Sätzen über ä Dreiecke (vgl. den zweiten Band):

$$r_2 : r_1 = r : 1,$$

also $r_2 = rr_1 = R$ und der Winkel $z_2 o 1 = \vartheta + \vartheta_1 = \theta$. Folgl z_2 der Punkt, der das Produkt zz_1 repräsentiert. Und auf die gleiche Weise erhält man den Quotienten $z_1 = z_2/z$, wenn man zwei ähnliche Dreiecke $(o, 1, z)$ und (o, z_1, z_2) konstruiert.

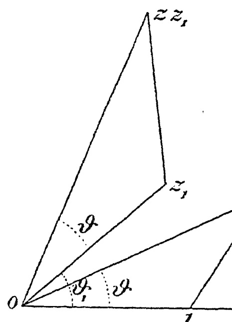


Fig. 13.

Der Quotient z_2/z wird durch den Punkt dargestellt, der zu dem Punkt z_2 ebenso liegt, wie der Einheitspunkt zum Punkte z.

8. Setzt man $\vartheta_1 = \vartheta$, $r_1 = r$, so ergibt die Multiplikationsformel (10) (Nr. 6)

$$z^2 = r^2 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta),$$

und wenn man in der gleichen Formel $z_1 = z^2$, $r_1 = r^2$, ϑ setzt, so folgt

$$z^3 = r^3 (\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta),$$

und so ergibt sich allgemein

$$z^n = r^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta), \tag{11}$$

eine Formel, die man mittels der vollständigen Induktion all beweist, wenn man in (10) $z_1 = z^n$, $r_1 = r^n$, $\vartheta_1 = n\vartheta$ setzt.

Wenn man aber in der zweiten Formel (10)

$$z_1 = 1, \quad r_1 = 1, \quad \vartheta_1 = 0$$

wenden hat, um Potenzen mit nicht ganzzahligen Exp
klären, werden wir später sehen.

Was die Geschichte der imaginären Zahlen betri
erwähnen, daß die Erscheinung, daß Gleichungen un
keine Wurzeln mehr im Gebiete der Zahlen haben, be
ist, sobald man anfing, sich mit solchen Gleichungen z
daß man aber auch sehr früh schon angefangen hat,
nungen mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ auszuführen, als o
wirkliche Zahlen handle. Es findet sich dies schon bei
Cardanus (1501—1576), der den negativen Wurzel
Umständen einen gewissen Sinn beilegt, während er
nären Symbole nicht zu deuten weiß. Wir werden im se
schnitt sehen, daß auch reelle Wurzeln kubischer Gle
der Cardanischen Formel in gewissen Fällen nur in d
Summe konjugiert imaginärer Ausdrücke dargestellt w
Hier lag also ein direkter Anlaß zur Rechnung mit dem
Dies hat Bombelli zuerst klar erkannt. Descartes
braucht bereits die Ausdrücke „reelle Wurzeln“ und „i
zeln“. Auf diesem Standpunkte blieb die Anschauung der
bis in das 19. Jahrhundert stehen, wiewohl das formal
imaginären Größen immer mehr und mehr angewandt u
wurde, so von Leibniz, Newton, d'Alembert, und
Euler. Es haftete aber dem Begriff immer etwas myst
man erkannt hat, daß es sich hier lediglich um eine nat
erlaubte Weiterbildung des vom menschlichen Geiste ges
begriffs handelt, die bei der Darstellung gewisser Be
Dingen dieselbe Realität und dieselbe Berechtigung hat,
Zahlen. Klarheit wurde darüber vorzugsweise durch die
Cauchy und Gauß geschaffen, von letzterem rührt die
Darstellung imaginärer Zahlen her.[1])

Neunter Abschnitt.

Permutationen und Kombinationen.

§ 52. Permutationen.

1. Wenn man eine endliche Menge von Dingen hat, deren Z
r mit n bezeichnen wollen, so können wir, wie wir schon frü
sehen haben, diese Zahl auf mehrere verschiedene Arten abzähl
t anderen Worten, wir können diese Dinge auf verschiedene Ar
n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ zuordnen, oder wie wir auch sagen könn
lassen sich diese Dinge auf mehrere Arten anordnen.

Ein einzelnes Ding läßt sich natürlich nur auf eine Art
dnen, zwei Dinge a, b auf zwei Arten ab, ba, drei Dinge a, b
f sechs Arten abc, acb, bac, bca, cab, cba. Man erhält di
ordnungen, wenn man jedes der drei Elemente a, b, c an die er
elle setzt und dann die beiden übrigen in je zwei Anordnung
gen läßt.

Diese verschiedenen Anordnungen heißen die Permutation
: n Elemente der Menge. Diese Permutationen selbst bilden,
ersten Fälle zeigen, selbst eine endliche Menge; dies wollen
n durch vollständige Induktion allgemein beweisen, indem wir

Nun ist $\Pi(1) = 1$, $\Pi(2) = 2$, also $\Pi(3) = 2 \cdot 3$
(nach der vollständigen Induktion)

(2) $$\Pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

d. h. gleich dem Produkt aller ganzen Zahlen v

Dieses Produkt wird auch durch das Zeichen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

bezeichnet und die Fakultät von n (n-Fakultät) gena

Hierdurch ist die Anzahl der Permutationen ein
n Elementen vollständig bestimmt.

Die Formel (1) läßt sich verallgemeinern. Den
natürliche Zahl und $m < n$, so ist

(3) $$\Pi(n) = (m+1)(m+2)\cdots n\,\Pi(m).$$

Die Zahl $\Pi(n)$ wächst sehr schnell mit n. Es ist

$\Pi(1) = 1$, $\Pi(2) = 2$, $\Pi(3) = 6$, $\Pi(4) = 24$,
$\Pi(6) = 720$, $\Pi(7) = 5040$, $\Pi(8) = 40\,320$, $\Pi($

$$\Pi(10) = 3\,628\,800.$$

In Bezug auf das Wachsen der Zahl $\Pi(n)$ gilt der folgen
Satz:

2. Ist a eine beliebige positive Zahl, größer a
man m so groß annehmen, daß $\Pi(n) > a^n$ ist, soba

Um den Satz zu beweisen, nehme man eine ganz
an. Dann ist $a/p = \Theta$ ein positiver echter Bruch, und
n eine noch größere ganze Zahl ist,

$$\frac{a}{p+1} < \Theta, \quad \frac{a}{p+2} < \Theta, \quad \ldots, \quad \frac{a}{n} < \Theta,$$

folglich, wenn man das Produkt aller dieser Größen bil

$$\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)\cdots n} < \Theta^{n-p}.$$

3. Unter einem Polygon (Vieleck, n-Eck) versteht man ei nienzug, der gegebene n Punkte, einen nach dem anderen tr d schließlich zum Ausganspunkt zurückkehrt. Unter Umstän nnen sich diese Linien auf ihrem Wege durchkreuzen, wie bei genannten überschlagenen Vielecken. Wir können nun die Fr antworten, wie viele n-Ecke sich aus gegebenen n Punk lden lassen. Da wir bei jedem Polygon von einem beliebi nfangspunkt ausgehen können, so können wir auch bei allen die lygonen denselben Anfangspunkt wählen. Die übrigen $(n-1)$ Pun ssen sich noch in $\Pi(n-1)$ Reihenfolgen durchlaufen. Von die er geben, wenn $n > 2$ ist, je zwei dasselbe Polygon, das v sgangspunkt an in den beiden entgegengesetzten Richtungen du fen wird. Die übrigen Reihenfolgen aber geben lauter von der verschiedene Polygone. Es gibt also $\frac{1}{2}\Pi(n-1)$ Polyg o z. B. aus drei Punkten ein Dreieck, aus vier Punkten erecke, aus fünf Punkten zwölf Fünfecke, aus sechs Punk hzig Sechsecke u. s. f. Der Leser wird sich leicht an einfac izzen die Lage dieser Polygone klar machen.

§ 53. Gerade und ungerade Permutationen.

1. Wir wollen die Ziffern 1, 2, 3, . . ., n, die der Größe n feinander folgen, als Bezeichnung der Elemente nehmen. Ur n Permutationen ist eine:

$$E = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

der die Ziffern in ihrer natürlichen Reihenfolge aufeinan gen, und diese nennen wir die Hauptpermutation. Irgend e dere sei

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

seinen Platz bekommen, so verfahre man ebenso mit 2 u
gelangt dann nach höchstens $n-1$ solchen Umstellun
einer vorgeschriebenen Permutation A. Diese Umstell
zwei Elementen heißen Transpositionen, und es e
daß man jede Permutation durch eine Reihe nac
geführter Transpositionen aus der Hauptpermutation
Ebenso kann man aber auch, von jeder anderen als de
tation ausgehend, durch Transpositionen zu einer v
Permutation gelangen. Dies kann aber auf unendlich
dene Arten geschehen, z. B. so, daß man zuerst blin
sitionen in beliebiger Anzahl ausführt und dann erst
der beschriebenen Art fortfährt.

2. Die $n!$ Permutationen der n Ziffern $1, 2, 3, \ldots$
nach folgendem Gesichtspunkt in zwei Klassen teilen:

Wir bezeichnen es als Inversion, wenn in einer
eine niedrigere Ziffer an einer späteren Stelle steht a
Wenn man also irgend zwei Elemente a_h, a_k aus A h
liefern diese, falls $h < k$ ist, eine Inversion, wenn a
keine Inversion, wenn $a_h < a_k$ ist. Es weist also jede
eine bestimmte Anzahl von Inversionen auf, mit
Hauptpermutation E, die gar keine Inversion hat. D
$n, n-1, n-2, \ldots, 1$ z. B. hat

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\tfrac{1}{2}n($$

Inversionen, und dies ist die Maximalzahl von Invers
kommen kann. In dem Beispiel $n=3$ ist 0, 2,
Anzahl der Inversionen von $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,$
Anzahl der Inversionen teilen wir nun die Permuta
Klassen ein:

Gerade Permutationen sind solche, die
Anzahl (einschließlich Null) von Inversionen hab

Ist a_l ein Element, das in A zwischen a_h und a_k steht, ten die beiden Paare

$$a_h, a_l; a_l, a_k$$

ine, eine oder zwei Inversionen, und die Paare

$$a_k, a_l; a_l, a_h$$

ei, eine oder keine Inversion, also hat sich die Anzahl die ersionen um zwei vermehrt, nicht geändert, oder um zwei v ndert, also jedenfalls um eine gerade Zahl verändert. Endli nn a_h, a_k eine Inversion bietet, so bietet a_k, a_h keine, u nn a_h, a_k keine Inversion bietet, so bietet a_k, a_h eine Inversi o eine Änderung um 1. Damit ist aber unsere Behauptu viesen.

Daraus folgt sofort:

4. Die Anzahl der geraden Permutationen ist eben oß wie die der ungeraden Permutationen, nämlich $\frac{1}{2}$ nn wenn man in allen Permutationen A irgend zwei Elemen va 1 und 2, miteinander vertauscht, so geht jede gerade P tation in eine ungerade und jede ungerade in eine grade Pern ion über und niemals zwei verschiedene Permutationen in iche.

5. Wenn man alle Permutationen der n Elemente aus uptpermutation durch wiederholte Transpositionen ableitet, so lt man, wie man die Operationen auch anordnen mag, die gerad rmutationen durch eine gerade Anzahl, die ungeraden durch e gerade Anzahl von Transpositionen:

Denn jede Transposition ändert ja die Anzahl der Inversion eine ungerade Zahl.

Beispiel für die willkürliche Schöpfung von Zal Rechenoperationen geben, so wollen wir sie hier in trachten.

2. Um von der Hauptpermutation von n Elemen

$$E = 1, 2, 3, \ldots, n$$

zu einer anderen Permutation

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

zu gelangen, hat man das Element 1 durch a_1, das E $a_2, \ldots,$ das Element n durch a_n zu ersetzen. Man n ration eine *Substitution*, und bezeichnet sie über Weise, daß man das Element, welches für ein andere *unter* dieses schreibt, also

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen diese Substitution auch durch einen staben, etwa S, und nennen (1) die Substitution S. Di S führt also von der Hauptpermutation E zu der Per

Es ist nun offenbar gleichgültig, in welcher Reih alten Elemente $1, 2, 3, \ldots, n$ durch die neuen $a_1, a_2, \ldots$ man z. B. zuerst 1 durch a_1, dann 2 durch a_2 oder zu dann 1 durch a_1 ersetzt, und es kann daher die Subs so geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & 3, & \ldots, & n \\ a_2, & a_1, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix}$$

oder allgemeiner, man kann die *einzelnen Paare* *stehender Ziffern* in (1) beliebig permutieren, ohn deutung dieses Zeichens sich ändert.

Nehmen wir irgend ein Element h aus der Reihe

3. Wenn man die Vertauschungen von S nicht in E, sond
einer anderen Permutation B macht, so ergibt sich, wie die D
llung (2) zeigt, eine neue Permutation

$$) \quad M = a_{b_1}, a_{b_2}, \ldots, a_{b_n},$$

e wir mit A_b bezeichnen könnten. Wir ziehen es aber vor, da
s Zeichen

$$) \quad M = BA$$

gebrauchen, was an die Multiplikation erinnert, aber natürl
ine wahre Multiplikation bedeutet.

4. Wir haben hier ein Verfahren kennen gelernt, nach d
n aus zwei Permutationen A, B eine bestimmte dritte ablei
nn, also eine Rechenvorschrift im Gebiete der Permutation
ir wählen dafür das Zeichen der Multiplikation als das einfach
as Zeichen der Addition wäre an sich ebenso berechtigt). Um a
rwechselungen zu vermeiden, wollen wir die Operation nicht Mu
kation sondern Komposition oder Zusammensetzung nenn
ir heben noch ausdrücklich hervor, daß diese Komposition
sführbar ist unter den Permutationen von einer bestimmten Anz
n Elementen, die während der ganzen Betrachtung eine unveränd
deutung haben.

Um die Zusammensetzung an einem einfachen Beispiel zu
tern, wollen wir $n = 4$ und

$$A = 1, 3, 4, 2, \quad B = 3, 2, 1, 4$$

nehmen. Um daraus BA zu erhalten, haben wir die Vertauschung
von $E = 1, 2, 3, 4$ auf A führen, in B auszuführen. So
lten wir

$$BA = 4, 3, 1, 2.$$

enso findet sich aber

$$AB = 3, 1, 4, 2.$$

eses Beispiel schon zeigt, daß bei der Komposition das komm

dann ist

(5) $$BA = a_{b_1}, a_{b_2}, \ldots, a_{b_n}.$$

Um daraus $C(BA)$ abzuleiten, hat man die durch
Vertauschung von E in C auszuführen, d. h. man
also c_1 durch $a_{b_{c_1}}$ u. s. w. zu ersetzen und erhält

(6) $$C(BA) = a_{b_{c_1}}, a_{b_{c_2}}, \ldots, a_{b_{c_n}}.$$

Andererseits ist

$$CB = b_{c_1}, b_{c_2}, \ldots, b_{c_n},$$

und um also $(CB)A$ zu bilden, hat man die Vertaus
zu A führt, in CB vorzunehmen, also 1 durch a_1, 2 d
ersetzen. Demnach ist b_{c_1} durch $a_{b_{c_1}}$ zu ersetzen, und ma

$$(CB)A = a_{b_{c_1}}, a_{b_{c_2}}, \ldots, a_{b_{c_n}},$$

wodurch das assoziative Gesetz bewiesen ist. Wi
der Bezeichnung die Klammern weglassen und nun
(in dieser Reihenfolge) kombinierte Permutation
zeichnen. Ebenso lassen sich Permutationen in beli
ponieren, wobei ein und dieselbe auch mehrmals vo

6. Eine Permutation A bleibt ungeän
mit der Hauptpermutation komponiert wird
welcher Reihenfolge diese Komposition st
es ist

$$EA = AE = A.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition
nach der man EA erhält, wenn man die Vertausc
zu A führt, in E ausführt, d. h. A, und AE die
man aus A erhält, wenn man darin die Vertausc
von E zu E führt, d. h. gar keine Vertauschung, also v

Es spielt also E bei der Komposition dieselb

μ und ν ganze positive Zahlen sind und $A^{\mu}A^{\nu}$ die Kompositi
ı A^{μ} mit A^{ν} bedeutet. Diese Formel gilt auch noch für $\mu =$
l $\nu = 0$, wenn man definitionsweise

$$A^0 = E$$

zt, was wieder durch die Analogie von E mit der Zahl 1 na
.egt wird.

8. Zu jeder Permutation A gibt es eine und nur eine
e der Bedingung

$$A'A = E$$

nügt. Denn soll $BA = E$ sein, so muß nach 3.

$$a_{b_1} = 1, \quad a_{b_2} = 2, \quad \ldots, \quad a_{b_n} = n$$

n; und da nun die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit den Ziffern $1, 2, \ldots, n$
ıer bestimmten Ordnung übereinstimmen, so sind hierdurch $b_1, b_2, \ldots$
ıdeutig bestimmt.

Die Permutation A' heißt zu A entgegengesetzt oc
ziprok.

9. Die Reziproke von der Reziproken ist wieder
sprüngliche Permutation A.

Es folgt nämlich aus $A'A = E$:

$$A'AA' = A',$$

.d wenn also A'' zu A' reziprok, also $A''A' = E$ ist:

$$A''A'AA' = A''A' = E,$$

lglich auch, wenn man im ersten Gliede dieser Doppelgleichu
$''A' = E$ setzt,

$$AA' = E,$$

h. es ist A zu A' reziprok, wie bewiesen werden soll. Betrac
an wieder E als Einheit, so bezeichnet man zweckmäßig A'
e -1te Potenz von A und setzt also

entweder C und A oder C und B gegeben sind, so
dritte Permutation B oder A nach den Formeln

$$B = CA^{-1}, \quad A = B^{-1}C,$$

und es ergibt sich der Satz:

Sind A, M, N Permutationen und ist $AM = A$
und N identisch sein. Dies folgt aus

$$A^{-1}AM = A^{-1}AN,$$

und den gleichen Schluß können wir ziehen, wenn M

12. Komponiert man zwei gerade oder zwei un
tationen, so entsteht eine gerade Permutation. Kompo
eine gerade mit einer ungeraden, so entsteht eine
mutation.

Da die Permutation E zu den geraden gehört,
zwei entgegengesetzte Permutationen A und A' zu
gehören.

§ 55. Darstellung der Permutationen durch C

1. Um eine Übersicht über die Mannigfaltigkeit der
gegebener n Elemente zu gewinnen, und zugleich di
leichter ausführen zu können, dient eine andere Darste
mutation, nämlich durch ihre Cyklen, die wir jetzt
müssen.

Wir betrachten eine bestimmte Permutation

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

und es sei r eine beliebige Nummer aus der Reihe 1,

An r^{ter} Stelle steht in A das Element a_r,

„ $a_r{}^{\text{ter}}$ Stelle „ „ A „ „ a_{a_r}, das wir mit a_r'

„ $a_r'^{\text{ter}}$ Stelle „ „ A „

Auf das letzte Element $a_r^{(h-2)}$ muß man sich das erste, r, wie
gen denken.

Es kann vorkommen, daß $h = 1$ ist; dann ist $a_r = r$, und
ement r steht also in A an derselben Stelle wie in E.

Wenn wir statt von r von a_r oder a_r' u. s. w. ausgehen, so
lten wir die Cyklen

$$(a_r, a_r', \ldots, a_r^{(h-2)}, r),$$
$$(a_r', a_r'', \ldots, a_r^{(h-2)}, a_r, r), \ldots,$$

wir als nicht wesentlich verschieden betrachten.

2. Wenn $h < n$ ist, so sind durch $\mathfrak{C}_1$ die Elemente noch ni
chöpft. Wir nehmen dann eine Ziffer s, die in $\mathfrak{C}_1$ noch nicht e
lten ist, und bilden einen zweiten Cyklus

$$\mathfrak{C}_2 = (s, a_s, a_s', \ldots, a_s^{(k-2)})$$

n k Gliedern, und fahren so fort, bis alle Ziffern erschöpft si
f diese Weise kann man die ganze Permutation A in Cyklen a
en und diese Cyklen sind durch A vollständig bestimmt. A
ch umgekehrt ist durch die Gesamtheit der Cyklen die Permutat
vollständig bestimmt. Denn in diesen Cyklen ist genau angegeb
lches Element an irgend einer, etwa an s^{ter} Stelle steht. M
an daher die Permutation A durch die Cyklen eindeutig bezeichn

$$A = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots,$$

bei die Reihenfolge, in der die $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ geschrieb
rden, gleichgültig ist. Jede der Ziffern 1, 2, 3, ...
mmt bei dieser Darstellung in einem aber auch nur
nem der Cyklen vor.

Die eingliedrigen Cyklen bedeuten Elemente, die in A an ih
türlichen Stelle stehen, und diese werden bei der Darstellung
wöhnlich nicht geschrieben, so daß in dieser Darstellung nur

an 1. Stelle steht 7 (was auf 1 folgt),
„ 2. „ „ 3,
„ 3. „ „ 5 (was cyklisch auf 3 f
„ 4. „ „ 1,
„ 5. „ „ 2,
„ 6. „ „ 4,
„ 7. „ „ 6.

3. Bei der Darstellung der Permutationen dur
die Ausführung der Komposition vereinfacht. Wir se

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$
$$B = b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n,$$

und wollen

$$BA = a_{b_1}, a_{b_2}, \ldots, a_{b_n}$$

in seine Cyklen auflösen. Ist r ein beliebiges Elem
in den Cyklen von B ein Teil vor

$$(r, b_r, \ldots),$$

ebenso kommt in den Cyklen von A vor

$$(b_r, a_{b_r}, \ldots)$$

und unter den Cyklen von BA

$$(r, a_{b_r}, \ldots).$$

Daraus ergibt sich aber die einfache Vorschrift,
die Cyklen von BA zu bilden, auf ein beliebiges Ele
ment folgen lassen muß, das in A auf das Element
B auf r folgt.

4. Die Übung an einigen beliebig herausgegriff
wird mit diesem Verfahren leicht vertraut machen.

5. Sehr einfach ist bei der Darstellung durch Cyklen die B
ng der Potenzen einer Substitution. Man hat, um A^2 aus A
eiten, in jedem Cyklus immer ein Element zu überspringen. U
zu erhalten, überspringe man zwei Elemente u. s. f. So ist
n oben benutzten Beispielen

$$A^2 = (5, 3, 2)\,(4, 7)\,(1, 6),$$
$$A^3 = (5)\,(3)\,(2)\,(4, 6, 7, 1).$$

enn man A^{12} bildet, so erhält man die Hauptpermutation. M
ht hieraus, daß sich bei der Potenzierung ein Cyklus in zwei o
ch in mehrere zerlegen kann.

6. Wenn wir die Permutationen durch Cyklen in der We
rstellen, daß wir eingliedrige Cyklen nicht schreiben, so stellt je
klus von h Gliedern für sich eine bestimmte Permutation d
B. bei $n = 7$

$$(5, 3, 2) = 1, 5, 2, 4, 3, 6, 7$$

d dann hat das Nebeneinanderstellen verschiedener Cyklen,
in gemeinsames Element enthalten, genau die Bedeutung der Ko
sition im früheren Sinne.

Wenn wir den Cyklus $(1, 2, 3, \ldots, h-1)$ komponieren mit ei
ansposition $(h, h-1)$, so ergibt sich:

$$(h, h-1)\,(1, 2, 3, \ldots, h-1) = (1, 2, 3, \ldots, h-1, h),$$

d daraus folgt, daß man einen Cyklus von h Gliedern auflö
nn in $h-1$ Transpositionen:

$$(1, 2, 3, \ldots, h) = (h, h-1)\,(h-1, h-2) \ldots (2, 1),$$

orin die Zusammenstellung auf der rechten Seite die Bedeutung
omposition hat.

Man schließt hieraus, daß ein Cyklus zu einer **gerad**
ler einer **ungeraden** Permutation gehört, je nachdem
liederzahl des Cyklus ungerade oder gerade ist.

$$A, A^2, A^3, A^4, \ldots$$

ein früher schon dagewesenes Element endlich wiederk
eine dieser Potenzen A^k zum ersten Male mit dem Expo
wiederkehrt, so ist

$$A^k = A^{k+\alpha},$$

und daraus folgt

$$A^\alpha = E.$$

Es gibt also für jede Permutation A eine
kleinsten positiven Exponenten α, für den A^α
permutation ist.

Dieser kleinste positive Exponent heißt der Grad
tion A. Die Reihe

$$E, A, A^2, A^3, \ldots, A^{\alpha-1}$$

enthält lauter voneinander verschiedene Permutationen u
der aufeinander folgenden Potenzen von A besteht aus
lichen Wiederholung dieser Reihe, die darum die Per
genannt wird. Erhebt man A in eine Potenz, deren
Vielfaches von α ist, so erhält man immer E.

2. Ein aus der Gesamtheit der Permuta
n Elementen herausgegriffenes System $\mathfrak{G}$

$$(\mathfrak{G}) \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots, A_g$$

heißt eine Permutationsgruppe, wenn es der fol
dingung genügt:

Sind A_h, A_k irgend zwei Permutationen au
auch zweimal dieselbe, so gehört die nach dem
tionsgesetz gebildete Permutation

$$A_h A_k = A_l$$

ebenfalls zu dem System $\mathfrak{G}$.

3. Wenn in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Element A (vom Grade
rkommt, so kommen auch alle Potenzen von A, zunächst die r
sitiven Exponenten, darin vor, folglich auch $A^\alpha = E$.

Jede Gruppe enthält also die Hauptpermutation E, u
Hauptpermutation E bildet für sich eine Gruppe vom Grade

Nach der Erklärung der Potenzen mit negativem Exponenten

$$A^{-k}A^k = E,$$

$A^{-k} = A^{\alpha-k}$, und daraus folgt, daß, wenn A in der Gruppe
rkommt, auch A^{-k}, d. h. die zu A reziproke Permutation, da
thalten sein muß.

4. Wenn in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Grade g die sän
chen Elemente einer anderen Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Grade h e
lten sind, so ist h ein Teiler von g.

Dieser wichtige Satz läßt sich so beweisen:

Es sei

$$B_1, B_2, \ldots, B_h$$

Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Elemente nach der Voraussetzung alle in $\mathfrak{G}$ e
lten sind. Sie mögen die Gruppe $\mathfrak{G}$ noch nicht vollständig
höpfen, und es sei A eine in $\mathfrak{G}$, aber nicht in $\mathfrak{H}$ enthaltene P
tation. Wir bilden durch Komposition das System

$$AB_1, AB_2, \ldots, AB_h,$$

ssen Permutationen alle in $\mathfrak{G}$ enthalten sind und beweisen, daß
Permutationen (2) nicht nur untereinander, sondern auch von d
Permutationen (1) verschieden sind. Denn wäre etwa $AB_r = A$
folgt nach § 54, 11. $B_r = B_s$, und wäre $AB_r = B_s$, so w
$= B_s B_r^{-1}$, also A in $\mathfrak{H}$ enthalten, gegen die Voraussetzung.

Demnach enthalten (1) und (2) zusammengenommen $2h$ Perm
ionen von $\mathfrak{G}$. Wenn damit die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht erschöpft ist,

fortfahren, bis die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ erschöpft ist. Ist die
die wir so gebildet haben,

$$(4) \qquad A^{(k-2)}B_1,\ A^{(k-2)}B_2,\ \ldots,\ A^{(k-2)}B_h,$$

so ist

$$g = hk.$$

Hierin liegt der Beweis unseres Satzes.

Es ergibt sich daraus als spezielle Anwendung: Der Permutationsgruppe und der Grad irgend eines ist immer ein Teiler von $n!$.

Für jede Permutation A ist $A^{n} = E$.

5. Es ist leicht, für jedes n gewisse einfache niedrigem Grade zu bilden, z. B. die Perioden der einze tationen. Von weit größerem Interesse besonders für sind die Gruppen von den höheren Graden, und in der Bi Gruppen liegt ein großes wichtiges Problem, von dessen Lösung wir noch weit entfernt sind. Verhältnismäßig aber der Bau der Gruppen in den ersten Fällen $n =$ überschauen.

Wir bedienen uns zur Bezeichnung der Permutatio stellung durch die Cyklen, und bezeichnen überdies de halber die Hauptpermutation E, die bei der Komposition wirkt, mit (1).

Wir haben dann für $n = 3$ die 6 Permutationen

$$(1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 3),\ (1, 2, 3),\ (1, 3, 2).$$

Darin ist enthalten die Gruppe der geraden Permutation

$$(1),\ (1, 2, 3),\ (1, 3, 2)$$

vom Grade 3, die zugleich die Periode von (1, 2, 3) oder ist; ferner aber drei Gruppen vom zweiten Grade, die von (1, 2), (1, 3), (2, 3). Weitere Gruppen sind nich halten.

Die Gruppe der 12 geraden Permutationen ist

$$(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3),$$
$$(2,3,4), (2,4,3), (1,3,4), (1,4,3),$$
$$(1,2,4), (1,4,2), (1,2,3), (1,3,2).$$

rin ist eine Gruppe vom Grade 4 enthalten:

$$(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3).$$

ese letztere Gruppe ist von besonderer Bedeutung für die A
ung der Gleichung vierten Grades, und eine ähnliche Rolle spie
ei Gruppen 8ten Grades, die in der ganzen Gruppe 24ten Grades e
lten sind; deren eine ist:

$$(1),\ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3),$$
$$(1,2),\ \ (3,4),\ \ (1,4,2,3),\ (1,3,2,4),$$

s der man die beiden anderen durch Vertauschung von 1 mi
d von 1 mit 4 erhält.

7. Für $n = 5$ gibt es 120 Permutationen, und in dieser
ntheit ist eine merkwürdige Gruppe vom Grade 20 enthalten,
r auf folgendem Wege bilden können:

Wir bezeichnen die Ziffern 1, 2, 3, 4, ... mit x, wollen a
bei übereinkommen, daß zwei Ziffern, die sich um ein Vielfac
n 5 unterscheiden, kein verschiedenes Element bezeichnen soll
nn haben wir nur die fünf verschiedenen Elemente

$$1, 2, 3, 4, 5.$$

zeichnen a, b zwei ganze Zahlen, von denen a durch 5 nic
lbar ist, so stellt der Ausdruck $ax + b$ wieder dieselben Ziffern
r, in anderer Reihenfolge, und es ist also $ax + b$ der analytis
usdruck für eine Permutation, oder

$$\begin{pmatrix} x \\ ax+b \end{pmatrix}$$

oder ausgeführt

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

oder durch die Cyklen dargestellt:

$$(1, 5, 3, 4)\,(1, 5, 3, 4) = (1, 3)\,(4, 5).$$

Nun kann a jeden der vier Werte 1, 2, 3, 4, b
fünf Werte 0, 1, 2, 3, 4 haben und wir erhalten als
schiedene solche Ausdrücke, die uns die Permutation
Sie enthält die folgenden durch Cyklen dargestellten

$$(1), (1, 2, 3, 4, 5), (1, 3, 5, 2, 4), (1, 4, 2, 5, 3), (1$$
$$(1, 2, 4, 3), (1, 3, 4, 2), (1, 4)\,(2, 3),$$
$$(1, 3, 2, 5), (1, 5, 2, 3), (1, 2)\,(3, 5),$$
$$(1, 4, 5, 2), (1, 2, 5, 4), (1, 5)\,(4, 2),$$
$$(1, 5, 3, 4), (1, 4, 3, 5), (1, 3)\,(4, 5),$$
$$(2, 3, 5, 4), (2, 4, 5, 3), (2, 5)\,(3, 4).$$

§ 57. Kombinationen ohne Wiederholun

1. Es sei eine Menge N von n Elementen gege
aus dieser Menge m Elemente herausgreifen. Auf
schiedene Arten ist dies möglich? Oder, etwas ande
wie viele verschiedene Mengen M von der Z
sich aus den Elementen einer Menge von der Z

Die Mengen M heißen die Kombinationen
von N zu je m, und um auszudrücken, daß ein un
ment von N nicht zweimal in einer Menge M vorkom
man die M auch die Kombinationen ohne Wiede

Es handelt sich also um die Bestimmung der A

Nehmen wir als ein weiteres Beispiel $n = 3$, so können wir a
n Elementen a, b, c die Kombinationen bilden:

$$m = 1: \quad a, \quad b, \quad c; \quad B_1^{(3)} = 3,$$
$$m = 2: \quad bc, \quad ca, \quad ab; \quad B_2^{(3)} = 3,$$
$$m = 3: \quad abc; \quad B_3^{(3)} = 1.$$

läßt sich leicht auch für die nächsten Fälle $n = 4, 5, 6$ die Z
$^{(n)}$ durch wirkliche Abzählung ermitteln. Wir bestimmen di
hl allgemein auf folgendem Wege.

Wenn wir die sämtlichen Permutationen der Menge N bil
d aus jeder dieser Permutationen die m ersten Elemente hera
eifen, so erhalten wir gewiß alle Mengen M, die möglich si
er jede von ihnen nicht bloß einmal, sondern mehrmals. Um
ersehen, wie oft jede dieser Mengen M auf diesem Wege gebil
rd, sei

$$A = a_1, a_2, \ldots, a_m \mid a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

ne der Permutationen von N, die, wie es durch den Strich
gedeutet wird, in zwei Teile, A_1 und A_2, zerlegt ist:

$$A_1 = a_1, a_2, \ldots, a_m, \quad A_2 = a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n.$$

Wenn wir aus allen A die Elemente A_1 herausnehmen, so
lten wir die gesuchten Mengen M. Aber wir bekommen diese
enge M, wenn wir die Elemente von A_1 für sich oder die Eleme
n A_2 für sich irgend einer Permutation unterwerfen, während
ne andere Menge M aus den Permutationen erhalten, in de
nige der Elemente von A_1 durch solche aus A_2 ersetzt sind. W
halten also jede Menge M so oft als es möglich ist, eine Perm
ion von A_1 mit einer Permutation von A_2 zu verbinden; d.
$(n-m)!$ mal. Da nun die Gesamtzahl aller A gleich $n!$ und
samtzahl aller M gleich $B_m^{(n)}$ ist, so ist

$$(4) \qquad B_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-m)} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}.$$

Die $B_m^{(n)}$, die sich durch diese Ausdrücke in Form von stellen, sind aber, wie aus ihrer Bedeutung hervorgeht, und es ist also der Zähler durch den Nenner teilb zweiten Darstellung (4) können wir diesem Satze auch geben:

Das Produkt von irgend m aufeinanderfolg lichen Zahlen ist durch das Produkt der m er teilbar.

Die Formel (3) zeigt, daß sich $B_m^{(n)}$ nicht ändert, mit $n - m$ vertauscht, also ist

$$(5) \qquad B_m^{(n)} = B_{n-m}^{(n)}.$$

Bei der Ableitung der Formeln (3) und (5) war schweigend vorausgesetzt, daß $m < n$ sei. Sollen sie n gelten, so müssen wir definitionsweise setzen:

$$(6) \qquad 0! = 1, \quad B_0^{(n)} = 1,$$

und dann gilt die Formel (3) auch für $m = 0$.

2. Wir können die Zahlen $B_m^{(n)}$ noch auf einem bestimmen, auf dem wir noch einige weitere Eigens Zahlen kennen lernen werden.

Wenn wir zu den n Elementen $a_1 a_2 \ldots a_n$ der M ein Element a_{n+1} hinzufügen, so erhalten wir eine $n + 1$ Elementen

$$N' = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_{n+1}.$$

Unter den Kombinationen M' dieser Elemente zu je m

$^{n+1)}$ für $m \overline{\gtrless} n + 1$ berechnet werden, wenn wir noch $B_0^{(n)} =$ $^{n)} = 1$ hinzufügen. Durch die Relation (7) und durch die We

$$B_0^{(n)} = 1, \quad B_n^{(n)} = 1$$

also $B_m^{(n)}$ eindeutig bestimmt. Da nun der Ausdruck (3), n durch Einsetzen leicht erkennt, den Bedingungen (7), (8) gt, so ist die Richtigkeit damit aufs neue bewiesen.

Wir können aus (7) einen direkten Beweis dafür ableiten, $B_m^{(n)}$ ganze Zahlen sind. Denn für die ersten Werte vor gt es die direkte Rechnung, und dann folgt es für jedes n aus rch die vollständige Induktion.

Die Rekursionsformel (7) gestattet noch schneller als die allgeme rmel (3), die $B_m^{(n)}$ sukzessive zu berechnen, wenn man aus ihe der $B_m^{(n)}$ die Reihe der $B_m^{(n+1)}$ dadurch herleitet, daß man je z feinanderfolgende Zahlen addiert, z. B. für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

7 21 35 35 21 7

3. Auch hiervon läßt sich eine geometrische Anwendung mac f die Beantwortung der Frage:

Es ist ein System N von n Punkten gegeben und e ahl m, die kleiner ist als n; wie viele m-Ecke lassen s s diesen n Punkten zusammenstellen?

Zunächst kann man $B_m^{(n)}$ Systeme M von m Punkten bil n denen jedes nach § 52 auf $\frac{1}{2}(m-1)!$ Arten zu einem m- ordnet werden kann. Demnach ist die Gesamtzahl der aus N

zu bilden, die zwar nur Elemente von N, da
auch dasselbe mehrmals, enthalten dürfen.

Diese Mengen M heißen die Kombinationen
menten zu je m mit Wiederholung. — Die Anzah
binationen, die wir mit $C_m^{(n)}$ bezeichnen, ist zu bestimm

Hier ist nun die Beschränkung nicht mehr nötig,
als n sei. Es können vielmehr m und n beliebige
Zahlen sein.

Setzen wir $m = 1$, so haben wir jedes Element vo
nehmen, und es folgt

(1) $$C_1^{(n)} = n.$$

Nehmen wir $n = 1$, so haben wir nur ein M,
welches aus der m-maligen Wiederholung des einen
N besteht, also

(2) $$C_m^{(1)} = 1.$$

Nehmen wir $n = 2$ und m beliebig, so enthält
Elemente a, b, und wenn wir die k-malige Wiederhol
mentes der Kürze wegen durch eine Potenz a^k andeuter
wir die Kombinationen

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ \ldots,\ a b^{m-1},\ b^m.$$

Es ergibt sich also

(3) $$C_m^{(2)} = m + 1.$$

Eine direkte Bestimmung von $C_m^{(n)}$, wie in § 57, 1., s
Schwierigkeiten; dagegen führt uns das rekurrierende
§ 57, 2. leichter zum Ziel.

2. Wir fügen zu N noch ein Element a_{n+1} hinzu
aus N eine Menge N' von der Zahl $n + 1$ ab:

enn wir in der Formel (4) m durch $m-1$, $m-2$, ..., 2
zen, so ergibt sich

$$C_m^{(n+1)} = C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)},$$
$$C_{m-1}^{(n+1)} = C_{m-2}^{(n+1)} + C_{m-1}^{(n)},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$C_2^{(n+1)} = C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)},$$

d wenn wir alle diese Gleichungen addieren und dann die gleicl
ößen $C_{m-1}^{(n+1)}$, ..., $C_2^{(n+1)}$ auf beiden Seiten weglassen:

) $$C_m^{(n+1)} = C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \cdots + C_m^{(n)},$$

d da $C_1^{(n+1)} = n+1$, $C_1^{(n)} = n$ ist (nach (1)), so kann man da
ch setzen:

) $$C_m^{(n+1)} = 1 + C_1^{(n)} + C_2^{(n)} + \cdots + C_m^{(n)},$$

d hierdurch sind die $C_m^{(n+1)}$ vollständig bestimmt, wenn für
stimmtes n alle $C_m^{(n)}$ bekannt sind. Nun sind aber die $C_m^{(1)}$ n
) alle $= 1$, und folglich sind durch die Formeln (1), (2) und
$C_m^{(n)}$ eindeutig bestimmt.

Diesen Bedingungen genügt aber

) $$C_m^{(n)} = B_m^{(m+n-1)},$$

nn durch diese Annahme gehen die Gleichungen (1), (2) und
er in

$$B_1^{(n)} = n, \quad B_m^{(m)} = 1, \quad B_m^{(m+n)} = B_{m-1}^{(m+n-1)} + B_m^{(m+n-1)},$$

nach § 57, (1), (2) und (7) erfüllt sind. Nach § 57, (3) erg
h also

) $$C_m^{(n)} = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!},$$

für wir auch schreiben können:

) $$C_m^{(n)} = \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}$$

Zehnter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

§ 59. Determinanten.

1. Die Einteilung der Permutationen in gerade
die wir in § 53 abgeleitet haben, bildet die Grundla
meinen Determinantentheorie, die ein allgemeines Mitt
ein System von n Gleichungen ersten Grades mit n
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufzulösen. Ein solches System enth
zienten und ebenso groß ist die Anzahl der Komb
Ziffern $1, 2, \ldots, n$ zu zweien, wenn dabei auf die R
Ziffern geachtet wird. Man kann also diese Koeffizient
durch ein Zeichen wie $a_{i,k}$ bezeichnen, worin die Ind
jeden der Werte $1, 2, \ldots, n$ annehmen kann.

So kann man also ein System von linearen Gleich
Weise bezeichnen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= y_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= y_n, \end{aligned}$$

erin bezeichnet der erste Index von $a_{i,k}$ die Nummer der Horizonta
he oder Zeile, der zweite Index die Nummer der Vertikalrei
er Kolonne, in der $a_{i,k}$ vorkommt.

Aus diesem Quadrat leiten wir nun eine Zahlgröße oder Funkti
$a_{i,k}$ ab, die wir Determinante nennen und nach folgender Re
den. Man bilde zunächst das Produkt α der in der Diagonale
adrats stehenden $a_{i,k}$ d. h. aller $a_{i,k}$, in denen beide Indizes d
ben Wert haben:

$$M = a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

d nennen dieses das Hauptglied der Determinante. Da
den wir alle Permutationen $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der zweiten Indi
2, ..., n in M und geben den so gebildeten

$$M_\alpha = a_{1,\alpha_1}\, a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n}$$

s positive oder negative Zeichen, je nachdem die Permutation α
n geraden oder ungeraden gehört. Wir erhalten so $n!$ Glieder
it Einschluß von M), und die Summe

$$A = \sum \pm M_\alpha$$

ißt dann die Determinante des Systems (2). Man benutzt das
rtikale Striche eingeschlossene Quadrat (2) geradezu auch
ichen für die Determinante oder schreibt auch kürzer

$$A = \sum \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

Nimmt man $n = 3$, so erhält man aus § 53:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \, a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} \\ + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} \\ + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}, \end{array}$$

nach § 54, 12. zu derselben Art gehören, so können w minante auch dadurch bilden, daß wir in M die ers permutieren und die zweiten ungeändert lassen, währen stimmung der Vorzeichen dieselbe Regel gilt, wie in 2. wir auch so ausdrücken:

Die Determinante A bleibt ungeändert, we Zeilen zu Kolonnen und die Kolonnen zu Zeilen

4. Wenn man in den Permutationen α irgend zw miteinander vertauscht, so gehen die geraden Permuta gerade, die ungeraden in gerade über, also jedes Glie anderes, das in A mit dem entgegengesetzten Zeichen v

Die Vertauschung zweier zweiten Indizes entspri Vertauschung zweier Kolonnen in (2); und da nach 3 für die Zeilen gilt, erhalten wir den Satz:

Die Determinante ändert nur das Vorzei man zwei Zeilen oder zwei Kolonnen mitein tauscht.

5. Wenn die entsprechenden Elemente zweier Reih nach 4. vertauscht hat, dem numerischen Werte nach ei sind, so bleibt durch die Vertauschung der beiden Reih minante ungeändert und ändert gleichzeitig das Zeich ist bewiesen:

Wenn in einer Determinante entsprechend zweier Zeilen oder zweier Kolonnen einander g so hat die Determinante den Wert Null.

6. Durch wiederholte Anwendung des Satzes 4. erg

Die Determinante A bleibt dem absoluten W ungeändert, wenn man die Zeilen oder die Kol mutiert. Ist die angewandte Permutation gerade auch das Zeichen ungeändert, ist sie ungerade, s

Um diese Formel abzuleiten, wollen wir für den Augenblick e
ch etwas genauere Bezeichnung gebrauchen.

Es durchlaufe ν die Gesamtheit der Permutationen $\nu_1, \nu_2, \ldots$
d es sei $(-1)^\nu$ gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem die
tation gerade oder ungerade ist. Dann können wir A nach
er (5) in der Weise darstellen

$$
A = \sum^{\nu} (-1)^\nu a_{\nu_1, 1} a_{\nu_2, 2} \ldots a_{\nu_n, n},
$$

d wenn α eine beliebige Permutation ist, nach (6)

$$
(-1)^\alpha A = \sum^{\nu} (-1)^\nu a_{\nu_1, \alpha_1} a_{\nu_2, \alpha_2} \ldots a_{\nu_n, \alpha_n}.
$$

Es sei nun $b_{i,k}$ ein zweites Größensystem wie $a_{i,k}$ und

$$
B = \sum^{\alpha} (-1)^\alpha b_{1, \alpha_1} b_{2, \alpha_2} \ldots b_{n, \alpha_n}
$$

ne Determinante.

Multipliziert man also die Gleichung (8) mit $b_{1,\alpha_1} b_{2,\alpha_2} \ldots b_{n,\alpha_n}$
mmt die Summe über alle Permutationen α, so erhält man:

$$
AB = \sum^{\alpha} b_{1, \alpha_1} b_{2, \alpha_2} \ldots b_{n, \alpha_n} \sum^{\nu} (-1)^\nu a_{\nu_1, \alpha_1} a_{\nu_2, \alpha_2} \ldots a_{\nu_n, \alpha_n}.
$$

Hier ist zunächst die Summe in Bezug auf ν für ein fe
hendes α und dann noch die Summe in Bezug auf alle α
hmen. Es bedeutet aber α eine Permutation, und daher haben
nem Gliede dieser Summe die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ lauter verschied
erte. Nach 5. aber würde die nach ν genommene Summe
ert Null haben, sobald zwei von den α einander gleich werden, z.

$$
\sum^{\nu} (-1)^\nu a_{\nu_1, \alpha_2} a_{\nu_2, \alpha_2} \ldots a_{\nu_n, \alpha_n} = 0,
$$

$$\sum(-1)^{\nu} c_{1,\nu_1} c_{2,\nu_2} \ldots c_{n,\nu_n}$$

oder in der früheren Bezeichnung gleich der Determina

$$C = \sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn},$$

und wir haben die Formel:

$$(13) \qquad AB = C,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \ldots, & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum^{i} a_{1,i} b_{1,i}, & \sum^{i} a_{1,i} b_{2,i}, & \ldots, & \sum^{i} a_{1,i} b_{n,i} \\ \sum^{i} a_{2,i} b_{1,i}, & \sum^{i} a_{2,i} b_{2,i}, & \ldots, & \sum^{i} a_{2,i} b_{n,i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum^{i} a_{n,i} b_{1,i}, & \sum^{i} a_{n,i} a_{2,i}, & \ldots, & \sum^{i} a_{n,i} b_{n,i} \end{vmatrix}.$$

Der Summationsbuchstabe i läuft in allen diesen 1 bis n.

In Worten kann man diese Formel so darstellen:

Um das Produkt zweier Determinanten v als Determinante darzustellen, multipliziere m mente der i^{ten} Zeile mit den entsprechenden d und bilde die Summe; dadurch erhält man das der neuen Determinante.

Da man in jeder der beiden Determinanten die Zeilen machen kann, so kann man ein solches Produkt

Diese Determinante $A_{1,1}$ erhält man aus der in Quadratform
riebenen Determinante A, wenn man die beiden in $a_{1,1}$ zusamm
ffenden Reihen ausstreicht.

9. Nun kann man durch $i - 1$ Vertauschungen die i^{te} Zeile
ten und durch $k - 1$ Vertauschungen die k^{te} Kolonne zur ers
chen. Dabei hat die Determinante den Faktor $(-1)^{i+k}$ an
mmen und das Element $a_{i,k}$ ist an den Platz von $a_{1,1}$ gerückt.
t sich dann der Inbegriff der Glieder von A, die den Faktor
halten, nach (15) bilden und es folgt:

Setzt man den Inbegriff aller der Glieder von A,
n Faktor $a_{i,k}$ enthalten, gleich $A_{i,k}$, so ist $A_{i,k}$ eine Det
nante von $n - 1$ Reihen, die man aus A erhält, wenn m
e beiden Reihen, die sich in $a_{i,k}$ schneiden, ausstrei
d das Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ zufügt.

Diese Größen $A_{i,k}$ heißen die Unterdeterminanten von A. In
mmt der erste Index i und der zweite Index k nicht vor.

Für $n = 3$ sind diese Unterdeterminanten in § 44, (3)
stellt.

10. Lassen wir alle Glieder der Determinante A aus dem
gsglied $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ durch Permutation der ersten Indizes
hen, so erkennt man, daß in jedem dieser Glieder einer und
ıer der Faktoren

$$a_{1,1},\ a_{2,1},\ a_{3,1},\ \ldots,\ a_{n,1}$$

rkommt und hiernach läßt sich die Determinante A so darstelle

$$A = a_{1,1} A_{1,1} + a_{2,1} A_{2,1} + \cdots + A_{n,1}\, a_{n,1}.$$

Dies nennen wir die Anordnung der Determinante nach
sten Vertikalreihe. Ebenso können wir nach einer ande
rtikalreihe anordnen und erhalten so für $k = 1, 2, \ldots, n$ die
hiedene Darstellung der Determinante A:

(18) $$A = a_{k,1} A_{k,1} + a_{k,2} A_{k,2} + \cdots + a_{k,n} A_{k,n},$$

(19) $$0 = a_{i,1} A_{k,i} + a_{i,2} A_{k,i} + \cdots + a_{i,n} A_{k,n}.$$

Aus diesen Darstellungen ergeben sich leicht einige Sätze über die Determinanten, so aus (16) und (18):

13. Enthalten alle Elemente einer Zeile oder einer Kolonne einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann dieser als Faktor vor die ganze Determinante genommen werden.

14. Wenn man (17) mit einem unbestimmten Faktor λ multipliziert und dann zu (16) addiert, so erhält man

(20) $$A = (a_{1,k} + \lambda a_{1,i}) A_{1,k} + (a_{2,k} + \lambda a_{1,i}) A_{2,k} + \cdots + (a_{n,k} + \lambda a_{n,i}) A_{n,k},$$

und da man dasselbe auch mit (18) und (19) machen kann, so können wir den Satz aussprechen:

Die Determinante ändert sich nicht, wenn man die mit einem beliebigen Faktor multiplizierten Elemente einer Zeile oder einer Kolonne zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile oder Kolonne addiert.

15. Diese Sätze über Determinanten führen sehr einfach zu der Auflösung eines Systems von Gleichungen 1[ten] Grades:

(21) $$\begin{array}{l|l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,n} x_n = y_1, & A_{1,k} \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,n} x_n = y_2, & A_{2,k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,n} x_n = y_n. & A_{n,k}. \end{array}$$

Multipliziert man die Gleichungen dieses Systems, wie es hier angedeutet ist, mit den Faktoren $A_{1,k}, A_{2,k}, \ldots, A_{n,k}$, so verschwinden nach (16) und (17) die Koeffizienten aller x_i mit Ausnahme dessen von x_k, der gleich A wird, und wir erhalten:

(22) $$A x_k = y_1 A_{1,k} + y_2 A_{2,k} + \cdots + y_n A_{n,k},$$

so daß, wenn A von Null verschieden ist, x_k durch Division mit A bestimmt ist.

16. Haben die $y_1, y_2, \ldots, y_n$ alle den Wert Null, so erhält man ein System homogener linearer Gleichungen:

(23) $$\begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,n} x_n = 0, \\ a_{2,2} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,n} x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,n} x_n = 0, \end{array}$$

und (22) zeigt, daß, wenn die Determinante A nicht Null ist, die

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ alle Null sein müssen. Es hat dann also das System (23) keine eigentliche Lösung (§ 45, 1).

Die notwendige Bedingung für die Existenz von eigentlichen Lösungen ist also

$$(24) \qquad A = 0,$$

und diese Gleichung ist also das Eliminationsresultat der x aus den Gleichungen (23).

Ist die Gleichung (24) befriedigt und von den Unterdeterminanten $A_{k,i}$ eine von Null verschieden, so erhält man (nach (18), (19)) eine eigentliche Lösung, wenn man setzt

$$(25) \qquad x_1 = A_{k,1}, \quad x_2 = A_{k,2}, \quad \ldots, \quad x_n = A_{k,n}.$$

Wenn alle Unterdeterminanten $A_{k,i} = 0$ sind, so ist (25) keine eigentliche Lösung. Es gibt aber auch in diesem Falle eigentliche Lösungen, zu deren Darstellung man die Unterdeterminanten von den Unterdeterminanten braucht. Hierauf wollen wir hier aber nicht eingehen.

§ 60. Der binomische und polynomische Lehrsatz.

1. Die Kombinationen von n Elementen ohne Wiederholung treten auf, wenn es sich um die Multiplikation von n binomischen Faktoren handelt.

Nehmen wir an, es seien $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ allgemeine Zeichen für irgend welche Zahlen, und es handle sich um die Bildung des Produktes der n Faktoren:

$$(1) \qquad F_n = (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \cdots (x + a_n)$$

nach den Sätzen § 10. Es ist für $n = 2$ und $n = 3$

$$F_2 = x^2 + x(a_1 + a_2) + a_1 a_2,$$
$$F_3 = x^3 + x^2(a_1 + a_2 + a_3) + x(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + a_1 a_2 a_3,$$

und durch Anwendung der vollständigen Induktion erhält man allgemein

$$(2) \qquad F_n = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n,$$

wenn A_1 die Summe der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$; A_2 die Summe der Produkte zu je zweien, A_3 die Summe der Produkte zu je dreien u. s. f. und endlich A_n das Produkt aller $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bedeutet. Wir wollen dies, indem wir das Zeichen Σ (Summe) anwenden, so darstellen:

$$(3) \qquad A_1 = \Sigma a_1, \quad A_2 = \Sigma a_1 a_2, \quad A_3 = \Sigma a_1 a_2 a_3, \quad \ldots,$$
$$A_n = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Denken wir uns für die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestimmte gegebene Zahlen gesetzt, während x als ein Zeichen betrachtet wird, das jede beliebige Zahl bedeuten kann, so heißt der Ausdruck F_n eine ganze Funktion von x vom Grade n. Die Zahlen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen die Koeffizienten dieser Funktion.

2. In den Ausdrücken $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kommen in den einzelnen Summanden die Kombinationen ohne Wiederholung zu je einem, zwei, drei u. s. w. der n Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vor. Die Gliederzahlen, die diese Summen bilden, sind daher (§ 57)

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \ldots,\ B_n^{(n)}.$$

Von besonderem Interesse ist uns hier der Fall, daß die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle einander gleich sind. Ist ihr gemeinsamer Wert a, so ergibt sich

$$A_1 = B_1^{(n)} a, \quad A_2 = B_2^{(n)} a^2, \quad A_3 = B_3^{(n)} a^3, \quad A_n = a^n,$$

und aus (1) und (2) folgt die Formel:

$$(4) \quad (x+a)^n = x^n + B_1^{(n)} x^{n-1} a + B_2^{(n)} x^{n-2} a^2 + \cdots + B_{n-1}^{(n)} x a^{n-1} + a^n.$$

Diese Formel, die sehr häufig angewandt wird, heißt der binomische Lehrsatz. Sie dient dazu, die n^{te} Potenz eines Binomes $(x+a)^n$ nach Potenzen von x und a zu ordnen. In der Formel (4) ist nach absteigenden Potenzen von x und aufsteigenden Potenzen von a geordnet.

Die Formel lautet, explizite geschrieben:

$$(5) \quad \begin{aligned} (x+a)^n = x^n + n x^{n-1} a &+ \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} a^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} a^3 + \cdots \end{aligned}$$

und für die ersten Fälle $n = 2, 3, 4, 5$:

$$(6) \quad \begin{aligned} (x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2, \\ (x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3, \\ (x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4, \\ (x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5. \end{aligned}$$

Setzt man $x = 1$, so ergibt die Formel (5)

$$(7) \quad (1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 2} a^3 + \cdots + a^n,$$

und hieraus erhält man auch wieder leicht die allgemeine Formel, weil $(x+a)^n = x^n \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n$ ist.

Wegen dieses Auftretens in dem binomischen Lehrsatze werden die Zahlen

$$B_0^{(n)},\ B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \ldots,\ B_{n-1}^{(n)},\ B_n^{(n)}$$

auch die Binomialkoeffizienten genannt.[1])

3. Wenn n eine Primzahl ist, so sind die Binomialkoeffizienten, mit Ausnahme des ersten und des letzten, also

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ \ldots,\ B_{n-1}^{(n)},$$

alle durch n teilbar; denn aus § 57, (3) folgt

$$B_m^{(n)} m!\,(n-m)! = n!. \tag{8}$$

Ist nun m größer als 0 und kleiner als n, so ist $m!$ und $(n-m)!$ nicht durch n teilbar, während $n!$ durch n teilbar ist. Folglich muß $B_m^{(n)}$ durch n teilbar sein (§ 17, 1.). Demnach ergibt sich aus (7), daß, wenn a eine ganze Zahl ist:

$$[(a+1)^n - (a+1)] - (a^n - a) \tag{9}$$

durch n teilbar ist. Setzen wir $a = 1$, so folgt, daß $2^n - 2$ durch n teilbar ist, und wenn wir also annehmen, es sei bereits bewiesen, daß $a^n - a$ für irgend ein a durch n teilbar sei, so folgt aus (9) das Gleiche für $(a+1)^n - (a+1)$. Damit ist der Fermatsche Lehrsatz durch vollständige Induktion bewiesen:

Ist a eine beliebige ganze Zahl und n eine Primzahl, so ist $a^n - a$ durch n teilbar.

4. Wir können die beiden Formeln

$$(1+a)^m = B_0^{(m)} + B_1^{(m)} a + B_2^{(m)} a^2 + \cdots + B_m^{(m)} a^m,$$
$$(1+a)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)} a + B_2^{(n)} a^2 + \cdots + B_n^{(n)} a^n,$$

in denen m und n zwei beliebige ganze Zahlen sind, miteinander multiplizieren und erhalten

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m)} B_0^{(n)} + (B_0^{(m)} B_1^{(n)} + B_1^{(m)} B_0^{(n)})\, a$$
$$+ (B_0^{(m)} B_2^{(n)} + B_1^{(m)} B_1^{(n)} + B_2^{(m)} B_1^{(n)})\, a^2 + \cdots.$$

Diese Summe muß aber auch gleich

$$B_0^{(m+n)} + B_1^{(m+n)} a + B_2^{(m+n)} a^2 + \cdots$$

sein. Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke führt zu den folgenden Relationen zwischen den Binomialkoeffizienten:

---

1) Die erste Kenntnis der Binomialkoeffizienten findet sich bei Michael Stifel (Arithmetica integra, 1544), woselbst eine Tabelle der Binomialkoeffizienten bis zur 17ten Potenz angegeben ist (Cantor, Gesch. d. Math., Bd. 2, S. 430).

$$B_0^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_0^{(n)}, \quad B_1^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_1^{(n)} + B_1^{(m)} B_0^{(n)}, \quad \ldots$$

oder allgemein, für irgend ein ν,

$$(10) \qquad B_\nu^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_\nu^{(n)} + B_1^{(m)} B_{\nu-1}^{(n)} + B_2^{(m)} B_{\nu-2}^{(n)} + \cdots + B_\nu^{(m)} B_0^{(n)}.$$

Hierin ist $B_\nu^{(n)} = 0$ zu setzen, wenn $\nu > n$ ist. Von dieser Formel werden wir später eine sehr wichtige Anwendung machen.

5. In § 57, (3) sind die Binomialkoeffizienten in der Form dargestellt:

$$B_n^{(n)} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Setzen wir also $n = \alpha$, $n - m = \beta$, $\alpha + \beta = n$, so erhalten wir die Formel

$$(11) \qquad (x+y)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} x^\alpha y^\beta,$$

und hierin muß sich die Summe Σ auf alle möglichen Zerlegungen der Zahl n in zwei Summanden, deren keiner negativ ist, erstrecken. Unter $0!$ hat man die Zahl 1 zu verstehen.

In dieser Form läßt sich der binomische Satz verallgemeinern.

Es seien $x, y, z, \ldots$ unbestimmte Größen, deren Anzahl r sei, und n eine positive ganze Zahl, die auf alle möglichen Arten in r nicht negative ganzzahlige Summanden $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zerlegt wird:

$$(12) \qquad n = \alpha + \beta + \gamma + \cdots.$$

Dann erhält man zunächst durch Induktion

$$(13) \qquad (x+y+z+\cdots)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots,$$

worin sich die Summe auf alle Zerlegungen (12) erstreckt.

Der Beweis dieser Formel, die für $r = 2$ richtig ist, ergibt sich durch vollständige Induktion, wenn wir voraussetzen, sie sei für $r-1$ schon bewiesen. Setzen wir dann

$$u = y + z + \cdots$$

und bilden nach (11)

$$(14) \qquad (x+u)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\nu!} x^\alpha u^\nu, \qquad (\alpha + \nu = n)$$

und nach der für $r-1$ als richtig vorausgesetzten Formel (13)

$$u^\nu = \sum \frac{\nu!}{\beta!\,\gamma!\ldots} y^\beta z^\gamma, \qquad (\beta + \gamma + \cdots = \nu)$$

so ergibt sich aus (14) die Formel (13).

Diese Formel wird der polynomische Lehrsatz genannt.

§ 61. Arithmetische Reihen.

1. Eine geordnete Reihe von Zahlen, deren jede folgende um dieselbe Zahl größer ist als die vorhergehende, bilden eine arithmetische Progression oder eine arithmetische Reihe (§ 38, 1.).

Wir können die arithmetische Progression auch definieren als eine Zahlenreihe, in der die Differenz zweier aufeinander folgender Zahlen unveränderlich oder konstant ist. Diese konstante Differenz heißt auch die Differenz der arithmetischen Reihe.

So bilden die natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung eine arithmetische Reihe mit der Differenz 1, die geraden oder die ungeraden Zahlen für sich eine arithmetische Reihe mit der Differenz 2, die Zahlenreihe 1, 4, 7, 10, 13, ... oder 2, 5, 8, 11, 14, ... oder 0, 3, 6, 9, 12, ... arithmetische Progressionen mit der Differenz 3 u. s. f. Die Zahlen einer solchen Reihe können aber auch gebrochen und negativ sein, und ebenso braucht die Differenz keine ganze Zahl zu sein. Ist die Differenz positiv, so heißt die Reihe steigend, ist sie negativ, fallend oder absteigend.

Die allgemeine Form einer arithmetischen Progression ist, wenn a und b beliebige Zahlen sind:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \ldots;$$

a ist das Anfangsglied, b die Differenz.

Wenn x ein Zeichen ist, das der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3, ... annimmt, so ist $a+bx$ das allgemeine Glied einer solchen Reihe.

2. Oft bietet sich die Aufgabe, die Summe von n aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe zu bestimmen. Das kann kürzer als durch wirkliche Ausführung der Addition geschehen mittels einer allgemeinen Formel, die wir jetzt ableiten wollen. Nehmen wir an, es handle sich um die Summe der n ersten Zahlen einer arithmetischen Progression:

$$S = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a-(n-1)b),$$

so ergibt sich dafür

$$S = na + (1+2+3+\cdots+(n-1))b, \tag{1}$$

und wir haben also zunächst einen speziellen Fall der allgemeinen Aufgabe zu lösen, nämlich die Summe der $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen

$$s = 1+2+3+\cdots+(n-1) \tag{2}$$

zu finden. Diese läßt sich aber einfach aus der Bemerkung ableiten, daß je zwei Glieder, die gleich weit vom Anfang und vom Ende ab-

stehen, wie 1 und $(n-1)$ oder 2 und $(n-2)$ oder 3 und $(n-3)$, immer dieselbe Summe n ergeben. Ist also $n-1$ eine gerade Zahl, so zerfallen die Glieder der Summe s in $\frac{1}{2}(n-1)$ Paare, deren Summe n ist, und mithin ist

$$(3) \qquad s = \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Ist aber $n-1$ ungerade, also n gerade, so haben wir nur $\frac{1}{2}(n-2)$ solche Paare, während das mittelste Glied, das den Wert $\frac{1}{2}n$ hat, vereinzelt bleibt. Es ist also jetzt

$$s = \frac{n(n-2)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

und die Formel (3) gilt also auch für diesen Fall. Aus (1) ergibt sich dann für S:

$$(4) \qquad S = n\left(a + \frac{n-1}{2}\,b\right),$$

und man erhält z. B. hieraus die Summe der n ersten ungeraden Zahlen, wenn man $a = 1$, $b = 2$ setzt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

3. Die Zahlen $\frac{1}{2}n(n+1)$ stellen sich z. B. bei folgender Aufgabe ein: Es sollen Kugeln (z. B. Billardkugeln) in einem Dreieck so angeordnet werden, daß sie in Reihen liegen, von denen die erste eine, die zweite zwei, die dritte drei, ..., die n^{te} Reihe n Kugeln enthält. Wieviel Kugeln enthält das ganze Dreieck? Die Gesamtzahl dieser Kugeln wird nach der Formel (4), in der $a = 1$, $b = 1$ zu setzen ist, durch die Zahl

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

dargestellt, und aus diesem Grunde heißen diese Zahlen Dreieckszahlen oder Trigonalzahlen. Die Dreieckszahlen sind der Reihe nach

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$$

Ordnen wir die Kugeln in ein Quadrat, so daß in jeder Reihe soviel Kugeln liegen als Reihen vorhanden sind, so erhält man die Viereckszahlen oder die Quadratzahlen

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Aus der Formel

$$(5) \qquad \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

ersieht man die Regel, daß die Summe der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Dreieckszahl die n^{te} Viereckszahl ist, was auch die geometrische Anschauung zeigt.

§ 62. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Betrachten wir irgend eine Reihe A von Zahlen, die nach einem gegebenen Gesetz fortschreiten,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

und bilden die Differenz je zweier aufeinander folgender Glieder

$$b_0 = a_1 - a_0, \quad b_1 = a_2 - a_1, \quad b_2 = a_3 - a_2, \ \ldots,$$

so heißt die Reihe B der b, also

$$b_0, b_1, b_2, \ldots,$$

die Reihe der Differenzen von der Reihe A.

Aus dieser können wir wieder die Differenzen bilden:

$$c_0 = b_1 - b_0, \quad c_1 = b_2 - b_1, \ \ldots,$$

und erhalten eine Reihe C

$$c_0, c_1, c_2, \ldots,$$

die die Reihe der zweiten Differenzen von A heißt, und auf diese Weise können wir fortfahren und die Reihe der dritten, vierten, ... Differenzen bilden.

Durch Addition der Glieder der Reihe B ergibt sich

$$a_n - a_0 = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1},$$

und es ist also das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe A gleich der Summe der n ersten Glieder der Reihe B, vermehrt um das Anfangsglied a_0.

Die Reihe A ist eine arithmetische, wenn die Glieder der Reihe B alle einander gleich (konstant) sind. Ist aber B selbst eine arithmetische Reihe, so heißt A eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. Wir definieren allgemein eine arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung dadurch, daß die Reihe ihrer ersten Differenzen eine arithmetische Reihe $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und daraus ergibt sich, daß bei einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung die Glieder der k^{ten} Differenzenreihe konstant sind.

Die Reihe der Dreieckszahlen ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung.

Die Summen s_n der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung bilden eine arithmetische Reihe $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, denn die Differenzen $s_{n+1} - s_n = a_n$ bilden eine arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung.

2. Man kann die allgemeine Form der Glieder einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung leicht durch die Binomialkoeffizienten $B_m^{(n)}$ darstellen.

Es ist nämlich das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied a_n einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung ein Ausdruck von der Form:

$$(1) \qquad a_n = \alpha_0 + \alpha_1 B_1^{(n)} + \alpha_2 B_2^{(n)} + \cdots + \alpha_k B_k^{(n)},$$

worin die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ von n unabhängig sind. Die einzelnen Progressionen der k^{ten} Ordnung unterscheiden sich voneinander durch die Werte der α.

Der Beweis dieses Gesetzes ergibt sich sehr einfach durch die vollständige Induktion. Die Formel ist nämlich offenbar richtig für $k=1$, denn die Glieder der arithmetischen Reihe erster Ordnung sind von der Form $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$. Wir nehmen also die Richtigkeit für die Reihe $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung als erwiesen an.

Es sei nun A die gegebene arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung und B die Reihe ihrer ersten Differenzen, von der wir also annehmen, daß ihr n^{tes} Glied b_{n-1} in der Form darstellbar sei:

$$(2) \qquad b_{n-1} = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_k B_{k-1}^{(n-1)}.$$

Nun hat aber die Reihe, deren $(n+1)^{\text{tes}}$ Glied den Ausdruck (1) hat, eine erste Differenzenreihe, deren n^{tes} Glied

$$\alpha_1 (B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + \alpha_2 (B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \cdots + \alpha_k (B_k^{(n)} - B_k^{(n-1)})$$

ist, und dies stimmt nach der Formel § 57 (7) mit dem Ausdruck (2) überein.

Da nun die Glieder einer Reihe durch das Anfangsglied und durch die Reihe der ersten Differenzen eindeutig bestimmt sind, so muß die Reihe der a_n bei passender Bestimmung des Anfangsgliedes a_0 mit der gegebenen Reihe A übereinstimmen, wodurch der Satz bewiesen ist.

Setzt man in der Formel (1) $n = 0, 1, 2, \ldots, k$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_0, \\
a_1 &= \alpha_0 + \alpha_1, \\
a_2 &= \alpha_0 + B_1^{(2)} \alpha_1 + \alpha_2, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_k &= \alpha_0 + B_1^{(k)} \alpha_1 + B_2^{(k)} \alpha_2 + \cdots + \alpha_k,
\end{aligned}$$

woraus die α durch die $k+1$ ersten Glieder der Reihe A bestimmt sind.

3. Die Binomialkoeffizienten $B_k^{(n)}$ sind ganze Funktionen k^{ten} Grades von n und man kann auch umgekehrt die Potenz n^k linear durch $B_k^{(n)}, B_{k-1}^{(n)}, \ldots, B_1^{(n)}$ ausdrücken. Hiernach ergibt sich aus (1):

Das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied a_n einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung ist eine ganze Funktion k^{ten} Grades von n, und jede Reihe, deren $(n+1)^{\text{tes}}$ Glied von der Form

(3) $$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_k n^k$$

ist, ist eine arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung.

Aber die Bestimmung der Koeffizienten in (1) ist einfacher als in (3).

4. Wir wollen z. B. unter a_n die Summe der n ersten Dreieckszahlen verstehen:

$$a_n = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2};$$

die $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bilden eine arithmetische Reihe dritter Ordnung, und nach unserem Satze muß also

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

sein. Um $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zu bestimmen, setzen wir $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und erhalten, da

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 10$$

ist, zur Bestimmung der α:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4,$$
$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 10,$$

oder

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1,$$

und daraus:

$$a_n = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Dies ist z. B. die Zahl der Kugeln, die in einem regelmäßigen Tetraeder geschichtet sind, und wird darum die n^{te} Tetraederzahl genannt. Die Reihe der Tetraederzahlen beginnt mit

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$$

Um die Reihe der n ersten Quadratzahlen

$$c_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

zu ermitteln, hat man in dem Ausdruck

$$c_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$n = 0, 1, 2, 3$ zu setzen und erhält $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, also

$$c_n = n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Für die Summe der n ersten Kubikzahlen

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

erhält man

$$s_n = \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{6} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \alpha_4 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Man findet wie oben $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 12$, $\alpha_4 = 6$ und kann für s_n auch schreiben

$$s_n = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

§ 63. Geometrische Reihen.

1. Die Zahlen einer Reihe $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ stehen in geometrischer Progression oder bilden eine geometrische Reihe, wenn jede Zahl aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einem und demselben Faktor q hervorgegangen ist, oder wenn der Quotient aus jeder dieser Zahlen und der vorangegangenen, a_n/a_{n-1}, konstant $= q$ ist. a heißt das Anfangsglied, q der Quotient der geometrischen Reihe. Die Glieder der geometrischen Progression haben also den Ausdruck:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots;$$

das n^{te} Glied ist aq^{n-1}. Wenn q positiv ist, so haben alle Glieder dasselbe Vorzeichen, z. B. das positive, wenn a positiv ist. Ist aber q negativ, so sind die Vorzeichen der Glieder abwechselnd positiv und negativ.

Ist q dem absoluten Werte nach größer als 1, so ist jedes Glied absolut größer als das vorangehende; wir haben eine steigende geometrische Reihe.

Ist q ein echter Bruch, so nehmen die Glieder mit wachsender Rangordnung dem absoluten Werte nach ab; wir haben eine fallende geometrische Reihe.

Ist endlich $q = \pm 1$, so sind alle Glieder gleich $\pm a$.

2. Auch hier ist es eine wichtige Aufgabe, die Summe der n ersten Glieder zu finden. Es ist

$$(1) \quad S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}),$$

und es ist also die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Summe

$$(2) \quad s = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

zu finden. Man findet diese Summe leicht aus der Bemerkung, daß durch Multiplikation mit q jedes Glied in das folgende übergeht, also

3) $$sq = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

vird. Bildet man nun die Differenz aus (2) und (3), so folgt:

$$s(1-q) = 1 - q^n,$$

nd daraus erhält man s in allen Fällen, außer wenn $q = 1$ ist:

4) $$s = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

'ür $q = 1$ aber erhält man direkt $s = n$, wenn man beachtet, daß in iesem Falle alle Glieder den Wert 1 haben.

Ist $q > 1$, so wird man, um positive Zähler und Nenner zu er- alten, lieber

$$s = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

chreiben. Aus (1) folgt dann

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

nd diese Formel läßt sich in die Regel zusammenfassen:

Um die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen eihe zu erhalten, subtrahiere man das Anfangsglied von em $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe und dividiere durch den um verminderten Quotienten.

3. Wir wollen der Formel (4) eine etwas andere Gestalt geben, ıdem wir $q = b/a$ setzen und dann den Bruch mit a^n erweitern.)adurch ergibt sich

$$s = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1}(a-b)},$$

der wenn wir nach (2)

$$s = 1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$$

etzen und mit a^{n-1} multiplizieren:

5) $$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b},$$

der auch

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

ine Formel, die sich durch Ausmultiplizieren sofort verifizieren läßt.

Beispielsweise erhalten wir für $n = 2$, $n = 3$:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

)ie erste dieser Formeln läßt sich in Worten so ausdrücken:

Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist gleich dem Produkt aus der Differenz und der Summe der beiden Zahlen.

Setzt man $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$, so folgt eine gleichfalls oft angewandte Formel

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta.$$

§ 64. Zins- und Rentenrechnung.

1. Eine praktisch wichtige Anwendung der Theorie der geometrischen Reihen ist die auf die Zins- und Rentenrechnung. Wir können hier nur die allgemeinen Grundformeln angeben, indem wir wegen weiterer Details und Beispiele auf Spezialwerke, besonders auf das kleine Werk von Moritz Cantor, „Politische Arithmetik" (Leipzig, Teubner 1898, 2. Auflage 1903), verweisen. Wenn ein Kapital, sagen wir von c Mark, auf Zinsen ausgeliehen wird, so wird dabei verabredet, daß der Schuldner dem Gläubiger am Ende eines jeden Jahres für je hundert Mark des Kapitals eine bestimmte Summe, sagen wir p Mark, zu zahlen hat (p Prozent, in Zeichen $p\,\%$). Diese Zahl p heißt der Zinsfuß. Oft wird auch halbjährliche oder vierteljährliche Zinszahlung vereinbart, wobei jedoch immer die Prozente auf das Jahr bezogen werden. Nach dem heutigen Stand des Geldmarktes ist $3\,\%$, $3\frac{1}{2}\,\%$, $4\,\%$, $4\frac{1}{2}\,\%$ der gewöhnliche Zinsfuß. Er richtet sich in erster Linie nach dem Grad der Sicherheit der Kapitalanlage, d. h. des Vertrauens des Gläubigers, daß der Schuldner seine Verpflichtungen erfüllen werde.

Der Zins von 100 Mark beträgt p, der von einer Mark also $p/100$ Mark, und folglich der Zins von c Mark $cp/100$ Mark. Soll also nach einem Jahr das Kapital c nebst Zinsen zurückgezahlt werden, so sind $c + cp/100$ zurückzuzahlen, und das Kapital c ist also auf

$$c' = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

gewachsen.

Bisweilen werden nun die Zinsen nicht bar bezahlt, sondern sie werden, wie man sagt, zum Kapital geschlagen und mit ihm weiter verzinst. So entsteht der Zinseszins. Nach dem zweiten Jahr hat sich dann das Kapital c' in derselben Weise vergrößert, und ist also auf

$$c'' = c'\left(1 + \frac{p}{100}\right) = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

ewachsen, und nach Verlauf von n Jahren hat das Kapital die Höhe

$$\text{)} \qquad C = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

reicht.

Das Kapital wächst also unter diesen Umständen in geometri-
cher Progression.

Wenn der Zins nicht jährlich, sondern etwa halbjährlich oder
erteljährlich, oder allgemein nach Verlauf des m^{ten} Teiles eines
ahres zum Kapital geschlagen wird, während sich der Zinsfuß p
och auf das Jahr bezieht, so gibt die Formel (1) für den Wert
es Kapitals nach n Jahren

$$\text{)} \qquad C = c\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{nm},$$ [1]

nd wenn die Frage umgekehrt ist, welchen Wert ein nach n Jahren
hlbares Kapital C heute hat, so ergibt sich unter der Annahme (1)

$$\text{3)} \qquad c = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n},$$

der nach der Annahme (2)

$$\text{)} \qquad c = C\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{-nm}.$$

2. Rentenrechnung. Unter einer Rente versteht man eine
regelmäßigen Zeitintervallen, z. B. alle Jahre, sei es für immer,
i es für eine begrenzte Zeit zu zahlende Summe. Angenommen,
sei eine Rente von r Mark während n Jahren am Schluß eines
den Jahres zahlbar. Wenn nun diese Rente aufgespart und immer
erzinslich, mit $p\,\%$ Zinseszins, angelegt wird, welche Summe ist am
nde der n Jahre aufgelaufen?

Zur Beantwortung dieser Frage bedenke man, daß die erste
ahlung während $n-1$ Jahren, die zweite während $n-2$ Jahren u. s. f.,
e vorletzte ein Jahr, die letzte noch gar nicht Zins getragen hat.
emnach ist die erste Zahlung

$$\begin{aligned} &\text{auf} && r\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}, \\ \text{die zweite } &\text{auf} && r\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2}, \\ &&& \cdots\cdots\cdots \\ \text{die vorletzte } &\text{auf} && r\left(1 + \frac{p}{100}\right), \\ \text{die letzte } &\text{auf} && r \end{aligned}$$

---

1) Der Handel ist unter sonst gleichen Verhältnissen für den Gläubiger
n so vorteilhafter, je größer m ist, d. h. in je kleineren Intervallen die Zinsen
m Kapital geschlagen werden. Gleichwohl wächst der Ausdruck für C, wie
ir später sehen werden, mit m nicht über alle Grenzen, sondern er bleibt für
ne gegebene Anzahl n von Jahren unter einer bestimmten Grenze, die sich
umerisch bestimmen läßt.

angelaufen, und die Gesamtsumme (Endkapital) beträgt also, wenn wir zur Abkürzung

(5) $$1 + \frac{p}{100} = q$$

setzen, nach § 63

$$E = r(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1},$$

oder wenn wir den Ausdruck für q aus (5) einsetzen:

(6) $$E = \frac{100r}{p}\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right].$$

Um dieselbe Summe am Ende des n^{ten} Jahres zu erhalten, müßte ein Kapital A am Anfang des ersten Jahres auf Zinseszins gelegt werden, was nach n Jahren zu der Summe E angewachsen ist; es müßte also nach (1)

$$E = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

sein. Daraus ergibt sich

(7) $$A = \frac{100r}{p}\left[1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}\right].$$

Diese Summe heißt der **Barwert der Rente**. Sie wäre zu zahlen, wenn die Rente „**abgelöst**“ werden sollte: Je größer n ist, um so kleiner wird $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}$ und um so näher kommt A der Summe $100\,r/p$, d. h. dem Kapital, das bei einfachem Zins jährlich die Summe r als Zins abwirft.

ZWEITES BUCH.

ALGEBRA.

Elfter Abschnitt.

Algebraische Gleichungen.

§ 65. Ganze Funktionen und ihre Wurzeln.

1. In dem gesamten Zahlengebiete, das wir bisher kennen geernt haben, sind gewisse spezielle Zahlsysteme von ausgezeichneten Eigenschaften vorhanden, die man algebraische Zahlen nennt, von lenen die ersten und einfachsten die Quadratwurzeln sind. Ebenso vie diese aus den quadratischen Gleichungen, so entstehen die allgemeinen algebraischen Zahlen aus der Aufgabe, eine Gleichung iöheren Grades aufzulösen. Bevor wir aber zur näheren Betrachtung lieser Aufgabe vorgehen können, ist es notwendig, einige allgemeine Betrachtungen über ganze Funktionen vorauszuschicken.

2. Unter einer ganzen Funktion oder kurz einer Funktion ersteheu wir einen Ausdruck von der Form

$$1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

vorin die $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestimmte gegebene Zahlen sind, die vir die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ nennen; n ist eine ganze ositive Zahl und x ein Zeichen, für das jeder beliebige Zahlenwert esetzt werden kann. Wir nennen dann x die Veränderliche Variable), und $f(x)$ ist ein abgekürztes Zeichen für den ganzen Ausdruck. Ist a_0 von Null verschieden, so heißt n der Grad der Funktion $f(x)$.

Es ist nicht notwendig, daß die Koeffizienten rationale Zahlen ind. Sie können auch irrational und selbst komplex sein.

Statt der Zeichen a, x, f können natürlich auch andere Buchtaben gebraucht werden. Es diene dabei aber als Regel, daß zur Bezeichnung der Koeffizienten vorzugsweise die ersten Buchstaben les kleinen lateinischen Alphabets a, b, c, für die Veränderlichen die Buchstaben x, y, z, t, als Funktionszeichen f, φ, ψ, wohl auch F, Φ, Ψ angewendet werden.

3. Ganze Funktionen können addiert, subtrahiert und multipliziert werden, wobei die Rechenregeln für Polynome angewandt werden. Das Resultat dieser Operationen ist wieder eine ganze Funktion. Man ordnet diese Funktionen, indem man alle Glieder, die die gleiche Potenz von x enthalten, in eins zusammenfaßt, und diese Glieder von links nach rechts entweder nach aufsteigenden oder nach absteigenden Werten des Exponenten in eine Reihe schreibt. So ist z. B.

$$\begin{aligned}&(a_0x^2 + a_1x + a_2)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)\\&= a_0b_0x^5 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^4 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^3\\&+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)x^2 + (a_1b_3 + a_2b_2)x + a_2b_3.\end{aligned}$$

Wenn man zwei Funktionen n^{ten} und m^{ten} Grades $f(x) = a_0x^n + \cdots$ und $\varphi(x) = b_0x^m + \cdots$ miteinander multipliziert, so fängt das geordnete Produkt $f(x)\varphi(x)$ mit dem Gliede $a_0b_0x^{m+n}$ an, und der Grad eines Produktes ist daher gleich der Summe $m+n$ der Grade der Faktoren.

4. Zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ heißen nur dann einander gleich (genauer identisch), $f(x) = \varphi(x)$, wenn sie von gleichem Grade sind, und wenn die Koeffizienten gleicher Potenzen in beiden die nämlichen Werte haben; beide haben dann für jeden beliebigen Zahlenwert von x denselben numerischen Wert.

Davon hat man die Gleichheit zweier Funktionen $f(x) = \varphi(x)$ zu unterscheiden, die nur für einzelne besondere Werte von x stattfindet.

Während also die Gleichheit $f(x) = 0$ im ersten Sinne verlangt, daß die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ alle den Wert Null haben, kann man andererseits nach solchen Werten $x = x_1$ fragen, für die $f(x)$ bei nicht verschwindenden Koeffizienten verschwindet. Ein solcher Wert x_1 heißt eine Wurzel von $f(x)$ oder auch eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Wenn die Frage so gestellt wird, heißt x auch die Unbekannte der Gleichung, für die der bestimmte Wert x_1 gesucht wird.

5. Wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reell sind, so heißt $f(x)$ eine reelle Funktion. Hat eine reelle Funktion eine imaginäre Wurzel $x_1 = \alpha + \beta i$, so ist

$$(2)\quad a_0(\alpha+\beta i)^n + a_1(\alpha+\beta i)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha+\beta i) + a_n = 0.$$

Daraus folgt, da man nach § 48, 5. überall i durch $-i$ ersetzen kann, daß auch

$$(3)\quad a_0(\alpha-\beta i)^n + a_1(\alpha-\beta i)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha-\beta i) + a_n = 0$$

sein muß. Es ist also auch $x_1' = \alpha - \beta i$ eine Wurzel von $f(x)$. Dieses wichtige Ergebnis sprechen wir als Satz aus:

Bei einer reellen Funktion $f(x)$ können imaginäre Wurzeln nur paarweise vorkommen, und zwar so, daß je zwei Wurzeln konjugiert imaginär sind.

§ 66. Division ganzer Funktionen.

1. Das Rechnen mit ganzen Funktionen hat mannigfache Analogie mit dem Rechnen im Gebiete der ganzen Zahlen. Von besonderer Wichtigkeit sind die Regeln für die Division.

Es seien

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \\ \varphi(x) &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m \end{aligned}$$

zwei Funktionen von den Graden n und m, also a_0 und b_0 von Null verschieden; wir nehmen $n \geqq m$ an.

Die Funktion $f(x)$ heißt **teilbar** durch $\varphi(x)$, wenn es eine ganze Funktion $Q(x)$ von der Art gibt, daß $f(x) = \varphi(x)\, Q(x)$ ist.

Nach § 65, 3. muß $Q(x)$ vom Grade $n - m$ sein, und um den Fall $n = m$ gleich mit zu erledigen, müssen wir unter einer ganzen Funktion vom Grade Null eine von Null verschiedene Zahl (ohne die Veränderliche x) verstehen.

Um die Teilbarkeit näher zu untersuchen, setzen wir

$$(2)\qquad Q(x) = q_0 x^{n-m} + q_1 x^{n-m-1} + \cdots + q_{n-m-1} x + q_{n-m},$$

und setzen die Koeffizienten des Produktes $\varphi(x)\, Q(x)$, von a_0 aufsteigend, den Koeffizienten der Funktion $f(x)$ gleich. Dies gibt uns folgende Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_0 &= b_0 q_0, \\ a_1 &= b_0 q_1 + b_1 q_0, \\ a_2 &= b_0 q_2 + b_1 q_1 + b_2 q_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_\nu &= b_0 q_\nu + b_1 q_{\nu-1} + b_2 q_{\nu-2} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-m} &= b_0 q_{n-m} + b_1 q_{n-m-1} + \cdots . \end{aligned}$$

Die Bildung dieser Gleichungen ist sehr leicht, weil man immer nur darauf zu sehen hat, daß in dem Ausdruck für a_ν die Summe der Indizes von $b_i q_k$, also $i + k$, gleich ν werde. Die Summe ist nur so weit fortzusetzen, daß der Index i von b nicht größer als m wird.

Hier haben wir nun ein System von $n - m + 1$ Gleichungen ersten Grades, aus dem die $n - m + 1$ Unbekannten $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}$ bestimmt werden können. Es ist aber ein Gleichungssystem von besonders einfachem Bau; man findet nämlich aus der ersten dieser Gleichungen $q_0 = a_0/b_0$. Ist q_0 gefunden, so ergibt die zweite Gleichung $q_1 = (a_1 - b_1 q_0)/b_0 = (a_1 b_0 - b_1 a_0)/b_0^2$ u. s. f., und man erhält in den Nennern immer nur Potenzen von b_0, das nach Voraussetzung von Null verschieden ist.

Ist diese Bestimmung ausgeführt, so stimmt das Produkt $\varphi(x) Q(x)$ in den Koeffizienten von $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^m$ mit $f(x)$ überein, und die Differenz $f(x) - \varphi(x) Q(x)$ ist eine ganze Funktion

$$(4) \qquad R(x) = r_0 x^{m-1} + r_1 x^{m-2} + \cdots + r_{m-2} x + r_{m-1},$$

deren Grad höchstens $= m - 1$ ist. Er kann aber auch niedriger sein, wenn r_0 oder r_0 und r_1 u. s. f. verschwinden. Wir haben dann also

$$(5) \qquad f(x) = \varphi(x) Q(x) + R(x).$$

Diese Operation heißt die Division von $f(x)$ durch $\varphi(x)$; $f(x)$ heißt der Dividendus, $\varphi(x)$ der Divisor, $Q(x)$ der Quotient, $R(x)$ der Rest. Ist $f(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben, so sind $Q(x)$ und $R(x)$ eindeutig dadurch bestimmt, daß der Grad von $R(x)$ kleiner sein soll als der Grad von $\varphi(x)$.

Dies ist genau wie bei der Division ganzer Zahlen (§ 15, 2), nur daß beim Rest nicht der kleinere Zahlenwert, sondern der niedrigere Grad in Betracht kommt. Man kann auch die Rechnung ganz so anordnen, wie bei der Division dekadischer Zahlen, wie folgendes Beispiel zeigt, bei dem

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8,$$
$$\varphi(x) = x^2 + 2x - 5$$

angenommen ist:

$$\begin{array}{rrrrl}
3x^4 + 3x^3 - & 5x^2 + & 2x - & 8 & \mid\ x^2 + 2x - 5 = 3x^2 - 3x + 16 \\
3x^4 + 6x^3 - & 15x^2 & & & \mid \\
\hline
-3x^3 + & 10x^2 + & 2x & & \\
-3x^3 - & 6x^2 + & 15x & & \\
\hline
& 16x^2 - & 13x - & 8 & \\
& 16x^2 + & 32x - & 80 & \\
\hline
& & -45x + & 72. &
\end{array}$$

Es ist also $Q(x) = 3x^2 - 3x + 16$, $R(x) = -45x + 72$.

2. $f(x)$ ist dann und nur dann durch $\varphi(x)$ teilbar, wenn der Rest $R(x)$ identisch Null ist, also wenn

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0, \quad \ldots, \quad r_{m-1} = 0.$$

Um auch hierfür ein Beispiel zu geben, nehmen wir

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1,$$
$$\varphi(x) = x^2 - x - 1,$$

und erhalten:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 & x^2 - x - 1 = x^2 + 2x - 1 \\ x^4 - x^3 - x^2 & \\ \hline \quad 2x^3 - 3x^2 - x & \\ \quad 2x^3 - 2x^2 - 2x & \\ \hline \qquad -x^2 + x + 1 & \\ \qquad -x^2 + x + 1 & \\ \hline \qquad — \quad — \quad —. & \end{array}$$

3. Besonders einfach gestaltet sich die Division, wenn der Divisor vom ersten Grade, oder wie man auch sagt, eine **lineare Funktion** ist. Wir wollen ihn in der Form $\varphi(x) = x - \alpha$ annehmen; dann hat man in (3) $b_0 = 1$, $b_1 = \alpha$ zu setzen, und erhält zur Bestimmung der q:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0, \\ a_1 &= q_1 - \alpha q_0, \\ a_2 &= q_2 - \alpha q_1, \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= q_{n-1} - \alpha q_{n-2}, \end{aligned}$$

und daraus findet man

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0, \\ q_1 &= a_0 \alpha + a_1, \\ q_2 &= a_0 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_2, \\ &\cdots\cdots \\ q_{n-1} &= a_0 \alpha^{n-1} + a_1 \alpha^{n-2} + a_2 \alpha^{n-3} + \cdots + a_{n-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

und der Rest wird hier vom Grade Null, d. h. von x unabhängig. Wir können ihn leicht bestimmen, wenn wir in $f(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + R$ für x den Zahlenwert α setzen; dann wird $(x - \alpha)\,Q(x) = 0$, und es folgt $R = f(\alpha)$, also

$$f(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + f(\alpha). \tag{7}$$

Ist $f(\alpha) = 0$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ teilbar, und wir haben den Satz:

Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann durch $x-\alpha$ teilbar, wenn α eine Wurzel von $f(x)$ ist.

4. Die Bedingung dafür, daß $f(x)$ durch $(x-\alpha)^2$ teilbar ist, ist die, daß außer $f(x)$ auch $Q(x)$ durch $(x-\alpha)$ teilbar, daß also $Q(\alpha)=0$ sei. Es ist aber nach (6):

$$Q(\alpha) = q_0\alpha^{n-1} + q_1\alpha^{n-2} + \cdots + q_{n-1}$$
$$= na_0\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2} + (n-2)a_2\alpha^{n-3} + \cdots + a_{n-2}\alpha + a_{n-1}.$$

Man nennt die Funktion

(8) $$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

die derivierte oder abgeleitete Funktion von $f(x)$. Es ist dann also

(9) $$Q(\alpha) = f'(\alpha),$$

und es ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ durch $(x-\alpha)^2$ teilbar ist, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, oder in Worten:

Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann durch $(x-\alpha)^2$ teilbar, wenn α eine gemeinsame Wurzel von $f(x)$ und seiner Derivierten $f'(x)$ ist.

5. Die Formel (7) gibt für die Bildung der abgeleiteten Funktion, wenn man $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ setzt,

(10) $$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

Man braucht nur die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ als Summe entsprechender Koeffizienten in $f_1(x)$ und $f_2(x)$ darzustellen, um sich davon zu überzeugen. Also:

Die Derivierte einer Summe ist gleich der Summe der Derivierten.

6. Um die Derivierte von $f(x)$ zu bilden, hat man in (7), (8), (9) in dem entwickelten Quotienten

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = Q(x)$$

$x=\alpha$ zu setzen und kann dann wieder x für α setzen, was gestattet ist, da α sowohl als x eine unbestimmte Größe ist. Man kann danach die Derivierte der Funktion $f(x) = (x-\alpha)^n$ bilden, wenn man in der Formel § 63, (5):

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}$$

(11) $$f'(x) = n\,(x-c)^{n-1}$$

als Derivierte von $f(x) = (x-c)^n$.

7. Um die Abgeleitete eines Produktes von zwei Funktionen

$$f(x) = f_1(x) f_2(x)$$

zu bilden, setze man:

$$f_1(x) = (x-\alpha)\, Q_1(x) + f_1(\alpha),$$
$$f_2(x) = (x-\alpha)\, Q_2(x) + f_2(\alpha),$$

und folglich

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = (x-\alpha)\, Q_1(x)\, Q_2(x) + f_1(\alpha)\, Q_2(x) + f_2(\alpha)\, Q_2(x).$$

Setzt man darin $x = \alpha$, so wird $Q_1(\alpha) = f_1'(\alpha)$, $Q_2(\alpha) = f_2'(\alpha)$, und $(x-\alpha)\, Q_1(x)\, Q_2(x)$ wird Null. Es folgt also für die Derivierte des Produktes

(12) $$f'(x) = f_1(x) f_2'(x) + f_2(x) f_1'(x).$$

8. Dies führt zu einer Verschärfung des Satzes 4. Es sei nämlich

$$f(x) = (x-\alpha)^m f_1(x),$$

und $f_1(x)$ nicht mehr durch $x-\alpha$ teilbar, also $x-\alpha$ ein m-facher Faktor von $f(x)$; nach (11) und (12) ergibt sich dann:

$$f'(x) = (x-\alpha)^{m-1} \{ (x-\alpha) f_1'(x) + m\, f_1(x) \},$$

und daraus folgt:

Wenn $x-\alpha$ ein m-facher Faktor von $f(x)$ ist, so ist $x-\alpha$ ein $(m-1)$-facher Faktor von $f'(x)$.

9. Ist x_1 eine Wurzel von $f(x)$, so können wir $f(x) = (x-x_1) f_1(x)$ setzen, wo $f_1(x)$ eine Funktion vom Grade $n-1$ ist, und aus 3. geht hervor, daß die höchste Potenz x^{n-1} von x in $f_1(x)$ denselben Koeffizienten a_0 hat, wie x^n in $f(x)$. Hat $f_1(x)$ eine Wurzel x_2, so können wir ebenso $f_1(x) = (x-x_2) f_2(x)$ setzen u. s. f. Es ist also, wenn alle die so gebildeten Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ Wurzeln haben, und die letzte $f_{n-1}(x) = a_0(x-x_n)$ ist,

(13) $$f(x) = a_0 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n).$$

Daraus folgt, daß eine Funktion n^{ten} Grades niemals mehr als n Wurzeln haben kann.

Denn wenn $f(x)$ die n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat, so muß x_2 eine Wurzel von $f_1(x)$, x_3 eine Wurzel von $f_2(x)$ sein, u. s. f., und

die Zerlegung (13) ist möglich. Ist dann α irgend eine Wurzel von $f(x)$, so muß $(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \cdots (\alpha - x_n) = 0$, also α einer der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleich sein.

Wenn sich daher in einem besonderen Falle bei einer Funktion n^{ten} Grades,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

mehr als n Werte von x nachweisen lassen, für die $f(x)$ verschwindet, so bleibt nichts übrig, als daß die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle verschwinden, also $f(x)$ identisch (für jedes beliebige x) verschwindet. Wir können dem eben ausgesprochenen Satze auch die folgende Form geben, in der er in vielen Fällen ein wichtiges Beweismittel bietet:

Wenn eine Funktion n^{ten} Grades von x für mehr als n Werte von x verschwindet, so muß sie identisch verschwinden.

10. Unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Zerlegung (13) kann aber ein und dieselbe Zahl mehrmals vorkommen. Immerhin ist dann $f(x)$ in n Faktoren ersten Grades zerlegt, aber die Anzahl der Wurzeln ist kleiner als n. Um die Übereinstimmung in der Ausdrucksweise herzustellen, spricht man in diesen Fällen trotzdem von n Wurzeln, die man aber nur dadurch erhält, daß man eine oder einige der Wurzeln mehrmals, nämlich so oft zählt, als der betreffende Faktor $(x - x_i)$ in (13) vorkommt. Man hat es dann mit sogenannten mehrfachen Wurzeln zu tun, und nach 4. ist x_i eine mehrfache Wurzel, wenn es eine gemeinschaftliche Wurzel von $f(x)$ und $f'(x)$ ist.

§ 67. Größter gemeinschaftlicher Teiler.

1. Zwei ganze Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$, wofür wir bisweilen auch kürzer f und f_1 schreiben, die eine gemeinschaftliche Wurzel haben, haben auch einen gemeinschaftlichen Teiler. Denn ist x_1 eine gemeinschaftliche Wurzel, so sind beide Funktionen durch die lineare Funktion $x - x_1$ teilbar. Es können aber auch $f(x)$ und $f_1(x)$ gemeinschaftliche Teiler höheren Grades haben. Haben $f(x)$ und $f_1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Teiler, also auch keine gemeinschaftliche Wurzel, so heißen sie teilerfremd oder relativ prim.

Da die Divisionsregeln der ganzen Funktionen dieselben sind wie die der ganzen Zahlen, so kann man wie dort den Euklidischen Algorithmus zur Ermittelung der gemeinschaftlichen Teiler zweier Funktionen anwenden (§ 16).

Es seien f und f_1 zwei gegebene Funktionen der Grade n und n_1, und es sei $n \geqq n_1$. Man kann dann durch Division nach § 66, 1. eine

Reihe von Funktionen $f_2, f_3, \ldots$ von abnehmenden Graden $n_2, n_3, \ldots$ und die Quotienten $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ bilden, so daß

$$(1) \qquad \begin{aligned} f &= Qf_1 + f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 + f_3, \\ f_2 &= Q_2 f_3 + f_4, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Reihe von Gleichungen läßt sich so lange fortsetzen, als die Division nicht aufgeht. Da aber die Grade der $f_2, f_3, \ldots$ immer abnehmen, so muß die Division schließlich aufgehen. Es seien die beiden letzten dieser Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_{\nu-2} &= Q_{\nu-2} f_{\nu-1} + f_\nu, \\ f_{\nu-1} &= Q_{\nu-1} f_\nu, \end{aligned}$$

und hieraus läßt sich, genau wie bei den Zahlen, schließen, daß f_ν ein Teiler aller vorangehenden Funktionen $f_{\nu-1}, f_{\nu-2}, \ldots, f_1, f$ ist, und daß jeder Teiler von f und f_1 zugleich Teiler von $f_2, f_3, \ldots, f_\nu$ sein muß. Es heißt darum f_ν der größte gemeinschaftliche Teiler von f und f_1 (wobei das größer oder kleiner sich auf den Grad bezieht).

Es kann f_ν auch vom nullten Grade, d. h. von x unabhängig, eine von Null verschiedene Zahl sein, und durch eine Zahl ist jede Funktion teilbar; in diesem Falle sind f und f_1 teilerfremd.

2. Der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Funktionen kann also durch alleinige Anwendung der vier Spezies (rationale Rechnung) aus den Koeffizienten der gegebenen Funktionen abgeleitet werden.

3. Man kann nun auch durch rationale Rechnung entscheiden, ob eine ganze Funktion mehrfache Wurzeln hat, indem man die Funktion $f(x)$ und ihre Abgeleitete $f'(x)$ auf ihre gemeinsamen Teiler untersucht.

Wir nehmen folgendes Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 2x^5 + 2x + 1, \\ f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 2. \end{aligned}$$

Hier kann man für $f'(x) = 2(3x^5 - 5x^4 + 1)$ auch die Funktion $f_1(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$ zum ersten Divisor wählen, die sich von $f'(x)$ nur durch einen Zahlenfaktor unterscheidet.

Die erste Division ergibt:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\right) f_1(x) - \frac{5}{9}\,(x^4 - 3x - 2),$$

als zweiten Divisior f_2 kann man $x^4 - 3x - 2$ wählen und erhält

$$f_1(x) = (3x-5) f_2(x) + 9(x^2 - x - 1),$$

und nun ergibt die dritte Division mit $f_3 = x^2 - x - 1$, die aufgeht:

$$f_2 = (x^2 + x + 2) f_3.$$

Es ist also $x^2 - x - 1$ der größte gemeinschaftliche Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, und durch wirkliche Ausführung der Multiplikation bestätigt man leicht

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 1)^2.$$

4. Wenn man die Faktoren, die einfach, zweifach, dreifach, . . in einer Funktion $f(x)$ aufgehen, zusammenfaßt, so kann man setzen

$$f(x) = P_1 P_2^2 P_3^3 P_4^4 \ldots, \tag{3}$$

worin die $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ganze Funktionen sind, von denen keine einen mehrfachen Faktor und keine zwei einen gemeinschaftlichen Teiler haben. Es ist nicht ausgeschlossen, daß unter den $P_1, P_2, P_3, \ldots$ solche vorkommen, die gar keinen Faktor enthalten. Diese sind dann in der Zerlegung (2) gleich 1 zu setzen. Diese Funktionen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ kann man durch den Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Teilers, also durch rationale Rechnung, aus den Koeffizienten von $f(x)$ ableiten. Es ist nämlich nach § 66, 8.

$$f_1(x) = P_2 P_3^2 P_4^3 \ldots$$

der größte gemeinschaftliche Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$ und daraus ergibt sich

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = F(x) = P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$$

Der größte gemeinschaftliche Teiler von $F(x)$ und $f_1(x)$ ist daher

$$Q = P_2 P_3 P_4 \ldots,$$

und folglich ist

$$P_1 = \frac{f}{f_1 Q}.$$

Verfährt man ebenso mit $f_1(x)$, wie hier mit $f(x)$, so findet man P_2 u. s. f.

Es ist hierbei zu bemerken, daß wir nur bei der Ableitung des Verfahrens vorausgesetzt haben, daß $f(x)$ das Produkt linearer Faktoren sei. Die Anwendung des Verfahrens selbst setzt die Kenntnis dieser Faktoren nicht voraus. Da wir späterhin sehen werden, daß sich jede Funktion $f(x)$ in lineare Faktoren zerlegen läßt, so ist damit das Verfahren allgemein gerechtfertigt. Die Begründung des Verfahrens ohne die Zerlegung von $f(x)$ voraus-

zusetzen, ist schwieriger, und kann nicht mehr zu den Elementen gerechnet werden.[1])

5. Aus dem Euklidischen Algorithmus läßt sich die Lösung der folgenden Aufgabe ableiten:

Sind $f(x)$ und $f_1(x)$ zwei gegebene teilerfremde Funktionen, so sollen zwei andere ganze Funktionen $F(x)$, $F_1(x)$ so bestimmt werden, daß

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = 1 \tag{4}$$

wird.

Wir bemerken zunächst, daß sich die Aufgabe nicht wesentlich ändert, wenn auf der rechten Seite von (4) statt 1 ein anderer von Null verschiedener Zahlenwert c steht; denn man hat dann nur, um die Gleichung (4) zu erhalten, die Koeffizienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ durch c zu dividieren.

Um aber F und F_1 zu finden, hat man die Formeln (1) und (2) anzuwenden, in denen, wenn f und f_1 relativ prim sind, f_ν eine von Null verschiedene Zahl wird. Wenn man also aus der ersten der Gleichungen (1) f_2 entnimmt und in die zweite und dritte einsetzt, dann aus der zweiten f_3 entnimmt und in die folgenden einsetzt, und so fortfährt, so erhält man zuletzt aus der ersten Gleichung (2) eine Gleichung von der Form (4), und die Aufgabe ist gelöst.

Um ein einfaches Beispiel zu betrachten, nehmen wir:

$$f = x^2 - x - 1, \quad f_1 = x^2 + 1,$$

und erhalten:

$$x^2 - x - 1 = (x^2 + 1) - (x + 2),$$
$$x^2 + 1 = (x + 2)(x - 2) + 5.$$

Und daraus, indem man die erste Gleichung mit $x - 2$ multipliziert und zur zweiten addiert:

$$(x^2 - x - 1)(x - 2) + (x^2 + 1)(3 - x) = 5.$$

Folglich ist $F(x) = x - 2$, $F_1(x) = 3 - x$.

Unter der gleichen Voraussetzung über f und f_1, nämlich daß sie teilerfremd seien, kann man auch die Gleichung befriedigen

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = \Phi(x), \tag{5}$$

wenn $\Phi(x)$ eine beliebig gegebene ganze Funktion ist. Man hat nur die Gleichung (4) mit $\Phi(x)$ zu multiplizieren und dann für $F(x)\Phi(x)$ und $F_1(x)\Phi(x)$ wieder $F(x)$ und $F_1(x)$ zu schreiben.

---

1) Vgl. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., Bd. I, § 20.

§ 68. Reduzible und irreduzible Funktionen.

1. Wir nehmen jetzt an, daß in der ganzen Funktion n^{ten} Grades

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

die Koeffizienten ganze Zahlen seien.

Ist a_0 von Null verschieden, so können wir die Auffindung der Wurzeln von (1) auf den Fall zurückführen, daß $a_0 = 1$ ist. Wenn wir nämlich (1) mit a_0^{n-1} multiplizieren, so ergibt sich

$$a_0^{n-1} f(x) = (a_0 x)^n + a_1 (a_0 x)^{n-1} + a_2 a_0 (a_0 x)^{n-2} + \cdots + a_n a_0^{n-1},$$

und wenn wir also

$$a_0 x = y, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 a_0 = b_2, \quad \ldots, \quad a_n a_0^{n-1} = b_n,$$
$$a_0^{n-1} f(x) = \varphi(y)$$

setzen, so ist

$$\varphi(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n, \tag{2}$$

und die $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind ganze Zahlen.

Die Wurzeln von $f(x)$ erhält man dann, wenn man die Wurzeln von $\varphi(y)$ durch a_0 dividiert.

Man wird nun zunächst nach den etwa vorhandenen rationalen Wurzeln von $f(x)$ oder $\varphi(y)$ fragen. Ist p/q eine Wurzel von $\varphi(y)$, worin p, q ganze Zahlen sind, die wir ohne gemeinschaftliche Teiler annehmen können, und von denen die zweite, q, positiv angenommen sei, so muß

$$p^n + b_1 p^{n-1} q + b_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + b_n q^n = 0$$

sein. Hieraus folgt aber, daß p^n durch q teilbar sein müßte, was, da p und q relativ prim sein sollen, nur möglich ist, wenn $q = 1$ ist.

Eine rationale Wurzel von $\varphi(y)$ muß also eine ganze Zahl sein.

Ist aber p eine solche Wurzel, so ist

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \cdots + b_{n-1} p + b_n = 0,$$

und daraus folgt, daß b_n durch p teilbar sein muß. Um also festzustellen, ob eine rationale Wurzel von $\varphi(y)$ vorhanden ist oder nicht, hat man die sämtlichen Divisoren von b_n zu ermitteln, und jeden von ihnen, mit positivem und negativem Zeichen, versuchsweise in $\varphi(y)$ für y einzusetzen. Wenn p einer dieser Divisoren ist, für den $\varphi(p) = 0$ wird, so ist p eine rationale Wurzel von $\varphi(y)$ und p/a_0 eine rationale Wurzel von $f(x)$.

Es ist dann $\varphi(y)$ durch $y - p$ teilbar, und das Resultat der Division ist $\varphi(y) = (y - p)\, \varphi_1(y)$, worin $\varphi_1(y)$ eine Funktion von derselben Form wie $\varphi(y)$ ist, deren Koeffizienten gleichfalls ganze Zahlen sind.

So hat beispielsweise

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1$$

den Faktor $y - 1$, und es ergibt sich durch Division:

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1 = (y-1)(y^3 - 3y^2 - 3y - 1).$$

2. Eine Funktion $f(x)$ heißt ganzzahlig, wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen sind. Eine Funktion mit rationalen aber nicht ganzzahligen Koeffizienten kann durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl, nämlich mit dem Hauptnenner der Koeffizienten, in eine ganzzahlige verwandelt werden. Der größte gemeinschaftliche Teiler aller Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ einer ganzzahligen Funktion $f(x)$ heißt der Teiler der Funktion. Eine Funktion, deren Teiler $= 1$ ist, heißt primitiv. Jede Funktion $f(x)$ mit rationalen ganzen oder gebrochenen Koeffizienten läßt sich in die Form $\mu f_1(x)$ bringen, worin $f_1(x)$ eine primitive ganzzahlige Funktion und μ eine ganze oder gebrochene rationale Zahl ist. Soll der Koeffizient der höchsten Potenz von $f_1(x)$ positiv sein, so ist diese Darstellung nur auf eine Weise möglich.

3. Eine Funktion $f(x)$ mit rationalen Koeffizienten heißt reduzibel oder zerlegbar, wenn sie sich in zwei Faktoren $f_1(x)$, $f_2(x)$ mit rationalen Koeffizienten zerlegen läßt, deren jeder die Veränderliche x wirklich enthält. Ist eine solche Zerlegung nicht möglich, so heißt $f(x)$ irreduzibel oder unzerlegbar.

Der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ mit rationalen Koeffizienten hat, wie aus dem Algorithmus § 67 hervorgeht, ebenfalls rationale Koeffizienten. Wenn also $f(x)$ irreduzibel ist, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder ist $F(x)$ durch $f(x)$ teilbar, oder $F(x)$ ist relativ prim zu $f(x)$. Im letzteren Falle haben $f(x)$ und $F(x)$ keine gemeinschaftliche Wurzel. Daraus folgt der für die Gleichungstheorie außerordentlich wichtige

Hauptsatz: Hat die irreduzible Funktion $f(x)$ mit $F(x)$ eine Wurzel gemein, so ist $F(x)$ durch $f(x)$ teilbar, und alle Wurzeln von $f(x)$ sind zugleich Wurzeln von $F(x)$.

4. Wenn eine ganzzahlige Funktion

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

zerlegbar ist, so kann man nach 2. zwei ganze Zahlen h und m so bestimmen, daß

$$(2) \qquad h f(x) = m\,\varphi(x)\,\psi(x)$$

ist, worin $\varphi(x)$, $\psi(x)$ primitive ganzzahlige Funktionen sind. Außerdem können wir voraussetzen, daß h positiv und relativ prim

zu m sei. Wir wollen nachweisen, daß unter dieser Voraussetzung $h = 1$ sein muß. Setzen wir zu diesem Zweck

$$
(3) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &= b_0 x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \cdots + b_{\mu-1} x + b_\mu , \\ \psi(x) &= c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} x + c_\nu , \end{aligned}
$$

worin $\mu + \nu = n$ ist, so ergibt sich aus (2) durch Ausführung der Multiplikation:

$$
(4) \qquad \begin{aligned} h a_0 &= m b_0 c_0 , \\ h a_1 &= m(b_0 c_1 + b_1 c_0) , \\ h a_2 &= m(b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0) , \\ h a_3 &= m(b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0) , \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}
$$

Diese Gleichungen sind nach einem leicht ersichtlichen Gesetz zu bilden; es muß nämlich in jedem Gliede der rechten Seite die Summe der Indizes von b und c gleich dem Index von a auf der linken Seite sein. Rechts fallen natürlich alle die Glieder weg, in denen der Index von b größer als μ oder der von c größer als ν ist.

Ist nun p irgend ein Primfaktor von h, so kann dieser nach der Voraussetzung, daß φ und ψ primitiv seien, weder in allen b noch in allen c aufgehen, und es sei b_r das erste der b und c_s das erste der c, das durch p nicht teilbar ist. Es ist dann

$$
(5) \qquad \begin{array}{llll} b_0, b_1, \ldots, b_{r-1} & \text{teilbar,} & b_r & \text{unteilbar durch } p, \\ c_0, c_1, \ldots, c_{s-1} & \quad " & c_s & \quad " \qquad " \quad p. \end{array}
$$

Es kann vorkommen, daß schon b_0 oder c_0 durch p unteilbar sind; dann ist r oder s gleich 0 zu setzen.

Nun nehmen wir aus den Gleichungen (4) die $r + s + 1^{\text{te}}$ heraus und schreiben sie so:

$$
(6) \qquad \begin{aligned} h a_{r+s} = m(b_r c_s &+ b_{r-1} c_{s+1} + b_{r-2} c_{s+2} + \cdots \\ &+ b_{r+1} c_{s-1} + b_{r+2} c_{s-2} + \cdots). \end{aligned}
$$

Es ist aber $b_r c_s$ nach (5) durch p nicht teilbar, während die anderen Glieder $b_{r-1} c_{s+1}, \ldots, b_{r+1} c_{s-1}$ durch p teilbar sind, und folglich ist der Klammerausdruck durch p nicht teilbar. Da aber h und damit die linke Seite von (6) durch p teilbar ist, so muß m durch p teilbar sein, was der Voraussetzung widerspricht, daß h und m relativ prim sind.

Es kann also keine Primzahl p in h aufgehen und h muß folglich $= 1$ sein, und wir bekommen aus (2)

$$
(7) \qquad f(x) = m\, \varphi(x)\, \psi(x) .
$$

5. Setzt man $h = 1$, so zeigen die Formeln (4), daß m in allen a und daher auch im Teiler von $f(x)$ aufgehen muß. Ist aber mk der Teiler von $f(x)$, so können wir wie oben aus (6) schließen, daß $k = 1$, also m der Teiler von $f(x)$ sein muß. Ist $f(x)$ primitiv, so ist $m = 1$, und wir haben den Satz:

Eine reduzible primitive ganzzahlige Funktion läßt sich in primitive ganzzahlige Faktoren zerlegen.

6. Wenn $\varphi(x)$ oder $\psi(x)$ selbst wieder reduzibel sind, so können sie nach dem gleichen Satze wieder zerlegt werden, da aber die Grade der Faktoren immer niedriger sind als der Grad des Produktes, so muß diese Zerlegung abbrechen und wir gelangen zu dem Satze:

Eine reduzible primitive ganzzahlige Funktion läßt sich in eine endliche Anzahl irreduzibler primitiver Faktoren zerlegen:

(8) $$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\ldots\,\varphi_m(x).$$

Der Grad n von $f(x)$ ist gleich der Summe der Grade der Faktoren $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ und daher ist m höchstens gleich n, und dieser größte Wert wird nur erreicht, wenn diese Faktoren alle vom ersten Grade sind.

7. Die irreduziblen Faktoren sind analog den Primzahlen im Gebiete der ganzen Zahlen und es gilt wie dort der Satz:

Die Zerlegung (8) einer reduziblen Funktion $f(x)$ ist nur auf eine Art möglich, abgesehen von dem Vorzeichen der Faktoren φ.

Denn nach dem Euklidischen Algorithmus (§ 67, 1.) hat der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Funktionen mit rationalen Koeffizienten ebenfalls rationale Koeffizienten. Daraus folgt, daß eine solche Funktion $f(x)$ zu einer irreduziblen Funktion $\varphi(x)$ relativ prim ist, wenn sie nicht durch $\varphi(x)$ teilbar ist, und daraus schließt man wie bei den Zahlen (§ 17), daß ein Produkt zweier (oder mehrerer) Funktionen nur dann durch eine unzerlegbare Funktion φ teilbar ist, wenn wenigstens einer der Faktoren durch φ teilbar ist. Ist also ψ ein unzerlegbarer Faktor, der in dem Produkt (8) aufgeht, so muß ψ in einer der Funktionen φ, etwa in φ_1, aufgehen, und kann sich daher von φ_1 nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Sind aber beide Funktionen ganzzahlig und primitiv, so muß dieser Faktor ± 1 sein.

8. Nehmen wir an, in der ganzzahligen Funktion $f(x)$ sei der Koeffizient $a_0 = 1$, und diese Funktion sei zerlegbar in zwei Faktoren φ_1, ψ_1, deren Koeffizienten rationale ganze oder gebrochene Zahlen sind und in denen die höchsten Koeffizienten ebenfalls $= 1$

sind, so können wir zwei positive ganze Zahlen h_1, h_2 so bestimmen, daß $h_1\varphi_1 = \varphi$, $h_2\psi_1 = \psi$ ganzzahlig und primitiv werden. Dann folgt aber $h_1 h_2 f = \varphi\psi$ und wie in 4. ergibt sich $h_1 h_2 = 1$ und folglich $h_1 = 1$, $h_2 = 1$.

So bekommen wir den Satz, den Gauß in den Disq. arithm. Art. 42 bewiesen hat:

Ist die ganzzahlige Funktion

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

zerlegbar in die beiden Faktoren

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \cdots + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_\nu,$$

in denen die b_i, c_i rationale Zahlen sind, so müssen die b_i, c_i ganze Zahlen sein.

§ 69. Zerlegung reduzibler Funktionen.

1. Eine Funktion $F(x)$ vom Grade n:

(1) $$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

hat $n+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Diese Koeffizienten lassen sich so bestimmen, daß die Funktion $\varphi(x)$ für $n+1$ gegebene Werte $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von x gegebene Werte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ annimmt. Man erhält zur Bestimmung der a_i die linearen Gleichungen:

(2) $$\varphi(\alpha_0) = A_0, \quad \varphi(\alpha_1) = A_1, \quad \ldots, \quad \varphi(\alpha_n) = A_n,$$

und daraus sind die Koeffizienten a_i eindeutig bestimmt, wenn die Determinante des Systems nicht Null ist. Funktionen von niedrigerem als dem n^{ten} Grade sind als spezielle Fälle unter denen vom n^{ten} Grade enthalten. Man erhält sie, wenn sich aus den Gleichungen (2) $a_0 = 0$ ergibt. Es ist leicht zu zeigen, daß die Determinante dieses Systems gleich dem Produkt aller Differenzen $\alpha_i - \alpha_k$ ist, und daß sie also nicht Null ist, wenn, was selbstverständlich angenommen ist, die α_i voneinander verschieden sind. Wir können aber die Betrachtung der Determinante umgehen, wenn wir erstens zeigen, daß es keine zwei Funktionen $\varphi(x)$ vom n^{ten} oder niedrigerem Grade geben kann, die den Bedingungen (2) genügen, und wenn wir zweitens eine solche Funktion wirklich herstellen.

Nehmen wir, um ersteres zu zeigen, an, es gebe zwei Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, die den Bedingungen (2) bei gegebenen A_i und α_i

genügen, so ist $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ eine Funktion von höchstens n^{tem} Grade, die die $n+1$ Werte α_i zu Wurzeln hat; also müssen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ identisch sein (§ 66, 9.).

2. Um eine den Bedingungen (2) genügende Funktion $\varphi(x)$ herzustellen, setzen wir

$$(3) \qquad f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n),$$

welches eine Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, und

$$(4) \qquad \frac{f(x)}{x - \alpha_0} = f_0(x), \quad \frac{f(x)}{x - \alpha_1} = f_1(x), \quad \cdots, \quad \frac{f(x)}{x - \alpha_n} = f_n(x).$$

Dann sind dieses Funktionen n^{ten} Grades und es ist

$$f_i(\alpha_k) = 0, \qquad \text{wenn } i \neq k,$$
$$f_i(\alpha_i) = f'(\alpha_i) \qquad (\text{§ } 66, (7), (9)).$$

Wenn wir also

$$(5) \qquad g_i(x) = \frac{f_i(x)}{f'(\alpha_i)} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

setzen, so ist

$$(6) \qquad g_i(\alpha_k) = 0, \quad i \neq k, \quad g_i(\alpha_i) = 1,$$

und wenn wir also

$$(7) \qquad \varphi(x) = A_0 g_0(x) + A_1 g_1(x) + \cdots + A_n g_n(x)$$

setzen, so ist $\varphi(x)$ eine Funktion, die den Bedingungen (2) genügt.

Diese Formel wird die Interpolationsformel von Lagrange genannt. Sie dient unter anderem dazu, eine Funktion, von der man nur einzelne Werte, z. B. durch Beobachtung kennt, als ganze Funktion einer Variablen darzustellen. Dies wird mit einer gewissen Annäherung auch dann möglich sein, wenn das Gesetz, dem die beobachteten Tatsachen gehorchen, nicht so einfach ist.[1]

3. Wir wollen hier die Formel zu einem anderen Zwecke verwenden und ziehen zunächst daraus den Schluß:

> Nimmt man $n+1$ voneinander verschiedene Werte α_i beliebig an und bildet die Funktionen $g_i(x)$ nach (5), so kann man jede ganze Funktion $\varphi(x)$ vom n^{ten} oder niedrigeren Grade linear durch $g_i(x)$ (in der Form (7)) darstellen.

4. Nimmt man für die α_i ganze Zahlen, so werden die Koeffizienten der Funktionen $g_i(x)$ zwar rational, im allgemeinen aber nicht

1) Vgl. den Artikel „Interpolation" in Bd. I, Teil II der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

ganzzahlig. Gleichwohl sind in der Form (7) auch alle ganzzahligen Funktionen $\varphi(x)$ enthalten, und für diese müssen die $A_i = \varphi(\alpha_i)$ ganze Zahlen werden. Es werden aber nicht umgekehrt alle ganzzahligen Koeffizienten A_i aus (7) ganzzahlige Funktionen $\varphi(x)$ machen.

5. Kronecker hat auf die Darstellung (7) eine Methode gegründet, um durch eine endliche Anzahl von Versuchen die Faktoren einer reduziblen ganzzahligen Funktion $F(x)$ zu finden, oder deren Irreduzibilität festzustellen. Es ist dies eine Verallgemeinerung des in § 68, 1. dargelegten Verfahrens, die rationalen Wurzeln einer Funktion zu finden. Soll eine ganzzahlige Funktion $F(x)$ darnach auf ihre Irreduzibilität untersucht werden, so wird man zunächst nach dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinschaftlichen Teiler der Koeffizienten von $F(x)$ aufsuchen und wegheben. Wir können also $F(x)$ als primitive Funktion voraussetzen. Ist diese reduzibel, so ist sie nach § 68, 5. in primitive ganzzahlige Faktoren zerlegbar:

$$F(x) = \varphi(x)\,\psi(x). \tag{8}$$

Da die Summe der Grade von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gleich dem Grade von $F(x)$ ist, so ist der Grad der einen der beiden Funktionen φ, ψ höchstens gleich der Hälfte des Grades von $F(x)$, und wenn also $F(x)$ vom Grade $2n$ oder $2n+1$ ist, so ist der eine der beiden Faktoren, etwa $\varphi(x)$, höchstens vom Grade n, und $\varphi(x)$ ist also in der Form (7) darstellbar. Man nehme für die α_i beliebige ganze Zahlen, dann ist nach (8)

$$F(\alpha_i) = A_i\,\psi(\alpha_i),$$

und hierin sind A_i, $F(\alpha_i)$, $\psi(\alpha_i)$ ganze Zahlen. A_i muß also ein Teiler von $F(\alpha_i)$ sein.

Die $F(\alpha_i)$ sind aber, wenn F gegeben und die α_i angenommen sind, bestimmte ganze Zahlen, die nur eine endliche Anzahl von Divisoren haben, und man hat also für die $A_0, A_1, \ldots, A_n$ nur Kombinationen der Divisoren von $F(\alpha_1), F(\alpha_2), \ldots, F(\alpha_n)$ zu setzen, und hat dabei beide Vorzeichen zu berücksichtigen. Man erhält so aus (7) eine endliche Anzahl von Funktionen $\varphi(x)$, und mit diesen hat man $F(x)$ zu dividieren. Geht keine dieser Divisionen auf, so ist $F(x)$ sicher irreduzibel.

Nicht alle Kombinationen von Divisoren der $F(\alpha_i)$ werden, für die A_i gesetzt, ganzzahlige Funktionen $\varphi(x)$ ergeben, und darum können von vornherein gewisse Kombinationen ausgeschlossen und die Anzahl der notwendigen Versuche vermindert werden. Ein Verfahren, um diese unbrauchbaren Kombinationen auszuschließen, hat

Runge angegeben und dadurch das Kroneckersche Verfahren zu einem praktisch durchführbaren gemacht.[1])

6. Handelt es sich um die Beurteilung der Irreduzibilität in allgemeinen Fällen, so ist natürlich dieses Verfahren nicht anwendbar. Hierfür ist ein Satz von Eisenstein von großer Wichtigkeit, der folgendermaßen lautet:

Sind die ganzzahligen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einer Funktion $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ alle durch eine Primzahl p teilbar, der letzte a_n aber nicht durch p^2, so ist $f(x)$ irreduzibel, wobei die Zahl 0 als durch jede Primzahl teilbar gilt.

Um ihn zu beweisen, nehmen wir an, es sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

zerlegbar in die beiden Funktionen

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \cdots + b_{\mu-1} x + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \cdots + c_{\nu-1} x + c_\nu.$$

Es sind dann die $b_1, b_2, \ldots, b_\mu, c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, wenn sie rational sein sollen, nach § 68, 8. ebenfalls ganze Zahlen, und die Ausführung der Multiplikation gibt das Formelsystem, das wir nun in umgekehrter Reihenfolge wie vorhin anordnen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} a_n &= b_\mu c_\nu, \\ a_{n-1} &= b_\mu c_{\nu-1} + b_{\mu-1} c_\nu, \\ a_{n-2} &= b_\mu c_{\nu-2} + b_{\mu-1} c_{\nu-1} + b_{\mu-2} c_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_\nu &= b_\mu c_{\nu-\mu} + b_{\mu-1} c_{\nu-\mu+1} + \cdots + b_1 c_{\nu-1} + c_\nu. \end{aligned}$$

Zunächst gelten diese Formeln nur unter der Voraussetzung, daß $\nu > \mu$ ist; um sie aber auch für $\nu \lesseqgtr \mu$ anwenden zu können, müssen wir $c_0 = 1$ und jedes c mit negativem Index $= 0$ setzen.

Ist nun a_n durch p, aber nicht durch p^2 teilbar, so folgt aus $a_n = b_\mu c_\nu$, daß von den beiden Faktoren der eine, etwa b_μ, durch p teilbar sein muß, der andere c_ν aber unteilbar. Da aber $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_\nu$ alle auch durch p teilbar sind, so folgt aus (9), daß auch $b_{\mu-1}, b_{\mu-2}, \ldots, b_1$ durch p teilbar sein müssen; dann aber ergibt die letzte dieser Gleichungen, durch die a_ν bestimmt ist, den Widerspruch, daß auch c_ν durch p teilbar sein müßte. Der Satz ist also bewiesen.

Hieraus folgt z. B. die Irreduzibilität der Funktion 5ten Grades

$$(10)\qquad f(x) = x^5 - 4x - 2.$$

---

1) Kronecker, Crelles Journal Bd. 94, S. 347. Runge, ebenda Bd. 99, S. 90.

7. Die Begriffe der Reduzibilität und Irreduzibilität werden noch in einem weiteren Sinne gebraucht.

Eine irreduzible Funktion kann nämlich in Faktoren zerfallen, die in ihren Koeffizienten außer rationalen Zahlen noch eine bestimmte irrationale Zahl, z. B. $\sqrt{-1}$ oder $\sqrt{2}$ oder irgend eine andere Quadratwurzel enthalten; andere Funktionen werden auch dann noch unzerfällbar bleiben, wenn auch diese Irrationalität gestattet ist. Es entsteht auf diese Weise durch Hinzufügung dieser Irrationalität ein Zahlenreich (Zahlkörper), in dem jede rationale Rechnung, abgesehen von der Division durch Null, ausgeführt werden kann, und das dann für die gerade vorliegende spezielle Aufgabe als rational gilt und darum der Rationalitätsbereich genannt wird. Das Hinzufügen einer solchen Irrationalität zu den rationalen Zahlen wird Adjunktion genannt.

So ist z. B. x^2+1 irreduzibel im Gebiete der rationalen Zahlen, dagegen reduzibel nach Adjunktion von $i=\sqrt{-1}$; denn es ist $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

Die Funktion x^4-8x^3-8x-8 ist reduzibel nach Adjunktion von $\sqrt{3}$, nämlich

$$x^4-8x^3-8x-8$$
$$=\left[x^2-4x-2+2\sqrt{3}\,(x+1)\right]\left[x^2-4x-2-2\sqrt{3}\,(x+1)\right].$$

Oft werden auch mehrere Irrationalitäten nacheinander adjungiert. So bleibt x^4-2x^2+2 auch nach Adjunktion von $\sqrt{2}$ noch irreduzibel, wird aber reduzibel durch darauf folgende Adjunktion von $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$:

$$x^4-2x^2+2=\left(x^2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right).$$

Auch bei dieser erweiterten Bedeutung der Irreduzibilität bleibt der Hauptsatz 3. bestehen:

Sind die Koeffizienten von $F(x)$ und $f(x)$ in dem erweiterten Rationalitätsbereich enthalten und ist $f(x)$ in diesem erweiterten Bereiche irreduzibel, so ist, wenn $f(x)$ mit $F(x)$ eine Wurzel gemeinschaftlich hat, $F(x)$ durch $f(x)$ teilbar.

Zwölfter Abschnitt.

Hauptsätze der Algebra.

§ 70. Symmetrische Funktionen.

1. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ganz beliebige (unbestimmte, veränderliche) Größen, so können wir, wie wir in § 66 gesehen haben, eine Funktion n^{ten} Grades von x bilden, deren Wurzeln diese n Größen sind, nämlich

(1) $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Wir nehmen den Koeffizienten von x^n hier $= 1$ an. Ordnen wir nach Potenzen von x, so ergibt sich

(2) $$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

worin

(3) $$\begin{aligned} -a_1 &= \Sigma x_1, \\ a_2 &= \Sigma x_1 x_2, \\ -a_3 &= \Sigma x_1 x_2 x_3, \\ &\cdots\cdots \\ \pm a_n &= x_1 x_2 x_3 \ldots x_n, \end{aligned}$$

d. h. es ist $-a_1$ die Summe der x_i, a_2 die Summe der Produkte zu je zweien, $-a_3$ die Summe der Produkte zu je dreien u. s. f., endlich $\pm a_n$ das Produkt aller x_i (vgl. § 60, 1.).

Man kann also die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ rational durch die Wurzeln von $f(x)$ ausdrücken.

Die Summen, die auf der rechten Seite von (3) stehen, d. h. die Summe aller x_i, die Summen aller Produkte zu zwei, zu drei u. s. w., sind symmetrische Funktionen, d. h. sie bleiben ungeändert, wenn die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebig untereinander permutiert werden. Wir nennen $-a_1, a_2, -a_3, \ldots, \pm a_n$ speziell die symmetrischen Grundfunktionen.

2. Wir definiren eine symmetrische Funktion jetzt allgemein so: Eine symmetrische Funktion $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist ein Ausdruck, der durch Addition, Subtraktion und Multiplikation aus den n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und beliebigen Zahlen zusammengesetzt ist, und der sich nicht ändert, wenn die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebig untereinander permutiert werden.

3. Es gilt nun der für die ganze Algebra wichtige Satz:

Jede symmetrische Funktion $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kann rational und ganz durch die symmetrischen Grundfunktionen ausgedrückt werden.

D. h. man kann durch Addition, Subtraktion und Multiplikation einen Ausdruck $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zusammensetzen, so daß

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{4}$$

eine Identität wird, wenn für $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Ausdrücke aus (3) eingesetzt werden.

Wir wollen hier den sehr einfachen und eleganten Beweis dieses Satzes von Cauchy wiedergeben.

Der Satz ist selbstverständlich für $n = 1$; denn in diesem Falle haben wir nur eine symmetrische Grundfunktion $-a_1 = x_1$. Wir haben also nur nötig, den Satz unter der Voraussetzung, daß er für Funktionen von $n - 1$ Veränderlichen schon bewiesen sei, für n Veränderliche zu beweisen, weil er dann mittels der vollständigen Induktion allgemein folgt.

4. Um die symmetrischen Grundfunktionen der $n - 1$ Größen $x_2, \ldots, x_n$ zu erhalten, kann man den Quotienten

$$\varphi(x) = f(x)/(x - x_1)$$

bilden und erhält

$$(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots + q_{n-1},$$

worin (§ 66, (6))

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_2 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die symmetrischen Grundfunktionen der $x_2, \ldots, x_n$ sind also ganze Funktionen von x_1 und von $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, und wenn wir unsern Satz für $n - 1$ Größen als bewiesen annehmen, so sind alle symmetrischen Funktionen von $x_2, x_3, \ldots, x_n$ rational durch $x_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ausdrückbar.

Denken wir uns die gegebene symmetrische Funktion

$$S = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nach Potenzen von x_1 geordnet, so sind die Koeffizienten der einzelnen Potenzen symmetrische Funktionen der $x_2, x_3, \ldots, x_n$ und also in der angegebenen Weise ausdrückbar, und es folgt:

Setzen wir den Satz 3. für symmetrische Funktionen von $n-1$ Größen als erwiesen voraus, so kann S als ganze Funktion von $x_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ dargestellt werden.

Den so gebildeten Ausdruck von S bezeichnen wir mit $F(x_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Wenn wir aber die ganze Funktion $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ durch $f(x)$ dividieren, so erhalten wir nach § 66, (5) einen Quotienten Q und einen Rest R, der in bezug auf x höchstens vom Grade $n-1$ ist:

$$F(x) = Qf(x) + R(x), \tag{6}$$

worin Q und R außer $x, a_1, \ldots, a_{n-1}$ auch noch a_n enthalten und ganze Funktionen von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind. Setzen wir in dieser Formel $x = x_1$, so wird $f(x_1) = 0$, $F = S$ und folglich

$$S = R(x_1) = R(x_1, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

worin R eine ganze Funktion der $x_1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist, aber in bezug auf x_1 höchstens den Grad $n-1$ erreicht.

Nun ist aber nach Voraussetzung S eine symmetrische Funktion der $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sie ändert sich daher nicht, wenn wir beispielsweise x_1 und x_2 vertauschen, und da hierdurch auch die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ungeändert bleiben, so ist S auch gleich $R(x_2)$. Wir haben also

$$S = R(x_1) = R(x_2) = \cdots = R(x_n),$$

und die ganze Funktion $R(x) - S$, die höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, verschwindet für die n Werte $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sie muß daher nach dem Satze § 67, 9. identisch verschwinden. Setzen wir

$$R(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1},$$

so müssen $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} - S$ alle gleich Null sein, also

$$S = A_{n-1},$$

d. h. gleich einer ganzen Funktion der $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wie bewiesen werden sollte.

5. Hat die Funktion $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in ihrem ursprünglichen Ausdrucke nur ganzzahlige Koeffizienten, so hat auch $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nur ganze Zahlen zu Koeffizienten.

Setzen wir dies nämlich bei Funktionen von $n-1$ Veränderlichen als bewiesen voraus, so folgt es für Funktionen von n Veränderlichen daraus, daß bei der Division, die zu der Gleichung (6) führt, nach § 66 keine Brüche auftreten.

6. Der Beweis des Satzes von den symmetrischen Funktionen, den wir hier mitgeteilt haben, bietet zugleich ein Mittel, um solche Funktionen wirklich zu bilden, freilich meist nicht ohne sehr weitläufige Rechnungen. Betrachten wir z. B. für $n = 3$ die Funktion

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

die offenbar symmetrisch ist. Sind

$$- a_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad - a_3 = x_1 x_2 x_3$$

die symmetrischen Grundfunktionen, so sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der kubischen Funktion

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

und x_2, x_3 sind die Wurzeln der quadratischen Funktion

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = x^2 + (x_1 + a_1) x + (x_1^2 + a_1 x_1 + a_2),$$

woraus sich ergibt

$$x_2 + x_3 = -(x_1 + a_1), \quad x_2 x_3 = x_1^2 + a_1 x_1 + a_2,$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 3 x_1^2 + 2 a_1 x_1 + a_2,$$
$$(x_2 - x_3)^2 = (x_2 + x_3)^2 - 4 x_2 x_3 = - 3 x_1^2 - 2 a_1 x_1 - (4 a_2 - a_1^2),$$

und daraus folgt:

$$- D = (3 x_1^2 + 2 a_1 x_1 + a_2)^2 (3 x_1^2 + 2 a_1 x_1 + 4 a_2 - a_1^2).$$

Wenn man hierin x für x_1 schreibt und dann durch $f(x)$ dividiert, so gibt der Rest dieser Division, der von x unabhängig sein muß, den gesuchten Ausdruck für D.

Man kann die Rechnung dadurch etwas vereinfachen, daß man $(3 x_1^2 + 2 a_1 x_1 + a_2)^2$ durch Benutzung der Gleichung $f(x_1) = 0$ zunächst auf den zweiten Grad reduziert, wodurch man erhält:

$$(a_1^2 - 3 a_2) x_1^2 + (a_1 a_2 - 9 a_3) x_1 + (a_2^2 - 3 a_1 a_3).$$

Dies ist mit $3 x_1^2 + 2 a_1 x_1 + 4 a_2 - a_1^2$ zu multiplizieren und dann erst die Division auszuführen. Auf diese Weise läßt sich die Rechnung in kurzer Zeit durchführen und gibt das Resultat:

$$D = a_1^2 a_2^2 + 18 a_1 a_2 a_3 - 4 a_1^3 a_3 - 4 a_2^3 - 27 a_3^2.$$

Dieser Ausdruck D heißt die Diskriminante der kubischen Funktion $f(x)$. Ihr Verschwinden zeigt an, daß von den drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 zwei einander gleich sind.

§ 71. Die Potenzsummen.

1. Um symmetrische Funktionen durch die Grundfunktionen darzustellen, gibt es in besonderen Fällen noch einfachere Mittel. Wir wollen einen besonders wichtigen Fall dieser Art betrachten.

Wir setzen

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = \varphi_1(x), \quad \frac{f(x)}{x-x_2} = \varphi_2(x), \quad \cdots, \quad \frac{f(x)}{x-x_n} = \varphi_n(x),$$

(1) $$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1},$$

und wir haben dann (nach § 66, 4.)

$$\varphi_1(x_1) = f'(x_1), \quad \varphi_1(x_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_1(x_n) = 0,$$

und entsprechendes gilt für $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Die Summe dieser Funktionen:

$$F(x) = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-x_n}$$

oder

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x)$$

ist aber eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades und es ist

$$F(x_1) = f'(x_1), \quad F(x_2) = f'(x_2), \quad \ldots, \quad F(x_n) = f'(x_n).$$

Die Differenz $F(x) - f'(x)$ ist also gleichfalls eine ganze Funktion, höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, die für $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, also für n Werte verschwindet, und die daher nach dem Satze (§ 67, 9.) identisch verschwinden muß. Wir haben daher die identische, d. h. für alle x gültige Gleichung

(2) $$\frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-x_n} = f'(x).$$

2. Setzen wir

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots + q_{n-1},$$

so ist nach § 66, (6)

(3) $$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_2 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ q_3 &= x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + a_2 x_1^{n-3} + \cdots + a_{n-1}, \end{aligned}$$

und daraus erhält man die übrigen Glieder der Summe (2), wenn man x_1 durch $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ersetzt.

Wenn wir mit $\Sigma q_1, \Sigma q_2, \ldots, \Sigma q_{n-1}$ die Summe der so gebildeten entsprechenden q bezeichnen, so ergibt die Gleichung (2):

$$n x^{n-1} + x^{n-2}\Sigma q_1 + x^{n-3}\Sigma q_2 + \cdots + \Sigma q_{n-1} = f'(x),$$

und die Vergleichung mit dem Ausdruck (1) von $f'(x)$ ergibt:

$$(4) \qquad (n-1)a_1 = \Sigma q_1, \quad (n-2)a_2 = \Sigma q_2, \ \ldots, \quad a_{n-1} = \Sigma q_{n-1}.$$

Nun führen wir die unter dem Namen der Potenzsummen bekannten symmetrischen Funktionen ein, indem wir setzen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_k &= x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \end{aligned}$$

und wenn man also nach (3) die Summe Σq_i bildet, so folgt

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= s_1 + n a_1, \\ \Sigma q_2 &= s_2 + s_1 a_1 + n a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma q_{n-1} &= s_{n-1} + s_{n-2} a_1 + s_{n-3} a_2 + \cdots + n a_{n-1}, \end{aligned}$$

und dies in (4) eingesetzt ergibt:

$$(6) \qquad \begin{aligned} 0 &= s_1 + a_1 \\ 0 &= s_2 + a_1 s_1 + 2 a_2, \\ 0 &= s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3 a_3, \\ 0 &= s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4 a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \cdots + (n-1) a_{n-1}. \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ als Funktionen der $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ leicht eine nach der anderen berechnen. Man erhält z. B.

$$(7) \qquad \begin{aligned} s_1 &= -a_1, \\ s_2 &= a_1^2 - 2a_2, \\ s_3 &= -a_1^3 + 3a_1 a_2 + 3a_3, \\ s_4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und aus den Potenzsummen lassen sich viele andere symmetrische Funktionen leichter als auf dem anderen Wege berechnen.

3. Man kann aber auch ebenso die symmetrischen Grundfunktionen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ durch die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ ausdrücken, z. B.:

$$
(8)\qquad \begin{aligned}
a_1 &= -s_1, \\
2a_2 &= s_1^2 - s_2, \\
2 \cdot 3a_3 &= -s_1^3 + 3s_1s_2 - 2s_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

4. Aus den Gleichungen (6) lassen sich nur die Potenzsummen s_k bilden, so lange $k < n$ ist. Sehr leicht erhält man aber auch Gleichungen für $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$, wenn man die Summen bildet:

$$\Sigma f(x_1) = 0, \quad \Sigma x_1 f(x_1) = 0, \quad \Sigma x_1^2 f(x_1) = 0, \quad \ldots,$$

nämlich

$$
(9)\qquad \begin{aligned}
0 &= s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + n a_n, \\
0 &= s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \cdots + a_n s_1, \\
0 &= s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \cdots + a_n s_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ja man kann auf dem gleichen Wege $s_{-1}, s_{-3}, \ldots$ berechnen, wenn man $\Sigma x_1^{-1} f(x_1) = 0$, $\Sigma x_1^{-2} f(x_1) = 0, \ldots$ bildet:

$$
\begin{aligned}
0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \cdots + a_n s_{-1}, \\
0 &= s_{n-2} + a_1 s_{n-3} + \cdots + a_n s_{-2},
\end{aligned}
$$

worin s_0 immer gleich n zu setzen ist. In den Ausdrücken der $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ durch die a treten dann aber Potenzen von a_n als Nenner auf.

Durch (8) und (9) kann man auch nach a_n durch $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ausdrücken und es folgt daher:

Eine Funktion $f(x)$ ist vollständig bestimmt, wenn $a_0 = 1$ und die Potenzsummen der Wurzeln gegeben sind, und man kann jede symmetrische Funktion auch als Funktion der $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ ausdrücken.

Während aber die Ausdrücke der s durch die a, wie man sieht, in ihren Koeffizienten nur ganze Zahlen haben, enthalten die Ausdrücke der a durch die s auch Brüche.[1])

5. Wir wollen einige Beispiele betrachten. Soll die symmetrische Funktion $\Sigma x_1^2 x_2^2$ bestimmt werden, d. h. die Summe der Produkte der Quadrate der x_i zu je zweien, so können wir von der Formel Gebrauch machen:

---

1) Die ersten Ausdrücke für Potenzsummen gab Albert Girard in dem Werke „Invention nouvelle en l'algèbre" (1629). Sie wurden dann von Newton verallgemeinert (Arithmetica universalis 1707). Daher sind die Formeln (6) unter dem Namen der Newtonschen Formeln bekannt.

$$(\Sigma x_1^2)^2 = 2\,\Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^4$$

oder

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 = \tfrac{1}{2}(s_2^2 - s_4)$$
$$= a_2^2 - 2\,a_1 a_3 + 2\,a_4.$$

Eine andere Aufgabe, die durch die Potenzsummen gelöst werden kann, ist die: Es ist

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

eine gegebene Funktion von x vom n^{ten} Grade. Es soll eine Funktion

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n$$

gefunden werden, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von $f(x)$ sind.

Wenn $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Potenzsummen der Wurzeln von $f(x)$ sind, so sind $s_2, s_4, s_6, \ldots$ die aufeinanderfolgenden Potenzsummen der Wurzeln von $F(x)$, und die Formeln in 3. und 4. ergeben für die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ die Ausdrücke

$$A_1 = -s_2,$$
$$2\,A_2 = s_2^2 - s_4,$$
$$6\,A_3 = -s_2^3 + 3\,s_2 s_4 - 2\,s_6,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus kann man mit Hilfe der Formeln in Nr. 2 die $A_1, A_2, \ldots$ durch die $a_1, a_2, \ldots$ ausdrücken, und erhält z. B.

$$A_1 = 2\,a_2 - a_1^2,$$
$$A_2 = a_2^2 - 2\,a_1 a_3 + 2\,a_4,$$

so daß, wie es sein muß, A_2 mit dem oben gefundenen Ausdruck $\Sigma x_1^2 x_2^2$ identisch ist.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch anwenden, wenn es sich darum handelt, aus $f(x)$ eine Funktion $F(x)$ abzuleiten, deren Wurzeln irgend welche, etwa die k^{ten} Potenzen von den Wurzeln von $f(x)$ sind. Die Potenzsummen der Wurzeln von $F(x)$ sind dann $s_k, s_{2k}, s_{3k}, \ldots$, und daraus lassen sich die Koeffizienten von $F(x)$ nach 3. und 4. zusammensetzen.

6. Man kann noch auf einem anderen Wege die Koeffizienten der Funktion $F(x)$, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von $f(x)$ sind, bestimmen. Setzen wir nämlich $x^2 = y$, so verschwindet immer eine der beiden Funktionen $f(\sqrt{y})$, $f(-\sqrt{y})$, wenn für y eine Wurzel von $F(x)$ gesetzt wird. Es ist also

$$F(y) = \pm f(\sqrt{y})\, f(-\sqrt{y}),$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Nun läßt sich $f(x)$ in zwei Summanden $f_1(x) + xf_2(x)$ zerlegen, von denen der erste $f_1(x)$ die geraden, der zweite $xf_2(x)$ die ungeraden Potenzen von x enthält, und es ist dann

$$F(y) = \pm \left(f_1(\sqrt{y}) + \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right) \left(f_1(\sqrt{y}) - \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right)$$
$$= \pm \left[\left(f_1(\sqrt{y})\right)^2 - y\left(f_2(\sqrt{y})\right)^2\right].$$

In der letzten Form kommt keine ungerade Potenz von $\sqrt{y}$ mehr vor. Ist z. B. n eine gerade Zahl, so ist

$$f_1(x) = x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \cdots,$$
$$f_2(x) = a_1 x^{n-2} + a_3 x^{n-4} + \cdots,$$

und wir erhalten

$$F(y) = \left(y^{\frac{n}{2}} + a_2 y^{\frac{n-2}{2}} + a_4 y^{\frac{n-4}{2}} + \cdots\right)^2$$
$$- y\left(a_1 y^{\frac{n-2}{2}} + a_3 y^{\frac{n-4}{2}} + \cdots\right)^2$$
$$= y^n + (2a_2 - a_1^2) y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) y^{n-2} + \cdots.$$

Bei diesem Verfahren ist die Rechnung noch etwas einfacher als bei Benutzung der Potenzsummen, und es ergeben sich die numerischen Koeffizienten als ganze Zahlen, was bei der Methode durch die Potenzsummen nicht ohne weiteres ersichtlich ist.

§ 72. Fundamentalsatz von der Wurzelexistenz.

1. Wir haben im früheren gesehen, daß man immer die n Koeffizienten einer ganzen Funktion $f(x)$ so bestimmen kann, daß diese Funktion n beliebig gegebene Größen zu Wurzeln hat, und man kann daher in gewissem Sinne sagen, daß die Mannigfaltigkeit der Funktionen mit n Wurzeln ebenso groß ist, wie die Mannigfaltigkeit aller Funktionen $f(x)$, die man überhaupt bilden kann. Damit ist aber natürlich nicht wirklich bewiesen, daß diese beiden Mannigfaltigkeiten sich vollkommen decken; mit anderen Worten, es ist noch nicht bewiesen, daß eine Funktion n^{ten} Grades immer n Wurzeln hat.

Es würde genügen, wenn wir beweisen könnten, daß für jedes n jede Funktion n^{ten} Grades $f(x)$ wenigstens eine (reelle oder komplexe) Wurzel hat. Denn ist eine solche Wurzel α, so hat die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f(x)/(x-\alpha)$ ebenfalls eine Wurzel β u. s. f., und man schließt daraus, daß $f(x)$ in n lineare Faktoren zerlegbar ist.

Wir brauchen uns bei der Funktion $f(x)$ nicht auf reelle Koeffizienten zu beschränken. Wenn wir aber die Existenz einer Wurzel

für jede Funktion mit reellen Koeffizienten nachgewiesen haben, so folgt sie auch für Funktionen mit komplexen Koeffizienten. Denn sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei Funktionen, deren Koeffizienten konjugiert imaginär sind, so hat $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ reelle Koeffizienten. Hat nun $f(x)$ eine Wurzel α_1, so ist entweder $f_1(\alpha_1) = 0$ oder $f_2(\alpha_1) = 0$. Nehmen wir an, es sei $f_1(\alpha_1) = 0$, so ist $f_2(\alpha_2) = 0$, wenn α_2 die zu α_1 konjugierte Zahl ist, und es hat also sowohl $f_1(x)$ als $f_2(x)$ eine Wurzel. Hiernach bleibt uns noch übrig, den folgenden Satz zu beweisen:

Jede ganze Funktion $f(x)$ mit reellen Koeffizienten hat wenigstens eine reelle oder komplexe Wurzel.

Dieser Satz ist so wichtig, daß man ihn den Fundamentalsatz der Algebra genannt hat. Der erste, der ihn bewiesen hat, ist Gauß. Er hat von dem Satze drei auf ganz verschiedenen Grundlagen beruhende Beweise gegeben.

Der zweite und dritte dieser Beweise können nicht mit elementaren Mitteln dargestellt werden. Der erste aber, den Gauß zuerst in seiner Doktordissertation (1799) und 50 Jahre später (1849) in wesentlich vereinfachter und verbesserter Form veröffentlicht hat, ist so einfach und anschaulich, daß es wohl möglich sein dürfte, ihn auch mit nur elementaren Kenntnissen zu verstehen. Bei dem Versuch, ihn in dieser Weise darzustellen, folgen wir der zweiten Fassung.

Daß wir uns dabei auf die Annahme reeller Koeffizienten in $f(x)$ beschränken, geschieht nur im Interesse einer etwas einfacheren Bezeichnung. Nach der oben gemachten Bemerkung liegt darin keine sachliche Beschränkung.

2. Es sei also

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n \tag{1}$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades von z, und die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien gegebene reelle Zahlen. Es ist nachzuweisen, daß es eine reelle oder imaginäre Zahl gibt, die, für z gesetzt, $f(z)$ zu Null macht. Wir setzen

$$z = x + iy,$$

und stellen z nach § 51 durch die Punkte einer Ebene dar. Es sind dann x, y die Koordinaten eines Punktes in der Ebene, den wir den Punkt z nennen.

Dann hat in jedem Punkte dieser Ebene die Funktion $f(z)$ einen bestimmten Wert, und es ist zu zeigen, daß es wenigstens einen Punkt gibt, in dem $f(z)$ den Wert Null hat. Ein solcher Punkt mag

(2) $$f(z) = X + iY$$

ergeben, und man kann X und Y leicht bilden, indem man den binomischen Satz auf die Potenzen von $x + iy$ anwendet. Einfachere Formeln ergeben sich aber, wenn man Polarkoordinaten anwendet, aus dem Moivreschen Satz. Setzt man nämlich

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$(x+iy)^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

so erhält man (§ 51, 8.)

(3) $$\begin{aligned} X &= r^n\cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \cdots + a_n, \\ Y &= r^n\sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \cdots + a_{n-1} r\sin\varphi. \end{aligned}$$

3. Es soll hier noch ein anderer Ausdruck für X und Y angeführt werden, aus dem wir gleich einen Schluß ziehen werden, der für das Folgende wichtig ist.

Wir setzen (vgl. Bd. II, § 29, (11))

$$t = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$z = r\,\frac{(1+it)^2}{1+t^2},$$

und daraus folgt

$$(1+t^2)^n(X+iY) = r^n(1+it)^{2n} + a_1 r^{n-1}(1+it)^{2n-2}(1+t^2) + \cdots + a_n(1+t^2)^n,$$

und wenn wir auf die einzelnen Glieder den binomischen Satz anwenden und nach t ordnen:

(4) $$X = \frac{F(t)}{(1+t^2)^n}, \quad Y = \frac{\Phi(t)}{(1+t^2)^n},$$

worin $F(t)$ und $\Phi(t)$ ganze Funktionen von t von den Graden $2n$ und $2n-1$ (höchstens) sind. Außerdem sind $F(t)$, $\Phi(t)$ ganze Funktionen von r vom Grade n.

4. Alle Punkte der xy-Ebene, denen ein konstanter Wert von r entspricht, liegen auf einem Kreise mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt. Wir wollen diesen Kreis mit (r) bezeichnen. Will man die Punkte ermitteln, in denen eine der Funktionen X, Y auf einem solchen Kreise verschwindet, so hat man die Gleichungen $F(t) = 0$, $\Phi(t) = 0$ für ein gegebenes r zu lösen und zu beachten, daß zu jedem Wert von t ein Wert von $\cos\varphi$ und von $\sin\varphi$, also ein Punkt des Kreises gehört.

Bei der Funktion Y kommt noch der Wert $t = \infty$, d. h. $\varphi = \pi$ hinzu, und dies gilt auch bei X, wenn der Grad von $F(t)$ niedriger als $2n$ sein sollte. Aus den Graden der Funktionen $F(t)$, $\Phi(t)$ schließen wir alsdann den Satz:

Jede der beiden Funktionen X, Y kann auf einem Kreise (r) höchstens in $2n$ Punkten Null werden.

Daraus folgt, daß keine der Funktionen X, Y in einem Flächenstück überall gleich Null sein kann.

Denn durch ein solches Flächenstück könnte man immer einen Kreisbogen legen, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt liegt, und auf diesem würde dann X oder Y in unendlich vielen Punkten verschwinden.

5. Die Wurzelpunkte der Funktion $f(z)$ sind die Punkte, in denen gleichzeitig

$$X = 0, \quad Y = 0$$

wird. Beim Nachweis der Existenz solcher Punkte stützen wir uns auf die Stetigkeit dieser Funktionen, die darin ihren Ausdruck findet:

Sind c_1, c_2 zwei Punkte, in denen die Funktion X entgegengesetzte Vorzeichen hat, so liegt auf jeder (geraden oder krummen) Linie, die die beiden Punkte c_1, c_2 verbindet, wenigstens ein Punkt, in dem X verschwindet.

Gleiches gilt für die Funktion X.

6. Wir knüpfen die ferneren Betrachtungen zunächst an die Funktion Y an und stellen folgenden Satz auf:

Man kann r so groß annehmen, daß die Funktion Y auf dem Kreise (r) im Vorzeichen mit $\sin n\varphi$ übereinstimmt, wenigstens überall da, wo $\sin n\varphi$ dem absoluten Werte nach über einer beliebig kleinen gegebenen Zahl ϑ liegt.

Man sieht dies sofort ein, wenn man Y in die Form setzt:

$$Y = r^n\left(\sin n\varphi + \frac{a_1}{r}\sin(n-1)\varphi + \frac{a_2}{r^2}\sin(n-2)\varphi + \cdots\right),$$

worin man dann r so groß annehmen kann, daß die Summe aller auf das erste folgenden Glieder absolut kleiner ist als eine beliebige Größe, also auch kleiner als ϑ, und dann entscheidet das erste Glied über das Vorzeichen.

Hieraus ergibt sich folgendes:

Wir markieren auf einer Kreisperipherie (r) die Punkte, in denen

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

ist und bezeichnen diese Punkte durch die Ziffern

$$0, 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Wir erhalten dann auf der Kreisperipherie $2n$ Intervalle

$$(0\,1),\ (1\,2),\ (2\,3),\ \ldots,\ (2n-1,\,0),$$

in denen $\sin n\varphi$ abwechselnd positiv und negativ ist. (Fig. 14 zeigt diese Einteilung für den Fall $n = 5$.).

Schließen wir also die nächste Nachbarschaft der Teilpunkte aus und nehmen r hinlänglich groß, so ist in diesen Intervallen auch Y abwechselnd positiv und negativ.[1])

Daraus folgt nach 5., daß Y in der Nachbarschaft eines jeden Teilpunktes durch Null gehen muß und nach 4. kann kann es in keinem anderen Punkte der Kreisperipherie Null werden.

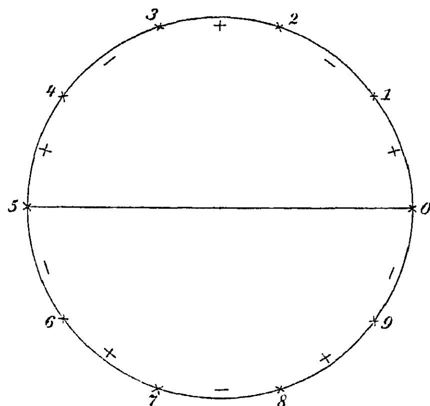


Fig. 14.

Da auch das Vorzeichen von X (bei hinlänglich großem r) durch das Vorzeichen des ersten Gliedes $r^n \cos n\varphi$ bestimmt wird, so ergibt sich weiter, daß X in der Nachbarschaft der geraden Teilpunkte $0, 2, 4, \ldots, 2n-2$ und in diesen Teilpunkten selbst positiv, in den ungeraden Teilpunkten $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ negativ ist.

7. Wie wir in Nr. 4 gesehen haben, ist es nicht möglich, daß Y in einem Flächenstück überall verschwindet. Folglich ist die Ebene in Felder geteilt, in denen Y positiv und negativ ist, und diese Felder sind voneinander getrennt durch Linien, in denen Y verschwindet.

Von einem der Intervalle $(2h, 2h+1)$ des Kreises (r), in dem Y positiv ist, erstreckt sich nun zunächst ein Flächenstreifen, in dem Y positiv bleibt, außerhalb des Kreises (r), und dieser Streifen schließt sich um so mehr dem Sektor von $\varphi = 2h\pi/n$ bis $\varphi = (2h+1)\pi/n$ an, je weiter er sich vom Mittelpunkt entfernt. Dieses Flächenstück, in dem Y positiv bleibt, muß sich aber noch ins Innere des Kreises

1) Was wir hier die Nachbarschaft der Teilpunkte nennen, sind die Strecken auf dem Kreise (r), in denen

$$\frac{k\pi}{n} - \frac{\eta}{n} < \varphi < \frac{k\pi}{n} + \frac{\eta}{n}$$

ist, wenn $\vartheta = \sin\eta$ gesetzt ist. Die Bogenlänge eines dieser ausgeschlossenen Stücke des Kreises (r) ist also $2\eta r/n$ und diese Strecke muß kleiner sein als $\pi r/n$, also $\eta < \frac{1}{2}\pi$.

fortsetzen. Den Teil, der im Innern des Kreises liegt, bezeichnen wir mit H. Hierbei sind mehrere Formen zu unterscheiden, wobei Flächenstücke, die sich nur in einzelnen Punkten berühren, als nicht zusammenhängend betrachtet werden.

Entweder H endigt im Innern des Kreises und hat also außer $(2h, 2h+1)$ keinen Teil der Kreisperipherie zur Grenze, oder es erstreckt sich H bis zu einem andern Intervall $(2k, 2k+1)$ oder es teilt sich H in zwei oder mehr Äste, deren jeder an einem Intervall $(2l, 2l+1)$ endigt.

Ein Beisspiel des ersten Verhaltens geben in unserer Figur 15 die Flächen (0, 1, 10) oder (2, 3, 12). Das zweite Verhalten zeigt

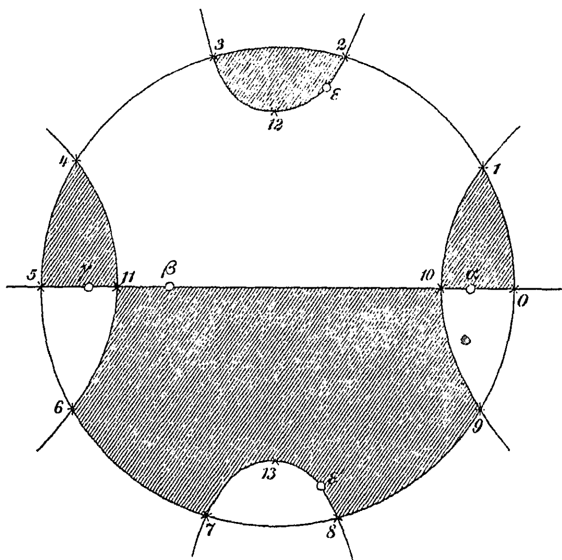


Fig. 15.

(8, 9, 10, 11, 6, 7). Die Teilung in mehrere Äste kommt in diesem einfachen Beispiel nicht vor.

Es wäre auch denkbar, daß im Innern einer der Flächen H ein Flächenstück wie eine Insel liegt, in dem Y wieder negativ wäre; ein solches Verhalten (was übrigens nebenbei bemerkt nicht vorkommen kann) würde aber unsern Schluß auch nicht stören.

8. Wir denken uns nun die Begrenzung einer Fläche H in dem Sinne durchwandert, daß man das Innere von H immer zur Linken hat. Dann wird jedes Intervall des Kreises, das in dieser Begrenzung vorkommt, in dem also Y positiv sein muß, ebenfalls so durchwandert, daß das Kreis-Innere zur Linken liegt, d. h. von einem geraden

Teilpunkt nach dem nächstfolgenden ungeraden. Der Weg um H herum verläßt also die Kreisperipherie bei ungeraden Teilpunkten und trifft sie wieder bei geraden Teilpunkten.

Betrachten wir einen Teil S dieses Weges, der von dem Punkte $2h+1$ durch das Innere bis zu einem Punkte $2k$ führt, so ist längs S überall $Y=0$. Im Punkte $2h+1$ ist aber X negativ und im Punkte $2k$ ist X positiv. Folglich muß X auf dem Wege S wenigstens in einem Punkte gleich Null werden, und dieser Punkt ist ein Wurzelpunkt, dessen Existenz somit nachgewiesen ist. Zum bessern Verständnis vergleiche man die Figur 15, die der Annahme

$$f(z) = z^5 - 4z - 2$$

ungefähr entspricht.

Auf dem Wege (1, 10, 0) liegt der Wurzelpunkt α,
auf dem Wege (3, 12, 2) liegt ε,
auf (5, 11, 4) liegt γ,
auf (9, 10, 11, 6) liegt β,
auf (8, 13, 7) liegt ε'.

Dreizehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen ersten Grades.

§ 73. Zahlenkongruenzen.

1. Wie wir früher gesehen haben (§ 15) kann man, wenn m und n zwei beliebige natürliche Zahlen sind, die Zahlen q und r so bestimmen, daß

$$m = qn + r$$

ist. Hierin ist q Null oder positiv, und r genügt der Bedingung

$$0 \overline{\gtrless} r < n.$$

Die Zahl r heißt der Rest von m nach n. Er kann bei gegebenem n nur einen der n Werte haben:

$$(1) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Zwei Zahlen m und m', die denselben Rest haben, heißen restgleich oder kongruent nach dem Modul n.[1]) Es ist dann

$$m' = q'n + r$$

und folglich

$$m - m' = (q - q')n,$$

also $m - m'$ durch n teilbar.

Es gilt auch das Umgekehrte, daß nämlich zwei Zahlen m, m', deren Differenz $m - m'$ durch n teilbar ist, restgleich sind. Denn setzen wir

$$m = qn + r, \quad m' = q'n + r',$$

so wird

$$m - m' = (q - q')n + r - r'.$$

Wenn nun $m - m'$ durch n teilbar ist, so muß hiernach auch $r - r'$ durch n teilbar (oder $= 0$) sein. Da aber r und r' beide der Zahlenreihe (1) angehören, so kann ihre Differenz dem absoluten Werte nach nicht größer als $n - 1$ sein, und kann also, wenn sie von Null verschieden ist, nicht durch n teilbar sein. Folglich ist $r = r'$.

---

1) Numeri congrui nach Gauß.

2. Die Eigenschaft zweier Zahlen, kongruent zu sein, deutet man nach Gauß durch das Zeichen an:

$$m \equiv m' \pmod{n}$$

(spr. m kongruent mit m' nach dem Modul n oder auch kürzer nach n). Eine solche Formel wird eine Kongruenz (Zahlenkongruenz) genannt.

Der Name hat mit dem geometrischen Begriff der Kongruenz nichts zu tun.

Jede Zahl ist mit ihrem Rest nach dem Divisor als Modul kongruent

$$m \equiv r \pmod{n}.$$

Wenn der Modul im Verlauf einer Rechnung nicht geändert wird, so kann man ihn in der Bezeichnung bisweilen weglassen, ohne ein Mißverständnis befürchten zu müssen. In diesem Sinne sind die folgenden Kongruenzen zu verstehen.

3. Für das Rechnen mit kongruenten Zahlen sind die folgenden Sätze wichtig:

Ist

$$a \equiv \alpha \quad \text{und} \quad b \equiv \beta,$$

so ist auch

$$a + b \equiv \alpha + \beta,$$

$$a - b \equiv \alpha - \beta,$$

$$ab \equiv \alpha\beta.$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Sätze sofort aus den Formeln:

$$(a + b) - (\alpha + \beta) = (a - \alpha) + (b - \beta),$$

$$(a - b) - (\alpha - \beta) = (a - \alpha) - (b - \beta),$$

$$\begin{aligned} ab - \alpha\beta &= (a - \alpha + \alpha)(b - \beta + \beta) - \alpha\beta \\ &= (a - \alpha)(b - \beta) + \beta(a - \alpha) + \alpha(b - \beta), \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, daß wenn $a - \alpha$ und $b - \beta$ durch n teilbar sind, auch die Differenzen $(a \pm b) - (\alpha \pm \beta)$, $ab - \alpha\beta$ durch n teilbar sind, wie diese Sätze verlangen.

Auf diesen Sätzen beruht ein Probeverfahren, um die Richtigkeit weitläufiger Rechnungen zu prüfen, die aus Addition, Subtraktion und Multiplikation zusammengesetzt sind. Man wähle einen beliebigen Modul n und reduziere alle Zahlen, die in der Rechnung vorkommen, auf ihre Reste nach dem Modul n. Dann muß das Resultat der Rechnung in ihrer ursprünglichen und in der so vereinfachten Gestalt denselben Rest geben. Am besten eignen sich die Moduln $n = 9$ und $n = 11$, weil man dabei die Reste aller Zahlen nach § 17, 4. sehr leicht findet (Neunerprobe, Elferprobe).

4. Ist

$$a \equiv \alpha, \quad ab \equiv \alpha\beta$$

und zugleich a und α relativ prim zu n, so ist auch

$$b \equiv \beta,$$

denn es ist

$$ab - \alpha\beta = a(b - \beta) + \beta(a - \alpha),$$

und wenn daher $ab - \alpha\beta$ und $a - \alpha$ durch n teilbar sind, so ist auch $a(b - \beta)$ durch n teilbar. Ist also a relativ prim zu n, so ist $b - \beta$ durch n teilbar (§ 16, 6.).

5. Durch wiederholte Anwendung des Multiplikationssatzes in Nr. 3 ergibt sich, wenn h eine beliebige positive Zahl ist:

Ist $a \equiv \alpha$, so ist auch $a^h \equiv \alpha^h$.

6. Da es nur n verschiedene Reste nach dem Modul n gibt, so müssen unter mehr als n Zahlen immer wenigstens zwei untereinander kongruente vorkommen. Dagegen kann man auf unendlich viele verschiedene Arten n Zahlen

$$(2) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

so auswählen, daß nicht zwei darunter kongruent sind; man braucht nur zu jeder der Zahlen (1) irgend ein beliebiges Vielfaches von n hinzuzufügen. Die Zahlen eines solchen Systems (2) geben bei der Division durch n zusammen alle möglichen Reste (1) und jeden nur einmal. Darum heißt jedes solche System ein volles Restsystem für den Modul n. Wenn für ein unbestimmtes Zeichen x nacheinander alle Zahlen eines Systems (2) gesetzt werden, so sagen wir, x durchläuft ein volles Restsystem.

7. Wenn m und n relative Primzahlen sind, so muß auch r zu n relativ prim sein, denn ein gemeinsamer Teiler von n und r wäre auch Teiler von $m = qn + r$. Aus der Reihe der möglichen Reste (1) fallen dann, wenn man nur die zu n teilerfremden beibehält, einige aus; jedenfalls unter allen Umständen der Rest 0.

Wir bezeichnen die Anzahl der in (1) enthaltenen relativen Primzahlen zu n mit ν, oder um die Abhängigkeit von n deutlicher auszudrücken, mit $\varphi(n)$, setzen also

$$\nu = \varphi(n)$$

und bezeichnen die in (1) enthaltenen relativen Primzahlen zu n mit

$$(3) \qquad r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu,$$

unter denen jedenfalls die Zahl 1 enthalten ist.

Das Zeichen $\varphi(n)$ bedeutet also die Anzahl der positiven Zahlen, die kleiner als n und zugleich teilerfremd zu n sind.

Wir geben ein paar Beispiele für die Reihe (3):

$n = 7.$	1, 2, 3, 4, 5, 6.	$\varphi(7) = 6.$
$n = 13.$	1, 2, 3, 4, 5, 6,	
	7, 8, 9, 10, 11, 12.	$\varphi(13) = 12.$
$n = 21.$	1, 2, 4, 5, 8, 10,	
	11, 13, 16, 17, 19, 20.	$\varphi(21) = 12.$

8. Ist n eine Primzahl, so sind alle Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ zu n teilerfremd, und es ist folglich in diesem Falle

$$\varphi(n) = n - 1.$$

Ist aber n eine Potenz einer Primzahl p, so hat man, um die Reihe (3) zu erhalten, aus $0, 1, 2, \ldots, n-1$ alle durch p teilbaren Zahlen

$$0, \; p, \; 2p, \ldots, \left(\frac{n}{p} - 1\right)p,$$

deren Anzahl n/p beträgt, auszuscheiden. Demnach ist für diesen Fall

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{4}$$

9. Wenn sich n in zwei Faktoren a, b zerlegen läßt, die zueinander teilerfremd sind, so setzen wir

$$z = ay - bx. \tag{5}$$

Hierin bedeute

x jede der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, a-1$,
y „ „ „ $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

z stellt dann im ganzen $ab = n$ Zahlen dar, unter denen keine zwei nach n denselben Rest haben. Denn wäre

$$z - z' = a(y - y') - b(x - x')$$

durch n teilbar, so müßte $b(x - x')$, und da b relativ prim zu a ist, auch $x - x'$ durch a teilbar sein, und da x und x' kleiner als a sind, so müßte $x - x' = 0$, also $x = x'$ sein, und ebenso schließt man, daß $y = y'$ sein müßte. Demnach erhält man, wenn man die Reste von z nach n sucht, aus (5) jeden der Reste

$$0, \; 1, \; 2, \ldots, n - 1 \tag{6}$$

und jeden nur einmal.

Nun ist aber z dann und nur dann relativ prim zu n, wenn x relativ prim zu a und y relativ prim zu b ist. Denn eine Primzahl, die in a und z aufgeht, muß in x, und eine, die in b und z aufgeht, in y aufgehen. Will man also aus der Reihe (6) der Reste von z die ausscheiden, die mit n einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so hat man aus der Reihe der Zahlen x die auszuscheiden, die mit a, und aus der Reihe der Zahlen y die, die mit b einen gemeinschaftlichen Teiler haben. Es bleiben also $\varphi(a)$ Zahlen x und $\varphi(b)$ Zahlen y und $\varphi(n)$ Zahlen z, und es folgt, da jedes dieser x mit jedem y kombiniert werden kann,

$$\varphi(n) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Enthält also z. B. n nur zwei Primfaktoren p, q, so ergibt sich, in welcher Potenz auch p und q in n aufgehen mögen,

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

und diese Formel läßt sich durch die vollständige Induktion dahin verallgemeinern:

Sind $p, q, r, \ldots$ die sämtlichen voneinander verschiedenen Primzahlen, die in n aufgehen, so ist:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\cdots.$$

Hiernach ist z. B.

$$\varphi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16,$$

$$\varphi(63) = 63\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 36.$$

§ 74. Die Potenzreste.

1. Es seien jetzt n und g zwei Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler (g Abkürzung für „Grundzahl“. Bei Anwendungen auf das dekadische Ziffernsystem wird $g = 10$ genommen.) Wir bilden die aufeinanderfolgenden Potenzen von g:

(1) $$g^0, g^1, g^2, g^3, \ldots,$$

($g^0 = 1$) und suchen die Reste nach n

(2) $$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots.$$

Da g und alle seine Potenzen zu n teilerfremd sind, so sind auch die ϱ teilerfremd zu n, und da sie zugleich kleiner als n sind, so gibt es unter ihnen höchstens $\nu = \varphi(n)$ voneinander verschiedene.

Ist aber $\varrho_k = \varrho_{k+f}$, worin f eine positive Zahl sei, so ist

$$g^{k+f} - g^k = g^k(g^f - 1)$$

durch n teilbar, und folglich ist auch $g^f - 1$ durch n teilbar. Es gibt also positive Exponenten f, für die

(3) $$g^f \equiv 1 \pmod{n}$$

ist, und wir wollen von jetzt an mit f die kleinste unter diesen positiven Zahlen bezeichnen.

2. Aus (3) folgt, wenn q eine beliebige positive ganze Zahl ist (nach § 73, 5.),

$$g^{qf} \equiv 1,$$

und es folgt auch umgekehrt:

Ist für irgend einen positiven Exponenten k

$$g^k \equiv 1,$$

so ist k ein Vielfaches von f. Denn wäre k nicht durch f teilbar, so könnte man

$$k = qf + f'$$

setzen, worin $0 < f' < f$ wäre. Es folgt dann

$$g^{qf} g^{f'} \equiv 1$$

und folglich nach § 73, 4. $g^{f'} \equiv 1$. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, daß f der kleinste positive Exponent sei, für den die Kongruenz (3) erfüllt ist.

3. Von den f Potenzen

(4) $$g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{f-1}$$

können nicht zwei denselben Rest nach n geben, weil sich sonst eine kleinere Zahl f' ergeben würde, für die $g^{f'} \equiv 1$ wäre. Wir erhalten also daraus f verschiedene Reste

(5) $$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{f-1}$$

(worin $\varrho_0 = 1$ ist). Geht man aber weiter zu höheren Potenzen $g^f, g^{f+1}, g^{f+2}, \ldots$, so bekommt man dieselben Reste in derselben Reihenfolge wieder, und man kommt also aus dem System (5) durch Potenzieren von g niemals heraus. Die $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{f-1}$ heißen die Potenzreste von g; sie sind alle relativ prim zu n. Wenn nun f kleiner als $\varphi(n)$ ist, so gibt es wenigstens noch einen Rest r_1, der nicht unter den Potenzresten enthalten ist, und dann sind die Reste von

(6) $$r_1 g^0, r_1 g^1, r_1 g^2, \ldots, r_1 g^{f-1}$$

alle sowohl untereinander als auch von den Resten der Potenzen (4) verschieden. Denn wäre

$$r_1 g^h \equiv g^k,$$

so würde folgen:

$$r_1 \equiv g^{k-h} \quad (\text{oder wenn } k < h \text{ ist}, \equiv g^{f-h+k}),$$

und dies widerspricht der Annahme, daß r_1 nicht unter den Resten von (4) vorkommt.

Demnach ergibt auch die Reihe (6) lauter verschiedene Reste, und es ist $2f \overline{\gtrless} \varphi(n)$. Ist $2f < \varphi(n)$, so gibt es einen Rest r_2, der unter den Resten von (4) und von (6) nicht vorkommt. Die Zahlen

$$r_2 g^0,\ r_2 g^1,\ \ldots,\ r_2 g^{f-1}$$

geben wieder lauter verschiedene Reste, die auch von den Resten der Reihen (4) und (6) verschieden sind. Denn wäre etwa

$$r_1 g^h \equiv r_2 g^k,$$

so würde folgen:

$$r_2 \equiv r_1 g^{h-k} \quad (\text{oder} \equiv r_1 g^{f-k+h}),$$

d. h., es würde r_2 gegen die Voraussetzung in der Reihe (6) vorkommen. Es ist also jetzt $3f \overline{\gtrless} \varphi(n)$.

Man sieht, wie dieser Schluß fortzusetzen ist, und da die Vielfachen f, $2f$, $3f$, ... nicht ins Unbegrenzte kleiner als $\varphi(n)$ bleiben können, so folgt, daß $\varphi(n)$ ein Vielfaches von f, also f ein Teiler von $\varphi(n)$ sein muß.[1]) Wir setzen

$$\varphi(n) = ef,$$

und aus (3) ergibt sich der verallgemeinerte Fermatsche Satz

$$g^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

oder in Worten:

Die $\varphi(n)^{\text{te}}$ Potenz einer jeden zu n teilerfremden Zahl ist nach n mit 1 kongruent.

4. Ist n eine Primzahl, so ist $\varphi(n) = n - 1$ und der Satz lautet für diesen Fall:

Für jede Primzahl n ist die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz einer jeden durch n nicht teilbaren Zahl mit 1 kongruent.

Der § 60, 3. bewiesene Satz, daß, wenn n eine Primzahl und a eine beliebige ganze Zahl ist, $a^n - a = a(a^{n-1} - 1)$ durch n teilbar

---

1) Man beachte die Analogie dieses Satzes mit dem Satze § 56, 4. über Permutationsgruppen.

ist, ist, wie man sieht, in 4. enthalten, denn entweder ist a oder (nach 4.) $a^{n-1}-1$ durch n teilbar.

Mag nun n eine Primzahl oder zusammengesetzt sein, so zerfallen nach 3. die zu n teilerfremden Reste von n in e Reihen von je f Gliedern, die wir die Perioden der Reste nennen wollen. Man erhält eine dieser Perioden, wenn man in einem Produkt rg^k für den Exponenten k die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, f-1$ setzt. Die Auffindung dieser Reste, die auf den ersten Blick sehr weitläufig erscheint, wird dadurch wesentlich vereinfacht, daß man den Rest von rg^k dadurch bilden kann, daß man nicht rg^{k-1} selbst, sondern seinen Rest nach n mit g multipliziert.

5. Nehmen wir z. B. $n = 17$, $g = 2$, so ergibt sich

$$2^0 \equiv 1, \quad 2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8,$$
$$2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 15, \quad 2^6 \equiv 13, \quad 2^7 \equiv 9, \quad 2^8 \equiv 1.$$

Es ist also hier $f = 8$, $\varphi(17) = 16$ und wir bekommen zwei Perioden der Reste nach 17.

Nehmen wir $n = 17$, $g = 10$, so ergibt sich nur eine Periode; es ist $f = 16$. In der folgenden kleinen Tabelle stehen in der ersten Reihe die Exponenten der Potenzen von 10 und darunter die entsprechenden Reste nach 17.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12

Für $n = 21$, $g = 10$ ergibt sich

$$10^0 \equiv 1, \ 10^1 \equiv 10, \ 10^2 \equiv 16, \ 10^3 \equiv 13, \ 10^4 \equiv 4, \ 10^5 \equiv 19, \ 10^6 \equiv 1,$$

und wir haben hier $f = 6$, $\varphi(n) = 12$, also zwei Perioden. Nehmen wir noch zum Schluß $n = 13$, $g = 10$, so erhalten wir:

$$10^0 \equiv 1, \ 10^1 \equiv 10, \ 10^2 \equiv 9, \ 10^3 \equiv 12, \ 10^4 \equiv 3, \ 10^5 \equiv 4, \ 10^6 \equiv 1;$$

also haben wir auch hier $f = 6$, $\varphi(n) = 12$, also zwei Perioden.

Nehmen wir dagegen $n = 13$, $g = 2$, so ergibt sich eine Tabelle wie oben bei 17,

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7

also $f = 12$.

6. Wenn für irgend eine Wahl von g und n nur eine Periode vorhanden, also $f = \varphi(n)$ ist, so heißt g primitive Wurzel von n. Es ist also 10 eine primitive Wurzel von 17, dagegen nicht von 13 und nicht von 21, während 2 primitive Wurzel von 13, aber nicht von 17 ist. Es besteht der Satz, den wir wenigstens zum Teil später beweisen werden, daß alle ungeraden Primzahlen und Primzahl-

potenzen sowie die mit 2 multiplizierten ungeraden Primzahlpotenzen primitive Wurzeln haben. Dagegen haben andere zusammengesetzte Zahlen keine primitiven Wurzeln, z. B. 21. Denn nach dem Fermatschen Satze ist $g^6 - 1$ für jedes g durch 3 und durch 7, also auch durch 21 teilbar.

Wenn g primitive Wurzel von n ist und $g^\alpha \equiv a \pmod{n}$, so heißt α der Index von a. In der oben angegebenen Tabelle stehen also in der ersten Reihe die Indizes der darunter stehenden Zahl. Eine solche Tabelle heißt daher auch eine Indextabelle.

§ 75. Periodische Dezimalbrüche.

1. Die Theorie der Potenzreste gestattet eine Anwendung auf die Dezimalbrüche, durch die ein gemeiner Bruch dargestellt werden kann.

Es seien m und n positive relative Primzahlen und n nicht durch 2 und nicht durch 5 teilbar, also relativ prim zu 10. Wir betrachten den gemeinen Bruch

$$\gamma = \frac{m}{n}.$$

Ein solcher Bruch läßt sich, wie wir in § 28 gesehen haben, in einen unendlichen Dezimalbruch verwandeln, dessen Mantisse wir mit

$$Z(m) = z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots$$

bezeichnen. Zwei solche Brüche $\gamma = m/n$ und $\gamma' = m'/n$ mit demselben Nenner n haben dann und nur dann dieselbe Mantisse, wenn ihr Unterschied eine ganze Zahl ist, wenn sich also m' von m um ein Vielfaches von n unterscheidet, oder in Zeichen:

Ist

$$m \equiv m' \pmod{n},$$

so ist

$$Z(m) = Z(m')$$

und umgekehrt. Denn ist $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl, so besteht die Mantisse des diese Differenz darstellenden Dezimalbruches aus lauter Nullen, und ist umgekehrt $Z(m) = Z(m')$, so besteht die Mantisse $Z(m - m')$ aus lauter Nullen.

Da es $\varphi(n)$ verschiedene zu n teilerfremde Reste gibt, so gibt es also auch $\varphi(n)$ verschiedene Mantissen $Z(m)$ für denselben Nenner n. Hier hat φ dieselbe Bedeutung wie in § 73, 7.

2. Aus der Mantisse von γ erhält man die von 10γ dadurch, daß man die erste Stelle von $Z(m)$ wegläßt, also mit z_2 anfängt, und durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich für jeden positiven Exponenten k

$$Z(10^k m) = z_{k+1} z_{k+2} z_{k+3} \dots$$

Wenn aber

$$10^f \equiv 1 \pmod{n}$$

ist, so ist nach 1.

$$Z(10^f m) = Z(m),$$

d. h. es ist

$$z_{f+1} = z_1, \quad z_{f+2} = z_2, \quad z_{f+3} = z_3, \quad \dots .$$

Die Ziffern der Mantisse wiederholen sich also von der $f+1^{\text{ten}}$ Stelle an genau in derselben Reihenfolge wieder, wie von der ersten.

Die Ziffern zerfallen in Gruppen von je f, die wir so bezeichnen:

$$P(m) = z_1 z_2 \dots z_f.$$

Diese Gruppe wiederholt sich in $Z(m)$ immer in derselben Reihenfolge und sie wird die Periode der Mantisse genannt. Man nennt daher auch die Mantisse $Z(m)$ und den Dezimalbruch, in den sich γ verwandeln läßt, periodisch, und die Zahl f bezeichnen wir als die Länge der Periode für den Nenner n. Wir haben also den Satz bewiesen:

> Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner relativ prim zu 10 ist, läßt sich in einen periodischen Dezimalbruch verwandeln.

3. Um die übrigen Brüche gleich zu erledigen, bemerken wir, daß sich jeder Bruch β durch Multiplikation mit einer Potenz von 10, 10^k in einen solchen verwandeln läßt, der die Faktoren 2 und 5 nicht mehr im Nenner enthält und der also in einen periodischen Dezimalbruch verwandelbar ist. Um von $10^k\beta$ zu β zurückzukehren, hat man in diesem Dezimalbruch das Komma um k Stellen nach links zu verschieben. Dadurch treten vor die Stelle z_1, also vor den Beginn der ersten Periode, noch andere Ziffern, die die Periodizität stören. Die Periodizität beginnt dann erst nach der k^{ten} Stelle der Mantisse. Man nennt daher diese Dezimalbrüche unrein periodisch, während die, bei denen die Periode gleich hinter dem Komma einsetzt, rein periodisch heißen.

4. Wenn f der kleinste positive Exponent ist, der der Formel $10^f \equiv 1 \pmod{n}$ genügt, so kann die Periode der Mantisse $Z(m)$ nicht aus weniger als f Gliedern bestehen. Denn aus $Z(10^k m) = Z(m)$ folgt nach 1. $10^k m \equiv m$ oder, da m relativ prim zu n ist, $10^k \equiv 1$, und es ist also k nach § 74, 2. ein Vielfaches von f.

5. Da man einen Dezimalbruch mit 10 multipliziert, indem man das Komma um eine Stelle nach rechts rückt, so erhält man die folgenden Perioden:

$$
\begin{aligned}
P(m) &= z_1 z_2 z_3 \ldots z_f, \\
P(10m) &= z_2 z_3 z_4 \ldots z_1, \\
P(10^2 m) &= z_3 z_4 z_5 \ldots z_2, \\
&\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\
P(10^{f-1} m) &= z_f z_1 z_2 \ldots z_{f-1}.
\end{aligned}
$$

Ist nun $\varphi(n) = ef$, so hat man für e verschiedene Werte von m solche Perioden zu bilden, um die Mantissen aller Brüche mit dem Nenner n zu erhalten. Ist $e = 1$, $f = \varphi(n)$, also 10 primitive Wurzel von n, so genügt ein einziger Wert, etwa $m = 1$, um nach diesen Formeln alle echten Brüche der Form m/n in Dezimalbrüche zu verwandeln. Für diese Werte von n braucht man also nur eine einzige Periode zu berechnen, die dann $\varphi(n)$ Glieder hat. Ist $e > 1$, so braucht man mehrere solche Perioden, die dafür um so kürzer sind.

6. Wir nehmen als erstes Beispiel $n = 7$. Wir dividieren in der gewöhnlichen Weise

$$
\begin{array}{l}
10 : 7 = 142\,857 \\
7 \\
\hline
\underline{30} \\
28 \\
\hline
\underline{20} \\
14 \\
\hline
\underline{60} \\
56 \\
\hline
\underline{40} \\
35 \\
\hline
\underline{50} \\
49 \\
\hline
\underline{1}.
\end{array}
$$

Die Periode ist also hier 142 857, und die unterstrichenen Zahlen sind die Reste der Potenzen von 10. Demnach erhält man

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{7} &= 0{,}142\,857 \ldots \\
\tfrac{3}{7} &= 0{,}428\,571 \ldots \\
\tfrac{2}{7} &= 0{,}285\,714 \ldots \\
\tfrac{6}{7} &= 0{,}857\,142 \ldots \\
\tfrac{4}{7} &= 0{,}571\,428 \ldots \\
\tfrac{5}{7} &= 0{,}714\,285 \ldots,
\end{aligned}
$$

und wo die Punkte stehen, wiederholen sich die voranstehenden Perioden. Hierdurch sind mit einem Schlage alle echten Brüche mit

dem Nenner 7 bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit in Dezimalbrüche verwandelt.

7. Für $n = 13$ erhält man folgende Rechnung:

```
10 : 13 = 076 923
00
100
 91
  90
  78
  120
  117
    30
    26
     40
     39
      1.
```

Die Periode hat also hier nur sechs Glieder, und man erhält die Entwicklungen

$$\frac{1}{13} = 0{,}076\,923\ldots$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}769\,230\ldots$$
$$\frac{9}{13} = 0{,}692\,307\ldots$$
$$\frac{12}{13} = 0{,}923\,076\ldots$$
$$\frac{3}{13} = 0{,}230\,769\ldots$$
$$\frac{4}{13} = 0{,}307\,692\ldots$$

Um alle Brüche mit dem Nenner 13 zu erhalten braucht man eine zweite Periode, die man aus irgend einem der fehlenden Zähler ableiten kann. Nehmen wir 2/13, so ergibt sich:

```
20 : 13 = 153 846
13
 70
 65
  50
  39
  110
  104
    60
    52
     80
     78
      2.
```

Wir haben also

$$\frac{2}{13} = 0{,}153\,846\ldots$$
$$\frac{7}{13} = 0{,}538\,461\ldots$$
$$\frac{5}{13} = 0{,}384\,615\ldots$$
$$\frac{11}{13} = 0{,}846\,153\ldots$$
$$\frac{6}{13} = 0{,}461\,538\ldots$$
$$\frac{8}{13} = 0{,}615\,384\ldots$$

Damit sind alle Brüche mit dem Nenner 13 erledigt. Hier liegt ein unbegrenztes Material zu Übungen vor, das durch den schönen, stets kontrollierbaren Erfolg einen großen Reiz hat.

8. Gauß hat diesen Gegenstand in den „Disquisitiones arithmeticae", art. 313—318 eingehend behandelt. Er gibt dort eine Tabelle, die für alle Primzahlen und Primzahlpotenzen n unter 100 die Perioden vollständig enthält, und diese Tabelle ist, auf die Primzahlen und Primzahlpotenzen unter 1000 fortgesetzt, aus Gauß' Nachlaß veröffentlicht. Gauß zeigt an der angeführten Stelle, wie man mit Hilfe dieser Tafeln die Entwicklungen der Brüche, deren Nenner mehrere verschiedene Primfaktoren enthalten, ableiten kann, auch für sehr große Nenner. Wir führen hier nur das eine Beispiel an:

$$\frac{22}{21} = \frac{1}{3} + \frac{5}{7}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,3\ldots$$
$$\frac{5}{7} = 0{,}714\,285\,7\ldots$$
$$\frac{22}{21} = 1{,}047\,619\,0\ldots$$

Um die letzte Stelle der Periode richtig zu erhalten, muß man in den beiden Summanden noch um eine (unter Umständen auch um mehrere) Stellen über die Periode hinausgehen.

Zu erwähnen ist hier noch die Abhandlung von H. Bork über „periodische Dezimalbrüche" im Programm des Prinz Heinrichs-Gymnasiums in Berlin, 1895, die außer der Entwicklung der Hauptsätze über periodische Dezimalbrüche (nach Rechnungen von F. Keßler) eine Tafel enthält, in der zwar nicht die Periode selbst, aber die Länge der Perioden für alle Primzahlen unter 100 000 angegeben ist.

9. Wenn $n = n'n''$, und n' relativ prim zu n'', und f', f'' die kleinsten positiven Exponenten sind, für die $10^{f'} - 1$ und $10^{f''} - 1$ durch n' und durch n'' teilbar sind, so ist $10^{f} - 1$ dann und nur dann durch n teilbar, wenn f zugleich ein Vielfaches von f' und f'' ist. Der kleinste Wert f ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von f' und f'', und daraus ergibt sich der Satz:

Die Länge der Periode der Dezimalbrüche für einen zusammengesetzten Nenner n ist gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Periodenlänge für alle die Brüche, deren Nenner Teiler von n sind.

Ist 10 primitive Wurzel von n, so ist die Periodenlänge, wie wir gesehen haben, gleich $\varphi(n)$, und wir reichen mit einer Periode aus. Nach der Gaußschen Tabelle findet dies im ersten Hundert für die Zahlen

$$n = 7, 17, 19, 23, 29, 47, 49, 59, 61, 97$$

statt. Die Maximalzahl der verschiedenen Perioden ergibt sich für $n = 73$, nämlich $\varphi(n)/f = 9$, $f = 8$.

10. Da, wenn f die Periodenlänge für den Nenner n ist, $10^f - 1$ durch n teilbar sein muß, so hat man alle Nenner n, die eine gegebene Periodenlänge f haben, unter den Teilern von $10^f - 1$ zu suchen. Umgekehrt ist die Periodenlänge eines Bruches, dessen Nenner ein Teiler von $10^f - 1$ ist, entweder gleich f oder gleich einem Teiler von f.

Es gibt also nur eine bestimmte Anzahl von Nennern solcher Brüche, die eine gegebene Periodenlänge f haben.

Beispielsweise kommen eingliedrige Perioden nur bei den Nennern $n = 3$, $n = 9$ vor:

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}33\ldots, \quad \tfrac{1}{9} = 0{,}111\ldots$$

Die Periodenlänge 2 kommt nur bei Brüchen vor, deren Nenner ein Teiler von 99 ist, also bei $n = 11, 33, 99$, die Periodenlänge 3 bei Brüchen, deren Nenner Teiler von $999 = 27 \cdot 37$ sind, u. s. f. Bei größeren Periodenlängen bietet die Zerlegung von $10^f - 1$ in seine Primfaktoren Schwierigkeiten, zu deren Überwindung, wenn man die Zerlegung nicht aus den vorhandenen Tafeln entnehmen will oder kann, besondere Kunstgriffe angewendet werden müssen. Es ist z. B., wie sich durch Ausmultiplizieren leicht bestätigen läßt:

$$\begin{aligned}
10^4 - 1 &= 9 \cdot 11 \cdot 101, \\
10^5 - 1 &= 9 \cdot 41 \cdot 271, \\
10^6 - 1 &= 27 . 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37, \\
10^7 - 1 &= 9 \cdot 239 \cdot 4649, \\
10^8 - 1 &= 9 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137.
\end{aligned}$$

Alle die hier vorkommenden Faktoren als Nenner ergeben verhältnismäßig kurze Perioden.

11. Wir schließen die Betrachtungen über periodische Dezimalbrüche mit den folgenden Sätzen:

Es sei

$$m = z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$$

eine beliebige positive ganze Zahl, die mit den Ziffern $z_1, z_2, \ldots, z_f$ geschrieben wird, und es sei

$$n = 10^f - 1$$

die mit f Neunern geschriebene ganze Zahl. Es ist dann, dekadisch geschrieben,

$$10m = z_1 z_2 \ldots z_f 0,$$

und

$$z_1 n = z_1 00 \ldots 0 - z_1,$$

wo rechts f Nullen hinter z_1 stehen.

Demnach ist

$$10m = z_1 n + m_1,$$

worin m_1 wieder eine f-stellige Zahl ist, nämlich

$$m_1 = z_2 z_3 \ldots z_f z_1.$$

Es ist dann ebenso

$$10m_1 = z_2 n + m_2,$$

$$m_2 = z_3 z_4 \ldots z_f z_1 z_2,$$

und so kann man fortfahren, und erhält die Umwandlung des gemeinen Bruches m/n in einen Dezimalbruch, der nun, wie man sieht, die Periode $z_1 z_2 \ldots z_f$ hat. Diese kann auch in kürzere Perioden zerfallen, deren Länge dann ein Teiler von f ist. Der gemeine echte Bruch m/n kann sich natürlich auch noch kürzen lassen, und er kann sich auf 1 reduzieren, wenn $m = n$ ist, die Zahl m also aus lauter Neunern besteht. Damit ist dann bewiesen:

Jeder periodische Dezimalbruch ist die Umwandlung eines gemeinen Bruches. Der Dezimalbruch, dessen Periode eingliedrig und gleich 9 ist, entsteht aus der Umwandlung des uneigentlichen Bruches 1.

§ 76. Diophantische Gleichungen.

1. Bei der Auflösung der Diophantischen oder unbestimmten Gleichungen handelt es sich um die Ermittelung unbekannter ganzer Zahlen, von denen gewisse Eigenschaften verlangt werden, die sich durch Gleichungen ausdrücken lassen. Die einfachste Aufgabe dieser Art ist die folgende:

Es sind a, b, c gegebene ganze Zahlen. Es werden zwei andere ganze Zahlen x, y gesucht, die der Gleichung genügen:

$$ay - bx = c. \tag{1}$$

Zunächst machen wir einige allgemeine Bemerkungen.

Die Gleichung (1) bleibt ungeändert, wenn wir gleichzeitig a in $-a$ und y in $-y$ verwandeln. Ebenso wenn wir gleichzeitig b in $-b$ und x in $-x$ oder c in $-c$, x in $-x$, y in $-y$ verwandeln. Daher beschränken wir die Allgemeinheit nicht, wenn wir annehmen, a, b und c seien positiv. Wäre eine dieser Zahlen, etwa b, gleich Null, so käme die Aufgabe auf die Division von c durch a zurück. Wir schließen also diesen Fall aus.

2. Wenn die beiden Zahlen a, b einen gemeinschaftlichen Teiler d haben, so kann die Aufgabe 1. gewiß nur dann Lösungen haben, wenn auch c durch d teilbar ist. Dann aber können wir in der Gleichung (1) alle Glieder durch d teilen. Diese Operation denken wir uns ausgeführt, was auf die Annahme hinauskommt, die wir jetzt machen wollen, daß a und b teilerfremde Zahlen seien.

Daß unter dieser Voraussetzung die Aufgabe 1. immer eine Lösung hat, folgt leicht aus dem Vorhergehenden. Wir haben nämlich in § 73, 9. gesehen, daß der Ausdruck

$$z = ay - bx$$

ein volles Restsystem für den Modul ab durchläuft, wenn x und y volle Restsysteme für die Moduln a und b durchlaufen. Es muß darunter also auch eine Zahl vorkommen, die nach ab denselben Rest gibt wie c, die also gleich $c + kab$ gesetzt werden kann, wenn k eine ganze Zahl ist. Demnach gibt es drei ganze Zahlen x, y, k, die der Gleichung

$$ay - bx = c + kab$$

oder

$$a(y - kb) - bx = c$$

genügen. Hiernach ist aber auch die Gleichung (1) befriedigt, wenn dort x, $y - kb$ für x und y gesetzt wird.

3. Wir nehmen an, es sei eine Lösung x_0, y_0 der Gleichung (1) gefunden, also

$$ay_0 - bx_0 = c. \tag{2}$$

Aus dieser einen lassen sich dann alle übrigen leicht finden. Ziehen wir nämlich die Gleichung (2) von der Gleichung (1) ab, so folgt

$$a(y - y_0) = b(x - x_0) \tag{3}$$

Es muß also das Produkt $b(x-x_0)$ durch a teilbar sein, und da a und b schon als teilerfremd angenommen sind, so muß $x-x_0$ durch a teilbar sein. Wir bezeichnen den Quotienten, der eine ganze Zahl ist, mit λ, setzen also $x-x_0=\lambda a$. Wenn man diesen Wert für $x-x_0$ in (3) einsetzt und durch a dividiert, so folgt $y-y_0=\lambda b$, also:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a, \\ y &= y_0 + \lambda b. \end{aligned} \tag{4}$$

Umgekehrt ergibt sich aus (4), was auch λ sein mag:

$$ay - bx = ay_0 - bx_0,$$

und wenn also x_0, y_0 der Gleichung (2) genügen, so genügen x, y der Gleichung (1). Wenn also die Gleichung (1) überhaupt eine Lösung hat, so hat sie auch unendlich viele, die alle durch die Formeln (4) aus einer abgeleitet werden können.

4. Endlich können wir noch eine weitere Vereinfachung vornehmen, wodurch die allgemeine Aufgabe 1. auf einen speziellen Fall zurückgeführt wird.

Genügen x_0, y_0 der Gleichung

$$ay_0 - bx_0 = 1, \tag{5}$$

so geben die beiden Zahlen

$$x = cx_0, \quad y = cy_0$$

eine Lösung der Gleichung (1), wie man sofort erkennt, wenn man die beiden Seiten der Gleichung (5) mit c multipliziert.

Hierdurch ist die Aufgabe 1. auf die folgende einfachere zurückgeführt:

5. Es seien a, b zwei positive ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler; es wird irgend ein Paar ganzer Zahlen x, y gesucht, das der Gleichung

$$ay - bx = 1 \tag{6}$$

genügt.

Aus einer Lösung dieser Gleichung erhält man alle andern nach den Formeln (4). Man kann also immer positive Lösungen finden.

6. Ist $a = 1$, so kann man x ganz beliebig annehmen, und erhält $y = bx + 1$, und ebenso, wenn $b = 1$ ist, $x = ay - 1$; sind aber a und b größer als 1, so kann man in (4) für λ den Quotienten, für x_0 den Rest der Division von x durch a nehmen, so daß

$$0 < x_0 < a$$

wird. Dann aber ist

$$0 < ay_0 = 1 + bx_0 < ab + 1,$$

also, da y_0 nicht gleich b sein kann, weil sonst 1 durch b teilbar sein müßte,

$$0 < y_0 < b.$$

Es gibt also eine und nur eine Lösung der Aufgabe 5., in der x und y positiv und kleiner als a und b sind, und diese Lösung nennen wir die kleinste positive Lösung.

7. Zur wirklichen Auffindung der Lösungen einer Diophantischen Gleichung gibt es nun ein sicheres und verhältnismäßig leicht zu handhabendes Mittel, das sich auf den Euklidischen Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Teilers stützt (§ 16).

Es seien also in der vorgelegten Gleichung a, b gegebene positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, die beide größer als 1 sind, und wir wollen annehmen, es sei a größer als b. Wäre es anders, so brauchte man ja nur a mit b und zugleich x, y mit $-y$, $-x$ zu vertauschen. Wir setzen der besseren Bezeichnung wegen

$$b = a_1$$

und bilden nun den Algorithmus § 16, (1), der, weil a und a_1 relativ prim sind, mit $a_n = 1$ abschließen muß:

(7)
$$\begin{aligned} a &= q a_1 + a_2, \\ a_1 &= q_1 a_2 + a_3, \\ a_2 &= q_2 a_3 + a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + 1, \\ a_{n-1} &= q_{n-1}. \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhalten wir, wenn wir wieder b für a_1 setzen:

$$a_2 = a - bq,$$

und wenn wir diesen Wert für a_2 in die zweite Gleichung einsetzen:

$$-a_3 = aq_1 - b(qq_1 + 1),$$

und wenn man so fortfährt, sieht man, daß sich jede der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linear durch a und b ausdrücken läßt.

8. Wir wollen annehmen, es sei für irgend ein a_ν die Formel gefunden:

(8)
$$(-1)^\nu a_\nu = aQ_{\nu-1} - bP_{\nu-1}.$$

Die Vergleichung dieser Formel für $\nu = 2$, $\nu = 3$ mit den ersten Fällen für a_2, a_3 gibt:

$$Q_1 = 1, \quad P_1 = q, \qquad (9)$$
$$Q_2 = q_1, \quad P_2 = q q_1 + 1.$$

Setzt man aber in der Gleichung

$$a_\nu = q_\nu a_{\nu+1} + a_{\nu+2}$$

für a_ν den Ausdruck (8) und für $a_{\nu+1}$ den entsprechenden:

$$(-1)^{\nu+1} a_{\nu+1} = a Q_\nu - b P_\nu \qquad (10)$$

ein, so folgt:

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = a(Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1}) - b(P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}).$$

Wenn also die Formeln (8) und (10) gelten, so gilt auch

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = a Q_{\nu+1} - b P_{\nu+1},$$

wenn

$$P_{\nu+1} = P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}, \qquad (11)$$
$$Q_{\nu+1} = Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1}$$

gesetzt wird, und durch die Formeln (11) kann man die Zahlen P_ν und Q_ν leicht rekurrent berechnen.

Man erhält z. B.:

$$P_3 = q q_1 q_2 + q_2 + q, \quad Q_3 = q_1 q_2 + 1,$$
$$P_4 = q q_1 q_2 q_3 + q q_3 + q_2 q_3 + q q_1 + 1,$$
$$Q_4 = q_1 q_2 q_3 + q_3 + q_1,$$

u. s. f., und zur Berechnung der Zahlen P, Q braucht man also nur die Quotienten $q, q_1, q_2, \ldots$ zu kennen. Man sieht überdies, daß diese Zahlen P, Q alle positiv sind und daß

$$P_{\nu+1} > P_\nu, \quad Q_{\nu+1} > Q_\nu \qquad (12)$$

ist (nur wenn $q_1 = 1$ ist, ist $Q_2 = Q_1$).

9. Wendet man die Gleichung (8) auf $\nu = n$ an und bedenkt, daß $a_n = 1$ ist, so ergibt sich

$$a Q_{n-1} - b P_{n-1} = (-1)^n, \qquad (13)$$

und man hat also eine Lösung der Aufgabe 5.:

$$ay - bx = 1,$$

wenn man

$$x = (-1)^n P_{n-1}, \qquad (14)$$
$$y = (-1)^n Q_{n-1}$$

setzt.

Wenn wir die erste der Gleichungen (11) mit Q_ν, die zweite mit P_ν multiplizieren und dann beide voneinander abziehen, und beide Seiten noch mit $(-1)^{\nu+1}$ multiplizieren, so ergibt sich

$$(-1)^{\nu+1}(P_{\nu+1}Q_\nu - Q_{\nu+1}P_\nu) = (-1)^\nu(P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1}).$$

Es hat also der Ausdruck

$$(-1)^\nu(P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1})$$

für alle Werte von ν denselben Wert, und wenn man darin $\nu = 2$ nimmt, so folgt aus (9):

$$P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1} = (-1)^\nu. \tag{15}$$

Diese Formel zeigt, daß die Zahlen P_ν, Q_ν für jedes ν ohne gemeinsamen Teiler sind, denn ein solcher gemeinsamer Teiler müßte ja Teiler von ± 1 sein.

10. Wendet man die Formel (10) auf $\nu = n$ an und bedenkt, daß $a_{n+1} = 0$ ist, so folgt

$$a Q_n = b P_n.$$

Da nun aber sowohl a und b als P_n und Q_n relativ prim und positiv sind, so folgt hieraus

$$P_n = a, \quad Q_n = b,$$

und aus den Ungleichungen (12) folgt:

$$P_{n-1} < a, \quad Q_{n-1} < b.$$

Man sieht also hieraus, daß uns die Formeln (14) bei geradem n die kleinste positive Lösung der Gleichung (6) ergeben. Bei ungeradem n erhält man durch

$$x = a - P_{n-1}, \quad y = b - Q_{n-1}$$

die kleinste positive Lösung.

11. Wir greifen ein ganz beliebiges Zahlenbeispiel heraus, indem wir

$$a = 1000, \quad b = 221$$

setzen. Wir bilden den Algorithmus (7):

$$\begin{aligned}
1000 &= 4 \cdot 221 + 116, \\
221 &= 1 \cdot 116 + 105, \\
116 &= 1 \cdot 105 + 11, \\
105 &= 9 \cdot 11 \quad + 6, \\
11 &= 1 \cdot 6 \quad + 5, \\
6 &= 1 \cdot 5 \quad + 1, \\
5 &= 5 \cdot 1,
\end{aligned}$$

und finden $n = 7$. Für die q erhalten wir der Reihe nach:

$$q, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$$
$$= 4, 1, 1, 9, 1, 1, 5,$$

also:

$$\begin{aligned} P_1 &= 4, & Q_1 &= 1, \\ P_2 &= 5, & Q_2 &= 1, \\ P_3 &= 9, & Q_3 &= 2, \\ P_4 &= 86, & Q_4 &= 19, \\ P_5 &= 95, & Q_5 &= 21, \\ P_6 &= 181, & Q_6 &= 40, \\ P_7 &= 1000, & Q_7 &= 221. \end{aligned}$$

Es ist also

$$x = 1000 - 181 = 819, \quad y = 221 - 40 = 181$$

die kleinste Lösung der Gleichung

$$1000y - 221x = 1.$$

§ 77. Kongruenzen höheren Grades.

1. Aus der Gleichung § 76, (1) ergibt sich, daß $ay - c$ durch b teilbar ist, oder nach der Bezeichung in § 73:

$$ay \equiv c \pmod{b}, \tag{1}$$

und wenn diese Kongruenz erfüllt ist, so ist dadurch auch x der Gleichung $ay - bx = c$ gemäß bestimmt. Die Kongruenz (1) gibt also, wenn a und b relativ prim sind, für y eine und nur eine Lösung aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, b - 1$. Alle anderen Lösungen dieser Kongruenz sind nach § 76, 3. mit dieser einen fundamentalen nach dem Modul b kongruent. Diese Kongruenz heißt eine Kongruenz ersten Grades oder eine lineare Kongruenz, und wir haben also hier eine vollkommene Analogie mit dem Satze, daß eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten nur eine Lösung hat, wenn wir unter der Lösung einer Kongruenz nicht die einzelne Zahl, sondern die Gesamtheit aller untereinander kongruenten Zahlen verstehen.

2. Die Analogie zwischen Kongruenzen höheren Grades und den algebraischen Gleichungen ist nicht mehr so vollständig. Es sei

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n \tag{2}$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades, deren Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ganze Zahlen sind. Gibt es eine ganze Zahl a, die, für x eingesetzt, $f(x)$ durch die Primzahl p teilbar macht, so heißt a eine Wurzel der Kongruenz n^{ten} Grades

$$f(x) \equiv 0 \pmod p.$$

Genügt a dieser Bedingung, so genügt ihr auch jede mit a nach p kongruente Zahl (§ 73, 3.), und die Gesamtheit dieser untereinander kongruenten Zahlen wird als eine Wurzel aufgefaßt.

Daß es Kongruenzen dieser Art gibt, die überhaupt keine Wurzel haben, zeigt das einfache Beispiel $f(x) = x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Denn $x^2 + 1$ kann für kein ganzzahliges x durch 3 teilbar sein. Hier besteht also kein dem Fundamentalsatz der Algebra entsprechendes Theorem. Wohl aber gilt der Satz:

Eine Kongruenz n^{ten} Grades für einen Primzahlmodul p kann niemals mehr als n Wurzeln haben.

Der Satz ist richtig für $n = 1$. Er ist also allgemein erwiesen, wenn wir ihn für eine Funktion n^{ten} Grades unter der Voraussetzung beweisen können, daß er für eine Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades schon erwiesen sei. Dieser Beweis ergibt sich so: Nach § 66, 3. können wir, wenn x und a zwei unbestimmte Größen sind,

$$f(x) = (x - a)\,Q(x) + f(a)$$

setzen, worin $Q(x)$ eine ganzzahlige Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Sind $f(a)$ und $f(x)$ beide durch p teilbar, so ist hiernach auch $(x - a)\,Q(x)$ durch p teilbar, und wenn also x nicht kongruent mit a, also $(x - a)$ nicht durch p teilbar ist, so ist $Q(x)$ durch p teilbar.

Nehmen wir also den zu beweisenden Satz für eine Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades als richtig an, so gibt es höchstens $(n-1)$ inkongruente Werte von x, für die $Q(x)$ durch p teilbar wird und folglich höchstens n, für die $f(x) \equiv 0$ wird.

§ 78. Existenz von Primitivwurzeln einer Primzahl.

1. Im § 74 ist der Fermatsche Satz bewiesen, daß, wenn p eine Primzahl und a eine durch p nicht teilbare Zahl bedeutet,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

ist. Wenn f die kleinste positive Zahl ist, für die

$$a^f \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, so heißt a zu dem Exponenten f gehörig, und wenn für irgend einen Exponenten h die Kongruenz

$$a^h \equiv 1 \pmod{p}$$

besteht, so ist h ein Vielfaches von f. Es ist also auch insbesondere f immer ein Teiler von $p-1$.

Eine Zahl g, die zu dem Exponenten $p-1$ gehört, heißt eine primitive Wurzel der Primzahl p.

Wir haben einzelne Beispiele solcher primitiven Wurzeln kennen gelernt, aber noch keinen allgemeinen Beweis gegeben, daß es für jede Primzahl p primitive Wurzeln gibt. Diesen Beweis wollen wir jetzt noch nachholen.[1])

2. Der Fall $p=2$ bietet kein Interesse. Denn für $p=2$ ist die Zahl 1 primitive Wurzel. Es sei also p eine ungerade Primzahl, $p-1$ also gerade. Wir zerlegen $p-1$ in Primfaktoren und setzen

$$p-1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

worin $a, b, c, \ldots$ voneinander verschiedene Primzahlen, $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots$ die höchsten in $p-1$ aufgehenden Potenzen dieser Primzahlen sind. Wir beweisen zunächst:

1) Es gibt eine Zahl A, die zu dem Exponenten a^α gehört.

Die Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist von niedrigerem Grade als $p-1$, und es gibt also nach § 77 unter den $p-1$ Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ eine, die dieser Kongruenz nicht genügt. Es sei y eine solche Zahl. Wenn wir dann

$$A = y^{b^\beta c^\gamma \ldots}$$

setzen, so ist

$$A^{a^\alpha} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wenn nun A zum Exponenten f gehört, so muß f ein Teiler von a^α, d. h. eine Potenz von a sein. Wäre aber $f < a^\alpha$, also ein Teiler von $a^{\alpha-1}$, so wäre

---

1) Gauß hat in den „Disquisitiones arithmeticae" zwei Beweise dieses Satzes gegeben, von denen wir hier dem zweiten folgen.

$$A^{a^{\alpha-1}} \equiv 1,$$

also

$$y^{a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \cdots} = y^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p}$$

gegen die Voraussetzung. Es gehört also A zum Exponenten a^α.

Ebenso kann man nun Zahlen $B, C, \ldots$ bestimmen, die zu den Exponenten b^β, $c^\gamma, \ldots$ gehören.

2) Das Produkt $g = ABC\ldots$ gehört zum Exponenten $p-1$.

Nehmen wir an, es gehöre g nicht zum Exponenten $p-1$, sondern zu einem kleineren Exponenten h, so ist h ein Teiler von $p-1$ und $(p-1):h$ ist eine ganze Zahl und größer als 1. In dieser Zahl können aber keine anderen Primzahlen als $a, b, c, \ldots$ aufgehen, und da sie größer als 1 ist, so ist sie wenigstens durch eine von ihnen, etwa durch a teilbar. Setzen wir also $p-1 = hk$, so ist k eine durch a teilbare ganze Zahl, und h ist ein Teiler von $(p-1):a$. Aus $g^h \equiv 1$ folgt daher:

$$g^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p},$$

also

$$A^{\frac{p-1}{a}} B^{\frac{p-1}{a}} C^{\frac{p-1}{a}} \cdots \equiv 1.$$

Da aber $(p-1):a$ durch b^β, durch $c^\gamma, \ldots$ teilbar ist, so ist

$$B^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \quad C^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \quad \cdots,$$

und es folgt also

$$A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1.$$

Der Exponent, zu dem A gehört, müßte also ein Teiler von $(p-1):a$ sein, während er doch a^α ist, was nicht in diesem Quotienten enthalten ist.

3. Hiermit ist die Existenz einer primitiven Wurzel g für eine jede Primzahl p nachgewiesen. Jede mit g kongruente Zahl ist dann gleichfalls primitive Wurzel. Die Gesamtheit dieser untereinander kongruenten Zahlen wird aber wieder nur als ein Individuum, eine primitive Wurzel, angesehen

Die Zahlen

$$1,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{p-2}$$

sind alle inkongruent, und da sie alle durch p unteilbar sind und

ihre Anzahl $p-1$ beträgt, so kommt unter ihren Resten jede der Zahlen

$$k = 1, 2, 3, \ldots, p-1$$

einmal und nur einmal vor.

4. Es ist nun auch leicht, den Exponenten f zu bestimmen, zu dem irgend eine dieser Zahlen g^k gehört. Ist nämlich e der größte gemeinschaftliche Teiler von k und $p-1$, und ist $k = ek'$, $p-1 = ef$, so ist $k' < f$ und relativ prim zu f, und es ist $g^{hk} = g^{hek'}$ nur dann mit 1 kongruent, wenn h durch f teilbar ist. Demnach gehört g^k zum Exponenten f, und da die Anzahl der Werte, die k' haben kann, gleich $\varphi(f)$ ist (§ 73, 7.), so gibt es $\varphi(f)$ inkongruente Zahlen, die zum Exponenten f gehören. Nimmt man $f = p-1$, so folgt, daß es $\varphi(p-1)$ inkongruente primitive Wurzeln von p gibt.

Vierzehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen zweiten Grades.

§ 79. Der Satz von Wilson.

1. Wir haben in § 77, 1. den Satz bewiesen:

Sind a und b relative Primzahlen, so hat die Kongruenz

$$ay \equiv c \pmod{b}$$

eine und nur eine Lösung y aus der Reihe der Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, b-1.$$

Nehmen wir den Modul als ungerade Primzahl an und bezeichnen ihn dementsprechend mit p, so folgt aus diesem Satze als spezieller Fall:

Ist a eine durch p nicht teilbare Zahl, so gibt es immer eine Zahl a' aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$, die der Kongruenz

$$a a' \equiv 1 \pmod{p}$$

genügt.

Diese Zahl a' ist dann und nur dann gleich a, wenn $a \equiv 1$ oder $a \equiv -1$ (oder, was dasselbe ist, $\equiv p-1$) $\pmod{p}$ ist. Denn setzen wir $a' = a$, so ist $aa' - 1 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ nur dann durch p teilbar, wenn entweder $a-1$ oder $a+1$ durch p teilbar ist.

Die Zahlen $2, 3, \ldots, p-2$ zerfallen daher in $\frac{1}{2}(p-3)$ Paare von Zahlen a, a', deren Produkt mit 1 kongruent ist, und das Produkt der beiden übrigen, $1(p-1)$, ist mit -1 kongruent. Folglich ist das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

was auch für $p = 2$ richtig ist, weil $+1 \equiv -1 \pmod{2}$ ist. In Worten ausgedrückt:

Ist p eine Primzahl, so ist die Zahl $(p-1)! + 1$ durch p teilbar.

2. Dieser wichtige Lehrsatz wird der Wilsonsche[1]) genannt. Er läßt sich in der folgenden Weise umkehren:

> Ist p eine natürliche Zahl, und $(p-1)!+1$ durch p teilbar, so ist p eine Primzahl.

Denn enthält p einen Primteiler q, der kleiner ist als p, so ist $(p-1)!$ durch q teilbar, und $(p-1)!+1$ kann nicht durch q, also auch nicht durch p teilbar sein. Der Wilsonsche Satz gibt uns also ein sicheres Kennzeichen für eine Primzahl.

3. Von dem Wilsonschen Satze machen wir folgende wichtige Anwendung:

Ist p wieder eine ungerade Primzahl, so gibt es zu jeder Zahl a der Reihe $1, 2, \ldots, (p-1)$ eine Zahl a'', die der Kongruenz

$$aa'' \equiv -1 \pmod{p}$$

genügt. Wenn nun die Kongruenz

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p} \tag{1}$$

keine Lösung hat, so ist niemals $a'' = a$, und die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ zerfallen in $\frac{1}{2}(p-1)$ Paare, deren Produkt nach dem Modul p mit -1 kongruent ist. Daher ist

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

und nach dem Wilsonschen Satze auch $\equiv -1$. Folglich ist, da $+1$ nicht mit -1 kongruent sein kann, $\frac{1}{2}(p-1)$ eine ungerade Zahl.

4. Ist aber die Kongruenz (1) lösbar, und ist $x = \alpha$ eine Lösung, so ist für jede Lösung von (1) $x^2 \equiv \alpha^2$, also $(x-\alpha)(x+\alpha)$ durch p teilbar, also $x \equiv +\alpha$ oder $x \equiv -\alpha$. Es gibt also zwei und nur zwei Lösungen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p-1$, und deren Produkt $\alpha(p-\alpha)$ ist $\equiv -\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Die Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ zerfallen also jetzt in $\frac{1}{2}(p-3)$ Paare, a, a'', deren Produkt mit -1 kongruent ist, und es bleiben zwei Zahlen $\alpha, p-\alpha$ übrig, deren

---

1) Die erste Erwähnung dieses Satzes findet sich in Warings Meditationes algebraicae, deren erste Auflage 1770 erschien: „Hanc maxime elegantem numerorum primorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Ioannes Wilson Armiger." Dieser Ioannes Wilson Armiger ist ohne Zweifel identisch mit Sir John Wilson, der 1741—1793 lebte, von dem es in der „National Biography", LXII, 107 (London 1900) heißt: „While still an undergraduate he is said to have made an able reply to the attack on Edward Warings Miscellanea analytica by William Samuel Powell" (briefliche Mitteilung von M. Cantor).

Produkt $\equiv 1$ ist. Demnach ist mit Rücksicht auf den Wilsonschen Satz

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1,$$

und es muß also $\frac{1}{2}(p-1)$ eine gerade Zahl sein.

Alle ungeraden Zahlen p (ob Primzahl oder nicht) zerfallen in zwei Klassen, je nachdem $\frac{1}{2}(p-1)$ gerade oder ungerade ist. Die ersten können in die Form $4n+1$, die zweiten in die Form $4n+3$ oder $4n-1$ gesetzt werden, worin n eine ganze Zahl bedeutet.

Für die Primzahlen, die zu der ersten Klasse gehören, ist die Kongruenz (1) lösbar, für die Primzahlen der zweiten Klasse nicht. Wir drücken diesen von Euler zuerst bewiesenen Satz so aus:

5. Ist p eine Primzahl von der Form $4n+1$, so kann man für x eine solche ganze Zahl setzen, daß x^2+1 durch p teilbar wird; ist aber p von der Form $4n+3$, so ist das nicht möglich.

Zu den Primzahlen der ersten Klasse gehören z. B.

5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73,

zu denen der zweiten Klasse

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67.

6. Für die Primzahlen der ersten Klasse kann man die Lösung der Kongruenz (1) leicht aus dem Wilsonschen Satze finden.

Denn es ist:

$$\left.\begin{aligned} 1 &\equiv -(p-1), \\ 2 &\equiv -(p-2), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{p-1}{2} &\equiv -\left(p-\frac{p-1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \pmod{p}$$

Ist also $p = 4n+1$, so zerfallen die Zahlen des Produktes $(p-1)!$ in zwei Hälften: $1, 2, \ldots, 2n$ und $(2n+1), (2n+2), \ldots, (p-1)$ in der Art, daß das Produkt der ersten Hälfte mit dem Produkt der zweiten Hälfte nach dem Modul p kongruent ist. Daher ist nach dem Wilsonschen Satze:

$$(p-1)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

und die Lösung der Kongruenz (1) wird in der Form erhalten

$$x \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Ist z. B. $p = 13$, so ist $x \equiv 6! \equiv 720 \equiv 5 \pmod{13}$, und in der Tat ist $5^2 + 1 = 26$ durch 13 teilbar.

Bei großen Werten von p läßt sich freilich diese Methode zur Berechnung von x praktisch nicht anwenden. Für solche Zahlen hat Gauß ein auf der höheren Arithmetik beruhendes Hilfsmittel zur schnellen Berechnung angegeben, das wir hier zwar nicht in seiner Allgemeinheit entwickeln, aber doch an einem Beispiele soweit klar machen können, daß es danach auf beliebige ähnliche Beispiele angewandt werden kann. Dazu aber sind die folgenden Betrachtungen erforderlich.

§ 80. Quadratische Reste.

1. Ist m eine beliebige natürliche Zahl, und x einer der Reste $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ von m, so geben die beiden Zahlen

$$x^2, \quad (m-x)^2 = m^2 - 2mx + x^2$$

bei der Division mit m dieselben Reste, und andere Reste als diese können bei der Division von Quadratzahlen durch m nicht zum Vorschein kommen. Man erhält daher gewiß alle diese Reste aus der Division von x^2 durch m, und braucht dabei x nicht größer als $\frac{1}{2}m$ anzunehmen.

Die so entstandenen Reste heißen die quadratischen Reste von m. Ihre Anzahl ist höchstens gleich $(\frac{1}{2}m + 1)$.

Die übrigen Reste von m, die niemals Reste von Quadratzahlen sein können, heißen die quadratischen Nichtreste. Ihre Anzahl ist mindestens gleich $(\frac{1}{2}m - 1)$.

2. Wenn m eine ungerade Primzahl ist, so geben niemals zwei Quadratzahlen x^2 und y^2, deren Wurzeln x, y zwei verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$ sind, den gleichen Rest. Denn sonst müßte

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

durch m teilbar sein, was nicht möglich ist, da sowohl $x - y$ als $x + y$ kleiner als m sind. Demnach haben wir den Satz:

Schließt man den selbstverständlichen quadratischen Rest 0 aus, so hat eine ungerade Primzahl m genau $\frac{1}{2}(m-1)$ quadratische Reste und ebensoviele quadratische Nichtreste.

3. Beispiele. $m = 3$:

Quadratische Reste: 0, 1,

„ Nichtreste: 2.

$m = 4$:

Quadratische Reste: 0, 1,
" Nichtreste: 2, 3.

$m = 5$:

" Reste: 0, 1, 4,
" Nichtreste: 2, 3.

$m = 6$:

" Reste: 0, 1, 3, 4,
" Nichtreste: 2, 5.

$m = 7$:

" Reste: 0, 1, 2, 4,
" Nichtreste: 3, 5, 6.

$m = 8$:

" Reste: 0, 1, 4,
" Nichtreste: 2, 3, 5, .

$m = 9$:

" Reste: 0, 1, 4, 7,
" Nichtreste: 2, 3, 5, 6, 8.

$m = 11$:

" Reste: 0, 1, 3, 4, 5, 9,
" Nichtreste: 2, 6, 7, 8, 10.

$m = 13$:

" Reste: 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12,
" Nichtreste: 2, 5, 6, 7, 8, 11.

4. Wir heben den speziellen Satz hervor, der aus dem Beispiel $m = 8$ folgt, daß das Quadrat einer ungeraden Zahl immer von der Form $8n + 1$ (also auch von der Form $4n + 1$) ist.

5. Wenn nun $x^2 + 1$ durch eine Primzahl p teilbar sein soll, so setzen wir

(1) $$x^2 + 1 = py,$$

worin also x und y noch unbekannte ganze Zahlen sind. Statt direkt x zu suchen, kann man aber auch y suchen, und diese Zahl hat die Bedingung zu erfüllen, daß $py - 1$ eine Quadratzahl sein soll.

Da man $x < \frac{1}{2}p$ annehmen kann, so folgt aus (1) $py < \frac{1}{4}p^2$ oder $y < \frac{1}{4}p$. Man hat also nur noch den vierten Teil aller Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ für y zu setzen und zu versuchen, ob $py - 1$ ein Quadrat werde. Um aber festzustellen, ob eine Zahl ein Quadrat sei, dazu hat man ein einfaches und sicheres Mittel (§ 23).

6. Es läßt sich aber die Anzahl der Zahlen, die man für y versuchsweise zu setzen hat, noch weiter herabdrücken. Zu diesem Zweck nehme man eine beliebige Zahl e an, die man den Exkludenten nennt (man wählt dazu zunächst kleine Zahlen, 3, 4, 5, 7, 8, ..., u. s. w., die Zahl 6 als Exkludenten zu nehmen, ist zwecklos, da sie nichts anderes gibt als der Exkludent 3). Ist nun β ein quadratischer Nichtrest von e, so kann nach (1) niemals

$$py \equiv \beta + 1 \pmod{e} \tag{2}$$

werden, und man hat also alle Zahlen y auszuschließen, die einer Kongruenz (2) genügen.

7. Wählen wir als Beispiel $p = 97$, so haben wir zunächst für y die Zahlen $1, 2, \ldots, 24$ zu setzen.

Nehmen wir $e = 3$ als Exkludenten, so ist 2 Nichtrest, und wenn wir also in (2) $\beta = 2$ setzen, so folgt, daß alle durch 3 teilbaren Zahlen davon noch auszuschließen sind, und es bleiben also die Zahlen

$$y = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23.$$

Nimmt man $e = 8$, $\beta = 2, 3, 5, 6$, so ergeben sich als noch auszuschließen alle Zahlen, die von einer der Formen

$$8n + 3, \quad 8n + 4, \quad 8n + 6, \quad 8n + 7$$

sind, und es bleiben also

$$y = 1, 2, 5, 8, 10, 13, 16, 17.$$

Setzt man ferner $e = 5$, $\beta = 2, 3$, so hat man die Lösungen der Kongruenz

$$2y \equiv 3, 4, \quad \text{d. h.} \quad y \equiv 4, 2 \pmod{5}$$

auszuschließen, also die Zahlen 2 und 17.

Wendet man noch die Zahlen $e = 9$, $e = 7$ an, so kann man alle Zahlen bis auf 5 und 13 ausschließen, und man findet dann

$$97 \cdot 5 - 1 = 484 = 22^2.$$

Es genügt also $x \equiv 22$, oder $\equiv 75$ der Kongruenz $x^2 \equiv -1 \pmod{97}$. Dieses Verfahren kann man, freilich mit mehr Rechnung, auch auf

größere Primzahlen anwenden, wenn man mit den Exklusionen noch weiter geht, und findet so z. B. für $p = 1901$ den Wert $y = 25$, und daraus das nachträglich leicht zu verifizierende Resultat

$$218^2 \equiv -1 \pmod{1901}.$$

Wir geben noch einige Beispiele, die aus einer von Euler berechneten Tabelle willkürlich herausgegriffen sind.[1])

$$\begin{aligned} 114^2 &\equiv -1 \pmod{317}, & 78^2 &\equiv -1 \pmod{1217};\\ 208^2 &\equiv -1 \pmod{509}, & 51^2 &\equiv -1 \pmod{1301};\\ 26^2 &\equiv -1 \pmod{677}, & 225^2 &\equiv -1 \pmod{1489};\\ 317^2 &\equiv -1 \pmod{773}, & 61^2 &\equiv -1 \pmod{1861};\\ 469^2 &\equiv -1 \pmod{1009}, & 412^2 &\equiv -1 \pmod{1997}. \end{aligned}$$

§ 81. Quadratische Reste von Primzahlen.

1. Wir haben schon im vorigen Paragraphen gesehen, daß eine ungerade Primzahl p genau $\frac{1}{2}(p-1)$ quadratische Reste und $\frac{1}{2}(p-1)$ Nichtreste hat, wenn wir jetzt ein für allemal den Rest 0 ausschließen. Man erhält die quadratischen Reste als Reste der Zahlen

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Die dabei nicht zum Vorschein kommenden Zahlen sind die Nichtreste. Wir wollen jetzt der kürzeren Ausdrucksweise halber die Gesamtheit der Zahlen, die nach p denselben Rest geben, als ein einziges Individuum, eine Zahlklasse auffassen und demnach unter quadratischen Resten alle Zahlen a verstehen, für die die Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ lösbar ist. Wir werden auch hier unter Resten schlechtweg quadratische Reste verstehen. Wir haben dann die Sätze:

2. Das Produkt zweier Reste ist ein Rest.

Denn ist

$$x^2 \equiv a, \quad x'^2 \equiv a' \pmod{p},$$

so ist

$$(xx')^2 \equiv aa' \pmod{p},$$

also aa' auch Rest.

3. Das Produkt aus einem Rest und einem Nichtrest ist ein Nichtrest.

Denn sind a und aa' Reste, so gibt es zwei Zahlen x, y, die den Kongruenzen

$$x^2 \equiv a, \quad y^2 \equiv aa' \pmod{p}$$

1) Commentationes arithmeticae, Bd. 1, S. 362.

genügen, und es gibt nach § 79, 1. eine Zahl x', für die $xx' \equiv 1$ ist. Es ist dann:

$$y^2 \equiv x^2 a', \quad (yx')^2 \equiv a',$$

und es ist also a' gleichfalls Rest. Wenn also a Rest und b Nichtrest ist, so ist auch ab Nichtrest. Denn wäre ab Rest, so müßte, wie eben bewiesen, auch b Rest sein.

4. Das Produkt aus zwei Nichtresten ist ein Rest.

Denn ist b irgend eine durch p nicht teilbare Zahl, so durchläuft $b\varrho$ zugleich mit ϱ ein volles Restsystem nach p. Dieses volle Restsystem besteht aus den quadratischen Resten α und den quadratischen Nichtresten β. Ist nun b ein Nichtrest, so durchläuft $b\alpha$ nach 3. die Gesamtheit der Nichtreste, und folglich muß $b\beta$ die Gesamtheit der Reste durchlaufen.

Man prüfe diese Sätze an einem beliebig gewählten Beispiele, etwa $p = 13$:

$$\alpha = 1, 3, 4, 9, 10, 12,$$
$$\beta = 2, 5, 6, 7, \ 8, 11.$$

5. Das Eulersche Kriterium.

Bedeutet x eine nicht durch p teilbare Zahl, so ist nach dem Fermatschen Satze

$$x^{p-1} - 1 \equiv \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \quad (\mathrm{mod}\ p).$$

Es ist also einer der beiden Faktoren

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1, \quad x^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

durch p teilbar; es können es aber nicht beide sein, da sonst auch ihre Differenz 2 durch p teilbar sein müßte. Ist nun a ein quadratischer Rest von p, so gibt es eine der Kongruenz

$$c^2 \equiv a$$

genügende Zahl c, und es ist wieder nach dem Fermatschen Satze

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv c^{p-1} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

und folglich genügt jeder quadratische Rest der Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0.$$

Dieser Kongruenz genügen alle $\frac{1}{2}(p-1)$ quadratischen Reste und

nach § 77 kann ihr kein quadratischer Nichtrest genügen. Die quadratischen Nichtreste müssen also der zweiten Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0$$

genügen. Wir fassen dies zusammen:

Die Zahl c ist quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem

(1) $$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \quad \text{oder} \quad \equiv -1 \pmod{p}$$

ist.

6. Das Gaußsche Kriterium.

Es sei c eine durch p nicht teilbare Zahl. Wir betrachten die $\frac{1}{2}(p-1)$ Vielfachen von c

(2) $$c,\ 2c,\ 3c,\ \cdots,\ \frac{p-1}{2}c$$

und das Produkt aller dieser Zahlen

(3) $$P = c \cdot 2c \cdot 3c \cdots \frac{p-1}{2} c = c^{\frac{p-1}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}.$$

Die absolut kleinsten Reste der Zahlen (2) sind unter den Zahlen

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm \frac{p-1}{2}$$

zu suchen. Es kommen aber unter diesen absolut kleinsten Resten nicht zwei mit dem gleichen absoluten Wert vor; denn wäre $rc \equiv \pm r'c$, so müßte $r \pm r'$ durch p teilbar sein, und dies ist nicht möglich, wenn r, r' voneinander verschieden und beide positiv und kleiner als $\frac{1}{2}p$ sind. Demnach sind, vom Vorzeichen abgesehen, die absolut kleinsten Reste der Zahlen (1) die Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \frac{p-1}{2},$$

und wenn darunter μ negative vorkommen, so ist

(4) $$P \equiv (-1)^{\mu} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Demnach ist nach (3) und (4)

$$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p},$$

und dies gibt in Verbindung mit 5. den Satz:

Die durch p nicht teilbare Zahl c ist quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem unter den

absolut kleinsten Resten der Zahlen (2) eine gerade oder eine ungerade Anzahl negativer vorkommen.

7. Wenden wir dies an auf $c = -1$, so sind die Zahlen (2) ihre eigenen absolut kleinsten Reste und sie sind alle negativ. Es ist also -1 quadratischer Rest, wenn $\frac{1}{2}(p-1)$ gerade, und Nichtrest, wenn $\frac{1}{2}(p-1)$ ungerade ist. Das stimmt überein mit dem schon oben auf anderem Wege bewiesenen Satze:

-1 ist quadratischer Rest der Primzahlen der Form $4m+1$ und Nichtrest der Primzahlen von der Form $4m+3$.

8. Nehmen wir $c = -2$, so stimmt die Zahlenreihe (2) mit der Reihe der negativen geraden Zahlen

$$-2, -4, -6, \cdots, -(p-1)$$

überein. Ist $2r < \frac{1}{2}p$, so ist $-2r$ sein eigener absolut kleinster Rest, also negativ, ist aber $2r > \frac{1}{2}p$, so ist $p - 2r$ der absolut kleinste Rest von $-2r$, also positiv. Es ist also μ die Anzahl der positiven geraden Zahlen, die kleiner als $\frac{1}{2}p$ oder, was dasselbe ist, die Anzahl der positiven ganzen Zahlen, die kleiner als $\frac{1}{4}p$ sind. Nun hat p eine der vier Formen

$$8m+1, \quad 8m+3, \quad 8m+5, \quad 8m+7$$

und es ist also in diesen vier Fällen μ die Anzahl der positiven Zahlen r, die den Bedingungen genügen:

$$r < 2m + \tfrac{1}{4}, \quad \mu = 2m,$$
$$r < 2m + \tfrac{3}{4}, \quad \mu = 2m,$$
$$r < 2m + \tfrac{5}{4}, \quad \mu = 2m+1,$$
$$r < 2m + \tfrac{7}{4}, \quad \mu = 2m+1.$$

Daraus ergibt sich der Satz:

-2 ist quadratischer Rest der Primzahlen der Form

$$8m+1, \quad 8m+3,$$

und Nichtrest der Primzahlen der Form

$$8m+5, \quad 8m+7.$$

9. Die Verbindung dieses Satzes mit dem vorigen ergibt nach Nr. 2., 3., 4.

$+2$ ist quadratischer Rest der Primzahlen der Form

$$8m+1, \quad 8m+7,$$

und Nichtrest der Primzahlen der Form

$$8m+3, \quad 8m+5.$$

10. Geschichtliche Notizen über die quadratischen Reste. Wenn c quadratischer Rest von p ist, so gibt es ganze Zahlen x, für die die quadratische Funktion

$$f(x) = x^2 - c \tag{5}$$

durch p teilbar ist. Die älteren Zahlentheoretiker, Euler, Legendre u. a. nennen daher die Primzahlen, von denen c quadratischer Rest ist, die Primteiler der Funktion $f(x)$, und die Aufgabe, die wir hier für die Fälle $c = -1, \pm 2$ gelöst haben, lehrt uns also, die Primteiler der Funktionen $x^2 + 1, x^2 \pm 2$ kennen. Fermat waren diese Resultate bereits bekannt, aber wahrscheinlich hatte er sie nur durch Induktion erschlossen. Den Beweis für $c = -1$ hat Euler gegeben, der für $c = \pm 2$ rührt von Lagrange her. Das allgemeine Gesetz für ein beliebiges c hat Euler zuerst ausgesprochen, aber nicht bewiesen (1783). Dieses allgemeine Gesetz, das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste nach Legendre, oder das „Theorema fundamentale in doctrina de residuis quadraticis“ von Gauß spielt in der Geschichte der neueren Zahlentheorie eine große Rolle. Außer Euler und wahrscheinlich von ihm unabhängig hat es auch Legendre durch Induktion gefunden (1785), aber zum erstenmal ist es 1786 von Gauß bewiesen worden.

Gauß ist immer und immer wieder darauf zurückgekommen und hat bis zum Jahre 1818 sechs auf ganz verschiedenen Grundlagen beruhende Beweise gegeben (zwei weitere fanden sich noch im Nachlaß).

Andere Beweise sind von Cauchy, Jacobi, Eisenstein, Kummer, Kronecker und anderen. Ein besonders einfacher ist der des Pfarrers Zeller in den Monatsberichten der Berliner Akademie von 1872.

Der Inhalt des allgemeinen Gesetzes läßt sich so aussprechen:

> Ist von den beiden ungeraden Primzahlen p, q wenigstens eine von der Form $4n + 1$, so ist p Rest oder Nichtrest von q, je nachdem q Rest oder Nichtrest von p ist. Sind beide Primzahlen p, q von der Form $4n + 3$, so ist p Rest von q, wenn q Nichtrest von p ist und umgekehrt.

Die Fälle $c = -1$, $c = \pm 2$, die wir oben behandelt haben, sind nicht unmittelbar darin als Spezialfälle enthalten und führen daher den Namen der Ergänzungssätze zum quadratischen Reziprozitätsgesetz. Sehr eingehenden Bericht über die verschiedenen Beweise des Reziprozitätsgesetzes findet man in der Schrift von Oswald Baumgart „Über das quadratische Reziprozitätsgesetz“, Leipzig, Teubner 1885.

§ 82. Die Pythagoräischen Dreiecke.

1. Es ist eine uralte Wahrnehmung, deren Geschichte sich im Dunkel der Vorzeit verliert, daß ein Dreieck, dessen Seiten, in irgend einer Längeneinheit gemessen, 3, 4 und 5 sind, einen rechten Winkel hat; und diese drei Zahlen sind durch die arithmetische Eigenschaft ausgezeichnet, daß das Quadrat der größten unter ihnen gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen ist ($5^2 = 3^2 + 4^2$). Diese Tatsachen sind ein Ausdruck des Pythagoräischen Lehrsatzes, und die Historiker sind der Meinung, daß diese arithmetische Wahrnehmung das Ursprüngliche, die Quelle für den geometrischen Satz gewesen sei (Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. 1. S. 168).

Man nennt ein rechtwinkliges Dreieck ein Pythagoräisches, wenn sich seine Seiten, in irgend einer Einheit gemessen, in ganzen Zahlen ausdrücken lassen, und um alle Pythagoräischen Dreiecke zu finden, hat man also die arithmetische Aufgabe zu lösen, alle natürlichen Zahlen x, y, z zu finden, die der Bedingung

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

genügen.

2. Um diese Aufgabe zu lösen, machen wir zunächst die Bemerkung, daß wir aus jeder Lösung von (1) beliebig viele andere ableiten können, wenn wir die drei Zahlen x, y, z mit einem und demselben Faktor multiplizieren. Ebenso können wir, wenn x, y, z den größten gemeinsamen Teiler h haben, die Gleichung (1) durch h^2 dividieren, und erhalten daraus eine Lösung, in der x, y, z keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Hiernach können wir uns auf die Annahme beschränken, daß x, y, z keinen gemeinsamen Teiler haben. Dann können aber auch nicht zwei von diesen drei Zahlen einen gemeinsamen Teiler haben; denn sind zwei von diesen Zahlen durch irgend eine Primzahl q teilbar, so muß wegen (1) auch die dritte durch q teilbar sein.

Demnach dürfen keine zwei der Zahlen x, y, z einen gemeinsamen Teiler haben.

Es können also auch nicht zwei dieser Zahlen gerade sein. Andererseits können die Zahlen x, y nicht beide ungerade sein. Denn ist $x = 2h + 1$, $y = 2k + 1$, so ist

$$x^2 + y^2 = 4(h^2 + k^2) + 4(h + k) + 2,$$

und diese Zahl ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Sie kann also keine Quadratzahl sein, da jede gerade Quadratzahl durch 4 teilbar sein muß. Wir beeinträchtigen daher die Allgemeinheit nicht, wenn

wir x ungerade, y gerade und z ungerade annehmen. Dann schreiben wir die Gleichung (1) in die Form:

(2) $$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Setzen wir:

$$z + y = m,$$
$$z - y = n,$$

so sind nach unserer Voraussetzung m und n ungerade Zahlen, und es folgt

$$z = \frac{m+n}{2}, \quad y = \frac{m-n}{2},$$

woraus noch zu schließen ist, daß $m > n$ ist, und daß m und n keinen gemeinsamen Faktor haben können, da dieser nur ungerade sein könnte, und daher auch in y und z enthalten wäre. Nun folgt aus (2)

(3) $$x^2 = mn,$$

und daraus ergibt sich, daß m und n Quadratzahlen sein müssen.

Denn wenn m irgend einen Primfaktor in einer ungeraden Potenz enthielte, so müßte dieser wenigstens noch einmal in n enthalten sein, was der Annahme widerspricht, daß m und n relativ prim seien.

Es ist daher $m = a^2$, $n = b^2$, $x = ab$, wenn a, b ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, und folglich:

(4) $$x = ab, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

3. Umgekehrt genügen, wenn a, b irgend zwei ungerade ganze Zahlen sind, a die größere der beiden, diese Ausdrücke der Gleichung (1). Denn es ist

$$a^2 b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2.$$

Demnach sind durch die Formeln (4) alle möglichen Pythagoräischen Dreiecke dargestellt. Man erhält beispielsweise

$$a = 3, \quad b = 1, \quad x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5,$$
$$a = 5, \quad b = 1, \quad x = 5, \quad y = 12, \quad z = 13,$$
$$a = 5, \quad b = 3, \quad x = 15, \quad y = 8, \quad z = 17,$$

u. s. f.

§ 83. Der große Fermatsche Satz.

1. Die Verallgemeinerung der im vorigen Paragraphen gelösten Aufgabe würde die sein, solche positive ganze Zahlen x, y, z zu finden, die der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

genügen. Fermat hat ohne Beweis den Satz ausgesprochen, daß es

solche Zahlen nicht gibt, wenn $n > 2$ ist. Es ist aber bis auf den heutigen Tag nicht gelungen, diesen Satz, dem Kronecker den Namen des großen Fermatschen Satzes gegeben hat, und an dessen Richtigkeit nicht gezweifelt wird, allgemein zu beweisen. Euler hat den Beweis für die beiden Werte der Exponenten $n = 3$ und $n = 4$ gegeben; für $n = 5$ ist er von Dirichlet bewiesen, und Kummer hat durch die Hilfsmittel der höheren Zahlentheorie einen Beweis gegeben, der nur noch einzelne besondere Werte von n ausschließt, die, wenigstens unter den kleineren Werten von n, selten sind. Unter 100 findet sich keiner dieser Exponenten n, die dem Kummerschen Beweis nicht zugänglich sind. Der Beweis für den Fall $n = 4$ läßt sich mit ganz elementaren Hilfsmitteln führen und soll hier mitgeteilt werden.

2. Angenommen, die Gleichung

$$(1) \qquad x^4 + y^4 = z^4$$

habe eine Lösung in ganzen Zahlen x, y, z, von denen keine verschwindet, so hat auch die Gleichung

$$(2) \qquad x^4 + y^4 = z^2$$

eine solche Lösung. Man hat ja nur das z der Gleichung (2) gleich dem Quadrate des z der Gleichung (1) zu setzen.

Es genügt also, oder gibt sogar noch mehr als wir verlangen, wenn wir die Unmöglichkeit von (2) beweisen. Hat aber die Gleichung (2) überhaupt Lösungen, so wird unter diesen auch eine (vielleicht mehrere) sein, in der z^2 so klein als möglich ist. In dieser Lösung, die wir nun unter x, y, z verstehen, können x und y keinen gemeinsamen Teiler haben. Denn wäre d ein gemeinsamer Teiler von x, y, so müßte z durch d^2 teilbar sein, und durch Division der ganzen Gleichung (2) durch d^4 erhält man eine Gleichung derselben Form, in der z verkleinert ist.

3. Wenn nun (2) erfüllt ist, so sind x^2, y^2, z die Seiten eines Pythagoräischen Dreiecks, und wir können nach § 82, 2. setzen

$$(3) \qquad x^2 = ab, \quad y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

worin a und b ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind ($a > b$). Aus der ersten der Gleichungen (3) schließen wir aber ebenso wie in § 82, 2. aus der Gleichung (3), daß die Zahlen a, b selbst Quadrate sein müssen, und setzen

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2,$$

worin α, β wieder ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind.

Setzen wir nun

$$\alpha + \beta = 2t, \quad \alpha - \beta = 2u$$

und folglich

$$\alpha = t + u, \quad \beta = t - u,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 4tu, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2(t^2 + u^2),$$

so sind auch t und u ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, und es folgt aus (3):

$$y^2 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{2} = 4tu(t^2 + u^2)$$

und daraus

(4) $$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = tu(t^2 + u^2).$$

Nun sind t und u ohne gemeinsamen Teiler, und folglich kann auch $t^2 + u^2$ weder mit t noch mit u einen Teiler gemein haben, und daraus schließen wir, wie oben, daß die drei Zahlen t, u, $t^2 + u^2$ Quadratzahlen sind. Setzen wir

$$t = x_1^2, \quad u = y_1^2, \quad t^2 + u^2 = z_1^2,$$

so folgt:

(5) $$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2.$$

Nun ist aber

$$z_1^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{a + b}{2} = \frac{y^2}{a - b},$$

also, da $a - b$ eine positive gerade ganze Zahl, also mindestens gleich 2 ist,

$$z_1^2 < y^2;$$

andererseits ist $y^4 = z^2 - x^4 < z^2$ und folglich

$$z_1^2 < z;$$

es wäre also z_1^2 kleiner als z und um so mehr kleiner als z^2, was der Annahme widerspricht, daß z^2 die kleinste Zahl sei, für die die Gleichung (2) befriedigt werden kann. Es gibt folglich überhaupt keine positiven ganzen Zahlen x, y, z, die der Gleichung (2) genügen, wie der Fermatsche Satz behauptet.

§ 84. Zerlegung von Zahlen in die Summe zweier Quadrate.

1. Jede Primzahl von der Form $4n + 1$ ist die Summe von zwei Quadratzahlen.[1])

2. Sind x und y ganze Zahlen und

(1) $$m = x^2 + y^2$$

1) Der Satz ist von Fermat ohne Beweis ausgesprochen. Der Beweis rührt von Euler her (1754) (Commentationes arithmeticae, Bd. 1). Heute erscheint der Satz als ganz spezieller Fall der Theorie der quadratischen Formen.

die Summe ihrer Quadrate, so kann m nur dann ungerade sein, wenn von den beiden Zahlen x, y die eine gerade, die andere ungerade ist, denn die Summe zweier geraden oder zweier ungeraden Zahlen ist immer gerade. Da das Quadrat einer geraden Zahl durch 4 teilbar ist, und das Quadrat einer ungeraden Zahl für den Modul 4 den Rest 1 gibt (§ 80, 4.), so folgt, daß m in der Formel (1), wenn es ungerade ist, eine Zahl von der Form $4n+1$ sein muß. Wenn also eine Primzahl (außer $2 = 1^2 + 1^2$) die Summe zweier Quadrate ist, so ist sie gewiß von der Form $4n+1$. Das Umgekehrte aber, daß jede Primzahl von dieser Form auch wirklich immer die Summe zweier Quadrate ist, war viel schwerer zu beweisen.

Wenn $m = x^2 + y^2$ gesetzt werden kann, worin x und y ganzzahlig sind, so sagen wir, m ist in zwei Quadrate zerlegt oder durch die Summe zweier Quadrate dargestellt. Sind x und y relativ prim, so nennen wir m eigentlich zerlegt oder eigentlich dargestellt; haben x und y einen gemeinsamen Teiler, so ist die Zerlegung oder Darstellung uneigentlich.

Wenn x und y einen gemeinsamen Teiler haben, so muß nach (1) das Quadrat dieses Teilers in m enthalten sein; und wenn also m eine Primzahl sein soll, so müssen x und y relativ prim sein.

3. Wir nehmen jetzt an, es sei eine ungerade Primzahl p zwar noch nicht als Summe zweier Quadrate dargestellt, wohl aber in der Summe zweier Quadrate als Teiler enthalten. Wir setzen also

$$x^2 + y^2 = np, \tag{2}$$

und nehmen an, daß x, y und n ganze Zahlen seien, und daß x und y nicht durch p teilbar sind. Wir werden zeigen, wie man daraus andere Zahlen ableiten kann, die einer Gleichung von derselben Form (2) genügen, nur mit verkleinertem n, und wie man so sukzessive zu einer Darstellung von p als Summe zweier Quadrate gelangt.

4. Wir setzen durch Division mit p:

$$x = pa + x_1,$$
$$y = pb + y_1,$$

worin a, b die Quotienten, x_1, y_1 die (von Null verschiedenen) Reste der Division sind. Wir nehmen aber nicht die kleinsten positiven Reste, sondern die absolut kleinsten Reste (§ 16, 3.). Es können dann x_1 und y_1 positiv oder negativ sein, es ist aber

$$x_1 < \tfrac{1}{2}p, \quad y_1 < \tfrac{1}{2}p,$$

dem absoluten Werte nach; folglich ist

$$(3) \qquad x_1^2 + y_1^2 < \tfrac{1}{2}p^2.$$

Nun ist aber auch

$$x_1^2 + y_1^2 = p^2(a^2 + b^2) - 2p(ax + by) + (x^2 + y^2)$$

wegen (2) eine durch p teilbare Zahl, und es folgt also, wenn wir den Quotienten mit n_1 bezeichnen,

$$(4) \qquad x_1^2 + y_1^2 = n_1 p,$$

und mit Rücksicht auf (3) ist

$$n_1 < \tfrac{1}{2}p.$$

Hier können x_1, y_1 nicht durch p teilbar sein, weil sonst $n_1 p$ durch p^2, also n_1 durch p teilbar wäre, was, da $n_1 < p/2$ und von Null verschieden ist, nicht sein kann.

5. Nun setzen wir das Verfahren in ähnlicher Weise fort, nur daß wir jetzt nicht p, sondern n_1 als Divisor nehmen. Wir setzen

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_1 &= n_1 a_1 + \alpha, \\ y_1 &= n_1 b_1 + \beta, \end{aligned}$$

und bestimmen a_1, b_1 so, daß die Reste α, β dem absoluten Werte nach kleiner als $n_1/2$ oder gleich $n_1/2$ werden, und daß also

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq \tfrac{1}{2}n_1^2$$

wird. Es ergibt sich aber wieder aus (4) und (5) wie oben, daß $\alpha^2 + \beta^2$ durch n_1 teilbar ist, und wir setzen daher

$$(6) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = n_1 n_2,$$

worin

$$n_2 \leqq \tfrac{1}{2}n_1 < \tfrac{1}{4}p.$$

Die beiden Zahlen α, β könnten nur dann gleich Null sein, wenn x_1 und y_1 durch n_1 teilbar wären. Dann aber müßte $n_1 p$ durch n_1^2, also p durch n_1 teilbar sein, und, da p Primzahl ist, müßte entweder $n_1 = p$, was, da $n_1 < \frac{1}{2}p$ ist, nicht möglich ist, oder $n_1 = 1$ sein. In diesem letzteren Falle wäre aber durch (4) unser Ziel, p als Summe zweier Quadrate dazustellen, erreicht.

Ist aber n_1 größer als 1, so sind α und β nicht beide gleich Null und folglich ist auch n_2 von Null verschieden.

Aus (5) folgt mit Rücksicht auf (4)

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 &= x_1^2 + y_1^2 - n_1(a_1 x_1 + b_1 y_1) = n_1(p - a_1 x_1 - b_1 y_1), \\ \alpha y_1 - \beta x_1 &= -n_1(a_1 y_1 - b_1 x_1). \end{aligned}$$

Es sind also $\alpha x_1 + \beta y_1$ und $\alpha y_1 - \beta x_1$ durch n_1 teilbar, und wir können zwei ganze Zahlen x_2, y_2 so bestimmen, daß

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = n_1 x_2,$$
$$\alpha y_1 - \beta x_1 = n_1 y_2$$

wird, woraus man durch Quadrieren und Addieren findet:

$$n_1^2(x_2^2 + y_2^2) = (\alpha^2 + \beta^2)(x_1^2 + y_1^2)$$

und folglich nach (4) und (6):

(7) $$x_2^2 + y_2^2 = n_2 p.$$

Wären nun x_2 und y_2 durch p teilbar, so müßte n_2 durch p teilbar sein, was aber, da n_2 kleiner als p ist, nicht möglich ist. Demnach sind x_2, y_2 durch p nicht teilbar.

Die Formel (7) ist aber von derselben Form wie (4), nur daß an Stelle von n_1 das kleinere n_2 getreten ist. Wenn aber n_2 noch nicht gleich 1 ist, können wir das Verfahren noch einmal anwenden, und kommen so schließlich dazu, p selbst als Summe zweier Quadrate darzustellen.

6. Es ergibt sich hieraus, daß jede Primzahl p, die in der Summe zweier Quadrate $x^2 + y^2$ mit teilerfremden x und y aufgeht, selbst als Summe zweier Quadrate darstellbar und mithin von der Form $4n + 1$ ist.

7. Da wir nun in § 79 nachgewiesen haben, daß, wenn p eine Primzahl von der Form $4n + 1$ ist, die Kongruenz

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$

immer lösbar ist, so können wir n so bestimmen, daß

$$x^2 + 1 = np.$$

Dies stimmt aber mit der Gleichung (2) überein, wenn dort $y = 1$ gesetzt wird. Die Gleichung (2) kann also für jede Primzahl von der Form $4n + 1$ erfüllt werden, und damit ist der Satz 1. bewiesen. Wir haben in dem Gange des Beweises zugleich ein Mittel, die Zerlegung von p in zwei Quadrate wirklich auszuführen, wenn eine Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv -1 \pmod p$ gefunden ist.

8. Als Beispiel nehmen wir $p = 1901$. Da in der Formel

$$218^2 + 1 = 25 \cdot 1901$$

der Faktor 25 bereits kleiner als $\frac{1}{2}p$ ist, so können wir gleich von (4) ausgehen, also $x_1 = 218$, $y_1 = 1$, $n_1 = 25$ setzen. Dann ergibt sich aus (5)

$$218 = 25 \cdot 9 - 7, \quad 1 = 25 \cdot 0 + 1,$$

also $\alpha = -7$, $\beta = 1$. Zur Bestimmung von x_2, y_2 erhält man nach (6)

$$-7 \cdot 218 + 1 = -25 \cdot 61,$$
$$-7 - 218 = -25 \cdot 9,$$
$$7^2 + 1^2 = 2 \cdot 25,$$

also $x_2 = 61$, $y_2 = 9$, $n_2 = 2$ und folglich

$$61^2 + 9^2 = 2 \cdot 1901,$$

und durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens auf $n_1 = 2$, $x_1 = 61$, $y_1 = 9$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $2x_2 = 61 + 9$, $2y_2 = 61 - 9$:

$$35^2 + 26^2 = 1901.$$

9. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich noch die Sätze:

Sind die Zahlen x und y relativ prim, und ist $m = x^2 + y^2$ die Summe ihrer Quadrate, so ist m entweder ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl; jeder ungerade Primteiler von m ist von der Form $4n + 1$.

Denn wenn x und y beide ungerade sind, so sind ihre Quadrate von der Form $8n + 1$ (§ 80, 4.) und deren Summe also von der Form $8n + 2$ und folglich durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

Andererseits ist nach 6. jede in m aufgehende Primzahl p selbst die Summe zweier Quadrate und folglich von der Form $4n + 1$.

10. Ist $m = x^2 + y^2$ eigentlich darstellbar durch die Summe zweier Quadrate, p ein in m aufgehender Primteiler ($p = 2$ nicht ausgeschlossen), und $m = pn$, so ist auch n eigentlich darstellbar als Summe zweier Quadrate.

Wir haben nämlich in 9. und 2. nachgewiesen, daß auch p die Summe zweier Quadrate ist:

(8) $$p = a^2 + b^2,$$

und hierin sind, da p Primzahl ist, a und b jedenfalls teilerfremd.

Ist nun

(9) $$m = pn = x^2 + y^2,$$

so ist auch

$$x^2(a^2 + b^2) - b^2(x^2 + y^2) = a^2x^2 - b^2y^2 = (ax + by)(ax - by)$$

durch p teilbar, da sowohl $a^2 + b^2$ als $x^2 + y^2$ durch p teilbar sind. Es muß also, da p Primzahl ist, einer der beiden Faktoren $ax + by$, $ax - by$ durch p teilbar sein. Wir können annehmen, es sei dies der erste, da wir sonst nur y durch $-y$ zu ersetzen brauchten.

Ferner ist

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=pm$$

auch durch p teilbar, und daraus folgt, daß auch $ay-bx$ durch p teilbar ist. Es gibt demnach zwei ganze Zahlen α, β, die den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} ax+by&=\alpha p, & a \quad & b \\ bx-ay&=\beta p, & b \quad & -a \end{aligned}$$

woraus man, wenn man mit den beigeschriebenen Faktoren multipliziert und addiert und den Faktor p weghebt,

$$\begin{aligned} x&=\alpha a+\beta b, \\ y&=\alpha b-\beta a \end{aligned}$$

erhält, und hieraus schließt man zunächst, daß α und β keinen gemeinsamen Teiler haben können; denn jeder gemeinsame Teiler von α und β müßte auch in x und y aufgehen, die nach Voraussetzung relativ prim sind.

Wenn man aber die Gleichungen quadriert und addiert, so folgt

$$x^2+y^2=(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2),$$

und daraus folgt nach (8) und (9)

$$n=\alpha^2+\beta^2,$$

w. z. b. w.

Aus 10. aber ergibt sich durch wiederholte Anwendung:

11. Ist m eigentlich zerlegbar in zwei Quadrate, so ist auch jeder Teiler von m eigentlich zerlegbar.

Es ergibt sich weiter:

12. Eine Primzahl p von der Form $4n+1$ ist nur auf eine Art in die Summe zweier Quadrate zerlegbar.

Angenommen, es sei eine Zahl m von der Form $4n+1$ auf zwei verschiedene Arten (eigentlich oder uneigentlich) als Summe zweier Quadrate darstellbar:

$$(10) \qquad m=x^2+y^2=x_1{}^2+y_1{}^2.$$

Wir nehmen die Zahlen x, y, x_1, y_1 positiv an; es kann dann x weder gleich x_1 noch gleich y_1 sein, da sonst $y=y_1$ oder $=x_1$ sein müßte, und die beiden Darstellungen wären nicht verschieden. Nehmen wir also an, es sei $x>x_1$, dann muß $y<y_1$ sein.

Wir bezeichnen mit δ den größten gemeinschaftlichen Teiler von $x-x_1$ und y_1-y und setzen

$$(11) \qquad y_1 = y + \delta\beta,$$

worin α und β positive Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind. Es ergibt sich aus (10)

$$(x_1 + \delta\alpha)^2 + y^2 = (y + \delta\beta)^2 + x_1^2,$$

und daraus nach Weghebung des Faktors δ:

$$2\alpha x_1 + \delta\alpha^2 = 2\beta y + \delta\beta^2;$$

da der gemeinsame Wert dieser beiden Ausdrücke sowohl durch α als durch β teilbar ist, so muß er auch, da α und β relativ prim sind, durch $\alpha\beta$ teilbar sein (§ 16, 6.), und wir setzen ihn gleich $\alpha\beta\gamma$, worin γ ebenfalls eine ganze positive Zahl ist. Dann ergibt sich

$$(12) \qquad \begin{aligned} 2x_1 &= \beta\gamma - \delta\alpha, \\ 2y &= \alpha\gamma - \delta\beta \end{aligned}$$

und aus (11)

$$(13) \qquad \begin{aligned} 2x &= \beta\gamma + \delta\alpha, \\ 2y_1 &= \alpha\gamma + \delta\beta. \end{aligned}$$

Hierin sind α, β, γ, δ vier positive Zahlen, von denen keine gleich Null ist. Nun bilden wir aus (12) und (13):

$$4(x^2 + y^2) = \alpha^2\gamma^2 + \delta^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \delta^2\alpha^2,$$

also

$$(14) \qquad m = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}{4}.$$

Nehmen wir, was uns freisteht, an, es seien x und x_1 gerade und folglich y und y_1 ungerade Zahlen, so ist δ nach (11) durch 2 teilbar, und nach (12) ist, da α und β relativ prim, also nicht beide gerade sind, auch γ gerade. Folglich ist $\frac{1}{4}(\gamma^2 + \delta^2)$ eine ganze Zahl, die jedenfalls größer ist als 1. Ebenso ist $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ und folglich ist m durch die Formel (14) in zwei Faktoren zerlegt und kann also keine Primzahl sein, w. z. b. w.

13. Sind x und y relativ prim und $m = x^2 + y^2$ eine ungerade zusammengesetzte Zahl, so gibt es noch eine zweite Darstellung von m als Summe zweier Quadrate.

Ist nämlich $m = m_1 m_2$, und sind beide Zahlen m_1, m_2 größer als 2, so sind m_1 und m_2 nach 11. gleichfalls durch die Summe zweier Quadrate eigentlich darstellbar. Ist also

$$(15) \qquad m_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad m_2 = x_2^2 + y_2^2,$$

so folgt, wenn wir

$$x' = x_1 x_2 + y_1 y_2, \quad x'' = x_1 x_2 - y_1 y_2,$$
$$y' = x_1 y_2 - y_1 x_2, \quad y'' = x_1 y_2 + y_1 x_2$$

setzen, durch Quadrieren und Addieren:

$$(16) \quad \begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (x_1{}^2 + y_1{}^2)(x_2{}^2 + y_2{}^2) = m_1 m_2 = m, \\ x''^2 + y''^2 &= (x_1{}^2 + y_1{}^2)(x_2{}^2 + y_2{}^2) = m_1 m_2 = m; \end{aligned}$$

diese beiden Darstellungen von m wären aber nur dann miteinander identisch, wenn entweder $x' = \pm x''$ oder $x' = \pm y''$ wäre. Ersteres wäre aber nur möglich, wenn eine der Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2 gleich Null wäre, und dann wären die Darstellungen (15) keine eigentlichen, wie doch vorausgesetzt war. Aus $x' = \pm y''$ aber würde folgen:

$$(x_1 \mp y_1)(x_2 \mp y_2) = 0,$$

also entweder $x_1 = \pm y_1$ oder $x_2 = \pm y_2$. Aber auch dies ist unmöglich, da die Darstellungen (15) eigentliche sind. Die beiden Zerlegungen (16) sind also voneinander verschieden, und der Satz 13. damit bewiesen. Es muß aber noch bemerkt werden, daß die beiden Darstellungen (16) nicht notwendig eigentlich zu sein brauchen.

§ 85. Zerlegung großer Zahlen in Primfaktoren.

1. Da die Sätze § 84, 12., 13. die Primzahlen der Form $4n + 1$ von den zusammengesetzten Zahlen dieser Form scharf unterscheiden, läßt sich darauf ein Verfahren gründen, um eine solche Zahl als Primzahl oder als zusammengesetzt zu erkennen.

Es sei nämlich m eine Zahl der Form $4n + 1$, von der noch nicht feststeht, ob sie eine Primzahl ist oder nicht. Wenn m eine Primzahl ist, so läßt sie sich auf e i n e e i n z i g e Art als Summe zweier Quadrate darstellen:

$$(1) \qquad m = x^2 + y^2,$$

ist aber m zusammengesetzt, so läßt sie sich entweder gar nicht oder auf mehrere Arten in diese Form bringen. Ist eine solche Darstellung vorhanden, so können wir annehmen, es sei $x^2 < y^2$ und dann ergibt sich

$$(2) \qquad x^2 < \tfrac{1}{2} m,$$

und ferner folgt aus (1):

$$(3) \qquad m - x^2 = y^2.$$

Man hat also für x alle der Ungleichung (2) genügenden positiven Zahlen zu setzen und zu untersuchen, ob und wieviel darunter vorkommen, die die Differenz $m - x^2$ zu einer Quadratzahl machen. Kommt nur eine solche Zahl x vor, so ist m Primzahl, kommen

keine oder mehr als eine solche Zahl vor, so ist m zusammengesetzt, und im letzten Falle erhalten wir zugleich aus § 84, 13. eine Zerlegung von m in zwei Faktoren. Euler, dem wir diese Methode verdanken, gibt eine Vorschrift, wie man diese Rechnung in kompendiöser Art anordnen kann. Auch eine Tafel der Quadratzahlen, wie sie z. B. in der früher schon erwähnten „Sammlung mathematischer Tafeln" von Vega-Hülsse enthalten ist, wird dabei gute Dienste leisten. Man kann aber auch durch die Methode der Exklusion (§ 80, 6.) die Anzahl der zu prüfenden Werte von x sehr verringern. Nimmt man nämlich irgend eine Zahl e als Exkludenten, und einen quadratischen Nichtrest β von e, so sind alle solche Zahlen x auszuschließen, die der Kongruenz

$$m - x^2 \equiv \beta \pmod e$$

genügen.

2. Wir wollen als Beispiel die Zahl $m = 19\,109$ nehmen. Hier hat man x nicht größer zu nehmen als 97, denn $2 \cdot 98^2 = 19\,208$ ist bereits größer als m.

Die Zahl m ist hier von der Form $8n + 5$, und wenn also x durch 4 teilbar ist, so ist $m - x^2$ von der Form $8n + 5$, und kann daher kein Quadrat sein, weil 5 quadratischer Nichtrest von 8 ist. Demnach sind alle durch 4 teilbaren Zahlen aus der Reihe der x wegzulassen.

Ist ferner x durch 3 teilbar, so ist $m - x^2$ von der Form $3n + 2$ und folglich sind, da 2 quadratischer Nichtrest von 3 ist, auch die durch 3 teilbaren Zahlen wegzulassen.

Der Exkludent 5 gibt als wegzulassen $x \equiv 1, 4 \pmod 5$ und wenn man in gleicher Weise noch die Exkludenten 7, 11, 13 benutzt, so ergeben sich als auszuschließen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0, \quad \pm 1, \quad \pmod 7, \\ x &\equiv 0, \quad \pm 4, \quad \pm 5 \quad \pmod{11}, \\ x &\equiv \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 6 \quad \pmod{13}; \end{aligned}$$

es bleiben schließlich für x nur noch die Zahlen

$$10, \ 23, \ 47, \ 65.$$

Wir berechnen daraus die folgende kleine Tabelle:

x	x^2	$m - x^2$
10	100	19 009
23	529	18 580
47	2209	16 900
65	4225	14 884

und nun sind in der letzten Kolonne dieser Tafel die Zahlen aufzusuchen, die Quadrate sind. Dabei fällt auf den ersten Blick noch 18 580 weg, das durch 5 aber nicht durch 25 teilbar ist und daher kein Quadrat sein kann. Unter den übrigen drei sind die Quadrate enthalten:

$$16\,900 = 130^2, \quad 14\,884 = 122^2,$$

und es ergeben sich also die beiden Zerlegungen:

$$19\,109 = 47^2 + 130^2,$$
$$= 65^2 + 122^2.$$

Die Zahl 19 109 ist also keine Primzahl.

Setzen wir, um die Zerlegung zu finden, nach § 84, 12.

$$x = 65, \quad y = 122, \quad x_1 = 47, \quad y_1 = 130,$$
$$x = x_1 + 2 \cdot 9,$$
$$y_1 = y + 2 \cdot 4,$$
$$\alpha = 9, \quad \beta = 4,$$

so ergibt sich der eine Faktor:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 81 + 16 = 97$$

und dann durch Division:

$$19\,109 = 97 \cdot 197.$$

Auf demselben Wege kann man z. B. nachweisen, daß

$$2^{16} + 1 = 65\,537$$

eine Primzahl ist, da sich außer der Zerlegung $256^2 + 1^2$ keine andere ergibt.

3. Zu letzterem Resultat kann man noch auf einem anderen Wege gelangen:

Eine Zahl von der Form $2^n + 1$ ist sicher keine Primzahl, wenn n nicht eine Potenz von 2 ist. Denn ist $n = 2^\lambda m$ und m ungerade, so hat man für ein unbestimmtes x (§ 63)

$$1 - x^m = (1 - x)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1),$$

und wenn man hierin $x = -2^{2^\lambda}$ setzt, so folgt, daß $1 + 2^n$ durch $1 + 2^{2^\lambda}$ teilbar ist; letzteres ist aber kleiner als $1 + 2^n$, wenn $m > 1$ ist. Es sei also $n = 2^\lambda$ und es soll untersucht werden, ob $2^n + 1$ eine Primzahl ist oder nicht.

Um die Primzahlen p zu ermitteln, die in der Zahl $2^n + 1$ aufgehen, braucht man mit den Versuchen nicht weiter zu gehen als

bis zur größten Primzahl, die kleiner ist als $2^{\frac{1}{2}n}$. Geht nun p in $2^n + 1$ auf, so ist

$$2^n \equiv -1 \pmod{p}, \tag{4}$$

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{5}$$

Ist f der kleinste positive Exponent, für den $2^f \equiv 1$ ist, so muß jede andere Zahl h, für die $2^h \equiv 1$ ist, durch f teilbar sein. Es ist also $2n$ durch f teilbar, und folglich f eine Potenz von 2. Wegen (4) kann aber f nicht kleiner als $2n$ sein, und folglich ist $f = 2n$.

Nun ist nach dem Fermatschen Satze

$$2^{p-1} \equiv 1,$$

und folglich muß $p - 1$ durch $2n$ teilbar sein.

Wir haben also den Satz:

Jeder Primteiler der Zahl $2^n + 1$ ist in der Form $p = 2nx + 1$ enthalten, worin x eine ganze Zahl ist.

4. Für die Zahl $2^{16} + 1 = 65\,537$ hat man als Teiler nur die Primzahlen unter $2^8 = 256$ zu versuchen. Darunter gibt es aber nur die zwei 97 und 193, die von der Form $32x + 1$ sind, von denen keine in 65 537 aufgeht; $2^{16} + 1$ ist also eine Primzahl.

5. Für $2^{32} + 1$ hat man die Primzahlen der Form $64x + 1$, die unter 65 536 liegen, als Teiler zu versuchen. Die fünf ersten unter diesen Primzahlen sind

$$193,\ 257,\ 449,\ 577,\ 641,$$

und da die Division mit 641 schon aufgeht, so ist man am Ziele Auf diesem Wege hat Euler die Zerlegung

$$2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$$

gefunden und damit die Fermatsche Vermutung widerlegt, daß alle Zahlen der Form $2^{2^\lambda} + 1$ Primzahlen seien.

§ 86. Vollkommene Zahlen.

1. Wenn man die Zerlegung einer Zahl m in ihre Primfaktoren kennt, so ist es leicht, die sämtlichen Divisoren dieser Zahl anzugeben. Es seien, um dies zu zeigen, $a, b, c, \ldots$ die sämtlichen in m aufgehenden voneinander verschiedenen Primzahlen, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Exponenten der höchsten Potenzen dieser Primzahlen, die in m aufgehen, also:

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positive ganze Zahlen sind. Ein Divisor d von m kann keine anderen Primzahlen enthalten als m selbst, und keine zu einer höheren Potenz; also ist d in der Form enthalten

$$d = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots,$$

worin $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ auch Null sein können, aber nicht größer als $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Es kann also z. B. α' jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots, \alpha$ haben. Umgekehrt wird jede Zahl von dieser Form ein Teiler von m sein, wenn man die Zahl 1, für $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0, \ldots$, und die Zahl m selbst, für $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma, \ldots$, unter den Teilern mitzählt.

Die Anzahl der Werte, die α' annehmen kann, ist sonach $\alpha + 1$, die Anzahl der Werte von β' ebenso $\beta + 1$ u. s. f., und da alle diese Werte miteinander kombiniert werden können, so ist die Anzahl der Teiler von m gleich

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots,$$

also unabhängig von den Werten der Primzahlen $a, b, c, \ldots$ und nur abhängig von den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

So ist z. B. die Anzahl der Divisoren von $360 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ gleich $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$. Ebenso groß ist aber auch die Anzahl der Divisoren der Zahl $5^3 \cdot 7^2 \cdot 2 = 10\,250$.

2. Eine damit verwandte Aufgabe ist es, die Summe der Divisoren der Zahl m zu bestimmen. Wir wollen diese Aufgabe durch Rekursion lösen. Es sei also

$$m = a^{\alpha} m',$$

und $m' = b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$ der Quotient, der sich ergibt, wenn man die eine Primzahlpotenz a^{α} durch Division weghebt. Unter den Divisoren d von m kommen jedenfalls alle Divisoren d' von m' vor, außerdem aber noch die sämtlichen $ad', a^2 d', \ldots, a^{\alpha} d'$ und damit sind die Divisoren von m erschöpft. Bezeichnen wir also mit $S(m)$ die Summe der Divisoren von m, so ist hiernach

$$S(m) = (1 + a + a^2 + \cdots + a^{\alpha})\, S(m').$$

Und da nun, wie wir früher (§ 63) gesehen haben,

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{\alpha} = \frac{a^{\alpha + 1} - 1}{a - 1}$$

ist, so folgt:

$$S(m) = \frac{a^{\alpha + 1} - 1}{a - 1} S(m')$$

Wendet man dieselbe Formel auf $S(m')$ an, indem man $m' = b^\beta m''$ setzt, also

$$S(m') = \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} S(m'')$$

und fährt so fort, bis alle Primfaktoren von m erschöpft sind, so ergibt sich, da $S(1) = 1$ ist,

$$S(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdots,$$

worin rechts so viele Faktoren vorkommen, als Primzahlen $a, b, c, \ldots$ in m aufgehen. Die Brüche sind dabei natürlich nur scheinbar, da

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha$$

eine ganze Zahl ist.

So ist z. B.

$$S(360) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$$

3. Man nennt die Teiler einer Zahl m, die von der Zahl m selbst verschieden sind, echte Teiler von m. Die Summe der echten Teiler ist also gleich $S(m) - m$. Eine Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist, heißt eine vollkommene Zahl.[1]) Solche Zahlen sind z. B.

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Eine vollkommene Zahl ist also durch die Bedingung definiert $S(m) - m = m$ oder

$$S(m) = 2m. \tag{1}$$

Fragen wir zunächst nach den geraden vollkommenen Zahlen und setzen also

$$m = 2^{n-1} a,$$

worin a eine ungerade ganze Zahl und $n > 1$ sei, dann ergibt die Gleichung (1) mit Benutzung von 2.:

1) Mit den vollkommenen Zahlen (τέλειοι ἀριθμοί) hat sich das Altertum viel beschäftigt, besonders die Pythagoräer. Bei Euklid findet sich ein Satz darüber, der so ziemlich alles enthält, was wir auch jetzt noch über diese Zahlen wissen (Elemente, Buch IX, Nr. 36). Uns erscheint heute die ganze Fragestellung ziemlich willkürlich und nur von Interesse wegen der Schwierigkeit der Auffindung solcher Zahlen und wegen des Zusammenhanges, in dem sie mit gewissen großen Primzahlen stehen. Ähnlich verhält es sich mit den befreundeten Zahlen, worunter man Zahlenpaare versteht, deren jede die Summe der echten Teiler der anderen ist (z. B. 220 und 284). Über solche Zahlen hat Euler Untersuchungen angestellt (Commentationes arithmeticae, Bd. I. S. 102).

$$(2^n - 1)S(a) = 2^n a,$$

und da nun $2^n - 1$ ungerade ist, so muß $S(a)$ durch 2^n teilbar sein. Setzen wir also, indem wir unter θ eine ganze Zahl verstehen:

(2) $$S(a) = 2^n \theta,$$

so erhält man

(3) $$a = \theta(2^n - 1),$$

und daraus folgt, daß θ ein Teiler von a sein muß. Aus (2) und (3) folgt aber

$$S(a) = a + \theta.$$

Da hiernach die Summe $a + \theta$ gleich der Summe aller Teiler von a ist, und a und θ Teiler von a sind, so kann a nur zwei Teiler haben, nämlich a und θ. Da aber jede Zahl wenigstens sich selbst und die Einheit zu Teilern hat, so muß $\theta = 1$ und a eine Primzahl sein, die nach (3) die Form hat:

$$a = 2^n - 1,$$

und wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist auch umgekehrt (1) durch $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ befriedigt, also m eine vollkommene Zahl. Wir haben also den Satz:

4. Eine gerade Zahl m ist dann und nur dann eine vollkommene Zahl, wenn sie die Form hat

$$m = 2^{n-1}(2^n - 1),$$

und wenn zugleich $2^n - 1$ eine Primzahl ist.

Ungerade vollkommene Zahlen sind nicht bekannt, aber es ist auch bis jetzt nicht bewiesen, daß es keine solchen gibt.

5. Um also vollkommene Zahlen zu finden, kommt es noch weiter darauf an, die Exponenten n zu ermitteln, für die $2^n - 1$ eine Primzahl ist. Dazu ist zunächst erforderlich, daß die Zahl n selbst eine Primzahl sei. Denn wenn $n = ab$ ist, worin sowohl a als b größer als 1 sind, so besteht die Identität

$$2^{ab} - 1 = (2^b - 1)(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b})$$

(Summe der geometrischen Reihe), und da beide Faktoren auf der rechten Seite größer als 1 sind, so ist $2^{ab} - 1$ keine Primzahl.

6. Ist n eine Primzahl, so haben die Primteiler p der Zahl $2^n - 1$ die Eigenschaft

$$2^n \equiv 1 \pmod p$$

und n muß der kleinste positive Exponent sein, der dieser Bedingung genügt, da n keine kleineren Divisoren hat. Es muß also nach dem

Fermatschen Lehrsatze $p-1$ durch n, und da $p-1$ gerade ist, durch $2n$ teilbar sein. Also ist p von der Form $2nx+1$.

Aus $2^{n+1} \equiv 2 \pmod{p}$ folgt aber ferner, da $n+1$ gerade ist, daß 2 quadratischer Rest von p ist, und daß folglich $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ ist (§ 81, 9.); also muß entweder $x \equiv 0 \pmod{4}$ oder $nx \equiv -1 \pmod{4}$ sein. Ist z. B. $n = 31$, so kommen nur die Primzahlen von einer der beiden Formen

$$p = 248x + 1, \quad 248x + 63$$

in Betracht, und man hat bei der Zahl $2^{31}-1$ nur die Division von Primzahlen von einer dieser Formen, die kleiner als $\sqrt{2^{31}-1}$ oder kleiner als 46 339 sind, zu versuchen.

Das hat Euler mit einem mäßigen Aufwand von Rechnung durchgeführt, während zur Konstatierung von $2^{61}-1$ als Primzahl sehr große Rechnungen erforderlich sind.

Von den Zahlen 2^n-1 sind die folgenden als Primzahlen erkannt:

$$\begin{aligned}
2^2 - 1 &= 3,\\
2^3 - 1 &= 7,\\
2^5 - 1 &= 31,\\
2^7 - 1 &= 127,\\
2^{13} - 1 &= 8191,\\
2^{17} - 1 &= 131\,071,\\
2^{19} - 1 &= 524\,287,\\
2^{31} - 1 &= 2\,147\,483\,647,\\
2^{61} - 1 &= 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951,
\end{aligned}$$

und demnach sind neun vollkommene Zahlen bekannt. Die letzte dieser Zahlen, $2^{61}-1$, ist, wie schon früher erwähnt, die größte bis jetzt bekannte Primzahl.

Der Exponent $n = 11$ gibt keine Primzahl, denn es ist $2^{11}-1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

Fünfzehnter Abschnitt.

Kettenbrüche.

§ 87. Entwicklung von Irrationalzahlen in Kettenbrüche.

1. Wenn x eine beliebig gegebene rationale oder irrationale positive oder negative Zahl ist, so gibt es eine bestimmte größte in x enthaltene, d. h. x nicht übertreffende ganze Zahl q, die also der Bedingung genügt:

$$q \leqq x < q + 1.$$

Wenn x negativ ist, so ist auch q negativ; ist x ein positiver echter Bruch, so ist $q = 0$, und ist $x > 1$, so ist q eine positive ganze Zahl. Ist x nicht $= q$, so können wir setzen

$$x = q + \frac{1}{x_1}$$

und es ist $1/x_1 < 1$, also $x_1 > 1$. Wir verfahren nun mit x_1 ebenso wie mit x, bezeichnen mit q_1 die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl, die jetzt positiv ist, und setzen

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2},$$

worin x_2 wieder größer als 1 ist. Es kann daher auch geschrieben werden:

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}}. \tag{1}$$

Man bildet auf diese Weise den Algorithmus

$$\begin{aligned} x &= q + \frac{1}{x_1}, \\ x_1 &= q_1 + \frac{1}{x_2}, \\ x_2 &= q_2 + \frac{1}{x_3}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= q_{n-1} + \frac{1}{x_n}, \end{aligned} \tag{2}$$

und kann damit fortfahren, wenn x_n nicht eine ganze Zahl ist. Substituiert man jedes x_k in den vorangegangenen Ausdruck für x_{k-1}, so erhält man schließlich x ausgedrückt durch einen Kettenbruch, wovon der Ausdruck (1) ein Beispiel ist. Worauf es wesentlich ankommt, ist die Reihe der ganzen Zahlen $q, q_1, q_2, \ldots$, die durch die Natur der Zahl x vollständig bestimmt ist.

2. Wenn x eine rationale Zahl ist, so sind auch $x_1, x_2, \ldots$ rationale Zahlen. Setzen wir $x = a/a_1$, so wird $x_1 = a_1/a_2$, und q ist der Quotient, a_2 der Rest der Division von a durch a_1. Der Algorithmus (2) stimmt dann überein mit dem Euklidischen Algorithmus § 16. Ist aber x irrational, so sind auch alle die folgenden $x_1, x_2, \ldots$ irrational, kein x_n wird ganzzahlig, und der Algorithmus (2) kann unbegrenzt fortgesetzt werden.

Wir betrachten jetzt den Fall eines irrationalen x und nehmen überdies $x > 1$ an, wonach die Zahlen $q, q_1, q_2, \ldots$ alle positiv werden.

3. Wir bilden nun aus den $q, q_1, q_2, \ldots$ eine Zahlenreihe R_n durch die Rekursionsformel

$$R_n = R_{n-1} q_{n-1} + R_{n-2}.$$

Fangen wir mit $n = 1$ an, und nehmen R_{-1}, R_0 beliebig gegeben an, so lassen sich aus dieser Formel $R_1, R_2, R_3, \ldots$, wenn die q_n gegeben sind, eindeutig berechnen.

Wir machen zwei spezielle Annahmen über R_0, R_{-1}, und bezeichnen die Zahlen R der ersten Annahme mit

$$P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \ldots,$$

und die der zweiten mit

$$Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, \ldots.$$

Ist dann

$$(3) \qquad \begin{aligned} P_{-1} &= 0, \quad P_0 = 1, \\ Q_{-1} &= 1, \quad Q_0 = 0, \end{aligned}$$

so erhalten wir für die beiden Zahlenreihen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} P_n &= P_{n-1} q_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= Q_{n-1} q_{n-1} + Q_{n-2}, \end{aligned}$$

also z. B.

$$P_1 = q, \quad Q_1 = 1,$$
$$P_2 = q q_1 + 1, \quad Q_2 = q,$$

und man kann das allgemeine R_n aus P_n und Q_n in der Form $R_n = a P_n + b Q_n$ darstellen, worin a und b beliebige, von n unabhängige Zahlen sind. Diese Zahlenreihen P_n, Q_n sind dieselben, die wir schon im § 76 betrachtet haben, nur denken wir uns hier die beiden Reihen ohne Ende fortgesetzt.

4. Diese Zahlen P_n, Q_n stehen nun in einer sehr nahen Beziehung zu dem Algorithmus (2).

Man kommt auf sie, wenn man x durch x_n auszudrücken versucht, also die zwischenliegenden $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ eliminiert.

Man erhält so:

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}. \tag{5}$$

Diese Formel gibt $x = x_0$ für $n = 0$ und $x = q + 1/x_1$ für $n = 1$, ist also, wenn x_0 gleichbedeutend mit x ist, in diesen beiden ersten Fällen richtig. Nehmen wir sie als erwiesen an, wenn n durch $n-1$ ersetzt wird, also

$$x = \frac{P_{n-1} x_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_{n-1} + Q_{n-2}},$$

so erhält man, wenn man aus der letzten der Formeln (2) $x_{n-1} = q_{n-1} + 1/x_n$ einsetzt, durch Erweiterung des Bruches mit x_n die Relation (5), die somit allgemein bewiesen ist.

5. Multipliziert man die erste Gleichung (4) mit Q_{n-1}, die zweite mit $-P_{n-1}$ und addiert, so folgt:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}),$$

und demnach ist $(-1)^n(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})$ von n unabhängig. Da aber für $n = 0$ der Wert dieser Größe $= 1$ ist, so ist er überhaupt $= 1$ und wir erhalten die wichtige Formel:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n. \tag{6}$$

Man schließt hieraus zunächst, daß die ganzen Zahlen P_n und Q_n keinen gemeinschaftlichen Teiler haben; denn ein solcher müßte ja auch Teiler von ± 1 sein.

6. Da unter der Annahme, die wir gemacht haben, daß $x > 1$ sei, die $q, q_1, q_2, \ldots$ positive ganze Zahlen sind, so sind nach (4) auch die P_n und Q_n positive ganze Zahlen; denn diese Zahlen sind nur durch Addition und Multiplikation aus den q gebildet.

Zugleich sieht man aus (4), daß

$$P_n > P_{n-1}, \quad Q_n > Q_{n-1} \tag{7}$$

ist, daß die Zahlen P_n und Q_n also von $n = 0$ an mit n immer wachsen, und da es ganze Zahlen sind, über alle Grenzen. Ist $q = 1$, so ist $P_0 = P_1$, $Q_1 = Q_2$, und das Wachsen beginnt erst von P_1 und von Q_2 an; für alle größeren Werte von n ist aber durch die Ungleichungen (7) die Gleichheit ausgeschlossen. Das Wachsen von P_{n-1} zu P_n oder von Q_{n-1} zu Q_n wird um so stärker sein, je größer die dabei verwandte Zahl q_{n-1} ist.

§ 88. Genäherte Darstellung irrationaler Zahlen durch rationale Brüche.

1. Aus der Formel (5) und (6) § 87 folgt:

$$(1)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})},$$

$$(2)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}},$$

$$(3)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n+1}(Q_n - Q_{n-2})}{Q_n Q_{n-1} Q_{n-2}},$$

und hieraus ergeben sich folgende Schlüsse:

2. Nach (1) ist der rationale Bruch P_n/Q_n größer als x, wenn n gerade, und kleiner als x, wenn n ungerade ist.

3. Aus (3) folgt, da $Q_n - Q_{n-2}$ positiv ist, daß die Brüche

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}, \quad \frac{P_{2n+4}}{Q_{2n+4}}, \quad \ldots$$

eine absteigende, und die Brüche

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}, \quad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad \frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}, \quad \ldots$$

eine aufsteigende Zahlenreihe bilden, und nach 2. sind alle Glieder der ersten Reihe größer als x und die der zweiten kleiner als x.

4. Aus (2) ergibt sich, da Q_n über alle Grenzen wächst, daß die Differenz irgend zweier Glieder der beiden Zahlenreihen 3. unter jeden Zahlenwert heruntersinkt, und folglich ist x zugleich die untere Grenze der ersten und die obere Grenze der zweiten dieser Zahlenreihen.

Die Brüche P_n/Q_n heißen daher die Näherungsbrüche des Kettenbruches x.

5. Die Näherungsbrüche dienen dazu, eine Irrationalzahl (oder auch eine in großen Zahlen ausgedrückte rationale Zahl) durch einen rationalen Bruch mit kleinem Zähler und Nenner angenähert darzustellen. Es gilt darüber der Satz:

Wenn zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen P_{n-1}/Q_{n-1} und P_n/Q_n ein anderer rationaler Bruch M/N eingeschoben wird, der also der Zahl x noch näher kommt als einer dieser Näherungsbrüche, so ist N größer als Q_n.

Wenn nämlich M/N zwischen P_{n-1}/Q_{n-1} und P_n/Q_n liegt, so haben die beiden Differenzen

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

das nämliche Vorzeichen (das positive bei geradem n, das negative bei ungeradem n) und der absolute Wert der ersten Differenz ist größer als der der zweiten. Daher ist

$$(-1)^n\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) > (-1)^n\left(\frac{M}{N}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) > 0,$$

also auch (nach § 87, (6))

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > (-1)^n \frac{MQ_{n-1}-NP_{n-1}}{NQ_{n-1}} > 0,$$

und mithin

$$N > (-1)^n Q_n(MQ_{n-1}-NP_{n-1}),$$

und da $(-1)^n(MQ_{n-1}-NP_{n-1})$ eine positive ganze Zahl, also mindestens $=1$ ist, $N > Q_n$, w. z. b. w.

Nennen wir also einen rationalen Bruch um so einfacher, je kleiner sein Nenner ist, so ist dadurch bewiesen, daß jeder Bruch, der der Zahl x näher kommt als ein Näherungsbruch, minder einfach ist als der Näherungsbruch.

Nehmen wir beispielsweise die Zahl

$$\pi = 3{,}14159265359\ldots,$$

so erhält man durch gewöhnliche Division:

$$q=3,\quad q_1=7,\quad q_2=15,\quad q_3=1$$

und folglich die Näherungsbrüche

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{3}{1},\quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{22}{7},\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{333}{106},\quad \frac{P_3}{Q_3}=\frac{355}{113},$$

und wenn man nun diese rationalen Brüche zur Vergleichung wieder in Dezimalbrüche verwandelt:

$$\frac{22}{7}=3{,}14285\ldots,$$

$$\frac{333}{106}=3{,}141509\ldots,$$

$$\frac{355}{113}=3{,}14159292\ldots.$$ [1]

§ 89. Kettenbrüche für Quadratwurzeln.

1. Wir wollen die Kettenbruchentwicklung auf die einfachste Art der Irrationalzahlen, die Quadratwurzeln, anwenden. Wir ver-

1) Den guten Näherungswert $\frac{355}{113}$ für π hat Adriaen Anthonisz aus Metz (1517—1607), man weiß nicht genau wie, gefunden. In dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vom Juni 1905 gibt Harzer in einem Aufsatze „Über die exakten Wissenschaften im alten Japan“ die 27 ersten Näherungswerte für π und die 8 ersten für π^2, und gibt an, das bei japanischen Schriftstellern des 17. und 18. Jahrhunderts nicht nur dieser, sondern auch der 12te und 27te Näherungsbruch vorkommen.

stehen jetzt unter D eine positive ganze Zahl, von der wir nur voraussetzen wollen, daß sie keine Quadratzahl sei. Aus dieser Annahme folgt, daß jede Gleichung, die außer rationalen Zahlen nur $\sqrt{D}$ enthält, eine zweite Gleichung zur Folge hat, die man erhält, wenn man $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ verwandelt, denn jede solche Gleichung läßt sich auf die Form bringen $A + B\sqrt{D} = 0$, worin A und B rationale Zahlen sind, und wenn nicht $A = 0$ und $B = 0$ und folglich auch $A - B\sqrt{D} = 0$ wären, so würde sich für $\sqrt{D}$ eine rationale Zahl A/B ergeben, was nach § 24, 1. der Voraussetzung widerspricht.

2. Wir wenden nun den Algorithmus § 87, (2) auf $x = \sqrt{D}$ an.

Ist q die größte ganze Zahl, die in $\sqrt{D}$ enthalten ist, so ist

$$0 < \sqrt{D} - q < 1,$$

und es wird $1/x_1 = \sqrt{D} - q$, folglich

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - q} = \frac{\sqrt{D} + q}{D - q^2},$$

oder wenn wir

$$q = b_1, \quad D - b_1^2 = c_1$$

setzen:

$$x_1 = \frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1}.$$

Ist q_1 die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl, so ergibt sich aus $x_1 = q_1 + 1/x_2$:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} = \frac{c_1}{\sqrt{D} - (c_1 q_1 - b_1)} = \frac{\sqrt{D} + b_2}{c_2},$$

worin, wenn $D = b_1^2 + c_1$ gesetzt wird,

$$b_2 = c_1 q_1 - b_1,$$
$$c_2 = \frac{D - b_2^2}{c_1} = 1 - c_1 q_1^2 + 2 b_1 q_1,$$
$$D - b_2^2 = c_1 c_2$$

gefunden wird.

3. Wir wollen annehmen, es sei bis zu einem gewissen n die Formel

$$(1) \qquad x_n = \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}, \quad D - b_n^2 = c_{n-1} c_n$$

mit ganzzahligen c_{n-1}, c_n, b_n als richtig erwiesen, und wir beweisen, daß dieselbe Formel für x_{n+1} besteht. Ist q_n die größte in x_n enthaltene ganze Zahl, so folgt:

$$x_n - q_n = \frac{1}{x_{n+1}},$$

und daraus:

Setzen wir also

$$(2) \qquad c_n q_n - b_n = b_{n+1},$$

so wird

$$x_{n+1} = \frac{c_n(\sqrt{D} + b_{n+1})}{D - b_{n+1}^2}.$$

Es ist aber

$$D - b_{n+1}^2 = D - b_n^2 - c_n^2 q_n^2 + 2 b_n c_n q_n.$$

Wenn daher

$$(3) \qquad c_{n-1} + 2 b_n q_n - c_n q_n^2 = c_{n+1}$$

gesetzt wird, so folgt:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}}, \quad D - b_{n+1}^2 = c_{n+1} c_n.$$

Dadurch ist die Formel (1) allgemein erwiesen.

4. Aus den in 2. gegebenen Ausdrücken für x_1, b_1, c_1 folgt die Ungleichung

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_1}{c_1} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1},$$

denn es ist $x_1 > 1$ und $\sqrt{D} - b_1 = \sqrt{D} - q$ nach der Bedeutung von q ein positiver echter Bruch. Da c_1 eine positive ganze Zahl, also mindestens $= 1$ ist, so ist auch $(\sqrt{D} - b)/c_1$ ein positiver echter Bruch.

Wir nehmen an, es sei die Ungleichung

$$(4) \qquad 0 < \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}$$

für irgend ein n als richtig erwiesen. Wenn wir unter dieser Voraussetzung ihre Richtigkeit für $n + 1$ beweisen können, so ist damit die Allgemeingültigkeit von (4) dargetan. Es ist aber

$$\frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}} = x_{n+1} > 1,$$

also der eine Teil der Ungleichheit allgemein richtig. Ferner ist

$$\frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{D - b_{n+1}^2}{c_{n+1}(\sqrt{D} + b_{n+1})} = \frac{c_n}{\sqrt{D} + c_n q_n - b_n}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} + q_n},$$

also nach der Voraussetzung (4) positiv und kleiner als 1, da q_n mindestens gleich 1 und $(\sqrt{D} - b_n)/c_n$ positiv ist. Es ist also

und damit ist (4) allgemein bewiesen.

5. Setzen wir

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}, \quad x_n' = \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n},$$

so ist

$$x_n = q_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_n' = -q_n + \frac{1}{x'_{n+1}},$$

und von diesen Gleichungen folgt die zweite aus der ersten, wenn man $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ verwandelt, was nach 1. gestattet ist.

Da nun x_n, x_{n+1} unechte, x_n', x'_{n+1} echte Brüche sind (nach (4)), so ist q_n die größte ganze Zahl, die in x_n, und zugleich die größte ganze Zahl, die in $1/x'_{n+1}$ enthalten ist, also q_{n-1} die größte ganze Zahl, die in $1/x_n'$ enthalten ist. Bei gegebenem D sind also durch die Zahl x_n, d. h. durch b_n und c_n die ganzen Zahlen q_n und q_{n-1} und folglich auch x_{n+1} und x_{n-1} eindeutig bestimmt.

6. Aus der Ungleichung (4) folgt, daß b_n und c_n positiv sein müssen. Denn erstens müssen sie von gleichem Vorzeichen sein, da sonst $(\sqrt{D} - b_n)/c_n > (\sqrt{D} + b_n)/c_n$ wäre, und zweitens können nicht beide negativ sein, da sonst $(\sqrt{D} - b_n)/c_n$ negativ wäre. Es folgt also aus (4):

$$0 < b_n < \sqrt{D}, \quad c_n < \sqrt{D} + b_n, \quad 0 < c_n < 2\sqrt{D},$$

und hieraus ergibt sich, weil b_n und c_n ganze Zahlen sind, daß für ein gegebenes D nur eine endliche Anzahl von Zahlenpaaren b_n, c_n, und also auch nur eine endliche Anzahl von Zahlen x_n möglich sind. In der Reihe der Zahlen

(5) $$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

muß also einmal ein schon früher dagewesenes Glied wiederkehren.

Wenn nun aber $x_k = x_{k+n}$ ist, so ergibt sich aus 5., daß auch

$$x_{k-1} = x_{k+n-1}, \quad x_{k+1} = x_{k+n+1}$$

sein muß, und folglich muß in der Reihe (5) das zum erstenmal wiederkehrende Glied $x_1 = x_{n+1}$ sein. Daraus folgt weiter $x_2 = x_{n+2}$, $x_3 = x_{n+3}, \ldots$; die Reihe (5) zerfällt also in Perioden

(6) $$[x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

in denen kein Glied zweimal vorkommt, und die Reihe (5) ist aus

einer unbegrenzten Aufeinanderfolge dieser Perioden zusammengesetzt. Daraus ergibt sich weiter, daß die Reihe der Zahlen

(7) $$q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$$

ebenfalls periodisch und aus der Wiederholung der Periode

(8) $$[q_1, q_2 \ldots, q_n]$$

zusammengesetzt ist. In der Reihe (8) kann aber dieselbe Zahl q_k auch mehrmals vorkommen. Wir fassen dies so zusammen:

Der Kettenbruch, in den man die Quadratwurzel aus einer positiven ganzen Zahl entwickeln kann, ist periodisch. Die Periode beginnt aber erst mit q_1.

§ 90. Die Pellsche Gleichung.

1. Wir betrachten jetzt die Näherungsbrüche P_n/Q_n für $\sqrt{D}$. Da die P_n, Q_n mit n unaufhörlich wachsen, so können sie natürlich nicht periodisch sein.

Nach § 87, (5) haben wir die Formel

$$\sqrt{D} = \frac{P_{n+1} x_{n+1} + P_n}{Q_{n+1} x_{n+1} + Q_n},$$

und da $x_{n+1} = x_1 = 1 : (\sqrt{D} - q)$ ist (§ 89, 6.):

$$\sqrt{D} = \frac{(P_{n+1} - q P_n) + P_n \sqrt{D}}{(Q_{n+1} - q Q_n) + Q_n \sqrt{D}},$$

und daraus durch Multiplikation mit dem Nenner

$$(Q_{n+1} - q Q_n) \sqrt{D} + D Q_n = (P_{n+1} - q P_n) + P_n \sqrt{D}.$$

Diese Gleichung zerfällt nach § 89, 1. in die beiden:

$$\begin{aligned} P_n &= Q_{n+1} - q Q_n, & & \quad P_n \\ D Q_n &= P_{n+1} - q P_n, & & \quad -Q_n \end{aligned}$$

und wenn man mit den beigeschriebenen Faktoren multipliziert und addiert, und (nach § 87, (6)) $P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1} = (-1)^n$ setzt:

(1) $$P_n^2 - D Q_n^2 = (-1)^n.$$

Diese Formel bleibt richtig, wenn man n durch $2n, 3n, 4n, \ldots$ ersetzt und ergibt

$$P_{2n}^2 - D Q_{2n}^2 = 1,$$
$$P_{3n}^2 - D Q_{3n}^2 = (-1)^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

denn wir haben bei der Ableitung nur davon Gebrauch gemacht, daß

$[q_1, q_2, \ldots, q_n]$ eine Periode des Kettenbruches für $\sqrt{D}$ sei. Es bleibt also alles noch richtig, wenn wir zwei oder drei Perioden zusammenfassen und als eine neue Periode betrachten.

2. Diese Resultate enthalten die Lösung eines berühmten Problems, nämlich die Unbekannten T, U als ganze Zahlen so zu bestimmen, daß sie der Gleichung

$$(2) \qquad T^2 - DU^2 = 1$$

genügen, wenn D eine gegebene positive ganze Zahl, aber keine Quadratzahl ist.

Um sie zu lösen, hat man $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln. Hat die Periode dieses Kettenbruches eine gerade Gliederzahl n, so wird (2) gelöst durch unendlich viele Zahlen T, U, nämlich durch

$$T = P_{mn}, \quad U = Q_{mn},$$

worin m eine beliebige positive ganze Zahl sein kann. Ist aber n ungerade, so muß in diesen Formeln m gerade angenommen werden, während für ein ungerades m die Gleichung

$$(3) \qquad T^2 - DU^2 = -1$$

erfüllt wäre. Die Gleichung (2) hat also immer unendlich viele Lösungen, während die Gleichung (3) nur für den Fall, daß n ungerade ist, Lösungen hat.[1])

Die Gleichung (2) wird die Pellsche Gleichung genannt.

Die Größe der Zahlen T und U schwankt sehr unregelmäßig und steht in keinem leicht ersichtlichen Zusammenhang mit der Zahl D. Die Rechnung ist, wenigstens für die kleineren Werte von D, ziemlich einfach, wie wir gleich an einem Beispiel sehen werden.

3. Beispiel:

$$(1) \qquad \sqrt{D} = \sqrt{59}. \qquad q = 7.$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{10}, \quad q_1 = 1,$$

$$x_2 = \frac{10}{\sqrt{59} - 3} = \frac{\sqrt{59} + 3}{5}, \quad q_2 = 2,$$

$$x_3 = \frac{5}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{2}, \quad q_3 = 7,$$

$$x_4 = \frac{2}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{5}, \quad q_4 = 2,$$

1) Wenigstens solche Lösungen, die auf dem angegebenen Wege durch die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ erhalten werden können. Daß dies alle Lösungen von (2) und (3) sind, wird in der Zahlentheorie bewiesen.

$$x_5 = \frac{5}{\sqrt{59}-3} = \frac{\sqrt{59}+3}{10}, \quad q_5 = 1,$$

$$x_6 = \frac{10}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{1}, \quad q_6 = 14,$$

$$x_7 = \frac{1}{\sqrt{59}-7} = x_1.$$

Die Periode ist also sechsgliedrig:

$$[1, 2, 7, 2, 1, 14],$$

und der Periode voran geht die Zahl $q = 7$.

Daher ergibt sich nach § 87, (3), (4):

$$\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{8}{1},$$
$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{23}{3}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{169}{22}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{361}{47}, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{530}{69},$$

also $T = 530$, $U = 69$, und man bestätigt leicht die Richtigkeit der Formel:

$$530^2 - 59 \cdot 69^2 = 1.$$

Wir führen einige Beispiele mit ihren Resultaten an, ohne die Rechnung hierher zu setzen:

(2) $\sqrt{D} = \sqrt{19}$, $q = 4$, $n = 6$,
$T = 170$, $U = 39$, $T^2 - 19\,U^2 = 1$.

(3) $\sqrt{D} = \sqrt{103}$, $q = 10$, $n = 12$,
$T = 227\,528$, $U = 22\,419$, $T^2 - 103\,U^2 = 1$.

(4) $\sqrt{D} = \sqrt{38}$, $q = 6$, $n = 2$,
$T = 37$, $U = 6$, $T^2 - 38\,U^2 = 1$.

(5) $\sqrt{D} = \sqrt{29}$, $q = 5$, $n = 5$,
$T = 70$, $U = 13$, $T^2 - 29\,U^2 = -1$.

Man kann diese Beispiele ganz beliebig herausgreifen und wird, so lange etwa D im ersten Hundert bleibt, niemals zu allzu weitläufigen Rechnungen kommen.[1])

---

1) Eine Tafel der Lösungen der Pellschen Gleichung ist von Degen berechnet (Canon Pellianus, Hafniae 1817). In Legendres Zahlentheorie, Bd. 1, 3. Aufl., 1830, deutsch von Maser (1886), findet sich gleichfalls eine Tafel für alle Werte von D bis 1003. Der jetzt allgemein verbreitete Name „Pellsche Gleichung" ist unzutreffend, da sich Pell mit der Lösung dieser Gleichung nicht beschäftigt hat. Nach der Ansicht von Eneström (Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 3, Leipzig 1902, S. 204) geht der Irrtum auf eine Verwechselung der beiden englischen Mathematiker Pell und Brouncker zurück, die sich bei Euler findet.

Sechzehnter Abschnitt.

Algebraische Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen.

§ 91. Dreiteilung des Winkels.

1. Unter den geometrischen Problemen, die auf eine Gleichung dritten Grades führen, ist wohl das berühmteste die Dreiteilung des Winkels.

Um diese Gleichung zu bilden, gehen wir aus von der Moivreschen Formel (§ 51, 8.)

$$(\cos \tfrac{1}{3}\vartheta + i \sin \tfrac{1}{3}\vartheta)^3 = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

und erhalten, wenn wir nach der Entwicklung der dritten Potenz des Binoms das Reelle vom Imaginären sondern,

$$\cos \vartheta = (\cos \tfrac{1}{3}\vartheta)^3 - 3 \cos \tfrac{1}{3}\vartheta (\sin \tfrac{1}{3}\vartheta)^2,$$
$$\sin \vartheta = 3(\cos \tfrac{1}{3}\vartheta)^2 \sin \tfrac{1}{3}\vartheta - (\sin \tfrac{1}{3}\vartheta)^3.$$

Setzen wir darin

$$2 \cos \tfrac{1}{3}\vartheta = x,$$

so ergibt die erste dieser Gleichungen, wenn man

$$(\sin \tfrac{1}{3}\vartheta)^2 = 1 - (\cos \tfrac{1}{3}\vartheta)^2$$

setzt,

(1) $$x^3 - 3x = 2 \cos \vartheta,$$

und die zweite

(2) $$(x^2 - 1) \sin \tfrac{1}{3}\vartheta = \sin \vartheta.$$

Da $\cos \vartheta$ ungeändert bleibt, wenn ϑ um 2π vermehrt oder vermindert wird, so hat die Gleichung (1) außer $2 \cos \frac{1}{3}\vartheta$ noch die beiden Wurzeln $2 \cos \frac{1}{3}(\vartheta + 2\pi)$, $2 \cos \frac{1}{3}(\vartheta - 2\pi)$, wofür man $-2 \cos \frac{1}{3}(\pi - \vartheta)$, $-2 \cos \frac{1}{3}(\pi + \vartheta)$ setzen kann. Wir haben also hier drei reelle Wurzeln:

$$x_0 = 2 \cos \frac{\vartheta}{3}, \quad x_1 = -2 \cos \frac{(\pi - \vartheta)}{3}, \quad x_2 = -2 \cos \frac{(\pi + \vartheta)}{3},$$

und die Formel (2) gibt die dazu gehörigen Sinus:

$$\sin \frac{\vartheta}{3} = \frac{\sin \vartheta}{x_0^{\,2} - 1}, \quad \sin \frac{\pi - \vartheta}{3} = \frac{\sin \vartheta}{x_1^{\,2} - 1}, \quad \sin \frac{\pi + \vartheta}{3} = -\frac{\sin \vartheta}{x_2^{\,2} - 1}.$$

Man kann also, wenn $\cos \vartheta$ oder besser $\log \cos \vartheta$ gegeben ist, die drei Wurzeln der Gleichung (1) mit Hilfe der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln leicht mit der Genauigkeit numerisch berechnen, die diese Tafeln zulassen.

2. Setzen wir $f(x) = x^3 - 3x - 2 \cos \vartheta$, so ist die abgeleitete Funktion $f'(x) = 3x^2 - 3$, und es kann die Wurzel $x = \pm 1$ eine Doppelwurzel sein. Dann muß aber $\cos \vartheta = \mp 1$ sein, und es gibt noch die einfache Wurzel $x = \mp 2$. Dieser Spezialfall führt auf die Dreiteilung der ganzen Kreisperipherie oder des Halbkreises.

3. Wir wollen nun untersuchen, ob sich nicht allgemeinere Gleichungen dritten Grades auf die Form der Gleichung (1) zurückführen und also mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln lösen lassen.

Es sei also

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$$

eine gegebene kubische Gleichung. Wir können sie auf eine einfachere Form bringen, wenn wir

$$\begin{aligned} z &= y - \tfrac{1}{3}A, \\ z^2 &= y^2 - \tfrac{2}{3}Ay + \tfrac{1}{9}A^2, \\ z^3 &= y^3 - Ay^2 + \tfrac{1}{3}A^2y - \tfrac{1}{27}A^3 \end{aligned}$$

setzen, wodurch sie die Form erhält

$$(3) \qquad y^3 + ay = b,$$

wenn

$$\begin{aligned} a &= B - \tfrac{1}{3}A^2, \\ b &= -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - C \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Bezeichnen wir mit h einen unbestimmten Faktor und setzen $x = hy$, so geht (3) in

$$x^3 + ah^2x = bh^3$$

über, und diese Gleichung wird mit (1) identisch, wenn wir h so bestimmen, daß

$$ah^2 = -3, \quad bh^3 = 2 \cos \vartheta$$

wird.

Durch ein reelles h kann die erste dieser Gleichungen nur befriedigt werden, wenn a negativ ist. Dann wird

$$h = \sqrt{\frac{-3}{a}}, \quad \cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}},$$

wo das Vorzeichen der Quadratwurzel, das in unserem Belieben steht, positiv genommen sein mag. Da aber jeder Kosinus dem absoluten Werte nach kleiner als 1 ist, so kann der Winkel ϑ nur dann bestimmt werden, wenn $-27b^2/4a^3$ ein echter Bruch, also $b^2/4$ kleiner als $-a^3/27$ ist.

Wenn wir also

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$$

setzen, so muß R negativ sein, und es ergibt sich

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{27R}{a^3}}.$$

Da R bei positivem a jedenfalls positiv ist, so schließt die Voraussetzung des negativen R das negative a schon in sich, aber nicht umgekehrt.

Nehmen wir die Quadratwurzeln positiv, so sind die Werte von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ und damit ein Winkel ϑ zwischen 0 und π bestimmt, der bei positivem b zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, bei negativem b zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt.

Hat man auf diese Weise den Winkel ϑ aus der Logarithmentafel ermittelt, so findet man die drei Wurzeln von (3)

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi-\vartheta}{3},$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi+\vartheta}{3}.$$

Ist b positiv, also ϑ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gelegen, so liegen auch die drei Winkel $\frac{1}{3}\vartheta$, $\frac{1}{3}(\pi-\vartheta)$, $\frac{1}{3}(\pi+\vartheta)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und die drei Kosinus sind positiv, also y_1 positiv, y_2, y_3 negativ.

4. Als Beispiel wählen wir die kubische Gleichung

$$z^3 + z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Setzt man darin (um ein positives b zu erhalten)

$$z = -y - \tfrac{1}{3},$$

so folgt für y die Gleichung

$$y^3 - \tfrac{13}{3}y = \tfrac{65}{27},$$

also:

$$b = \frac{65}{27}, \quad a = -\frac{13}{3}, \quad \cos\vartheta = \frac{65}{2\sqrt{13^3}},$$

$$\log\cos\vartheta = 9{,}8409685 - 10, \quad \vartheta = 46^0\,6'\,7{,}7'',$$

$$\frac{\vartheta}{3} = 15^0\,22'\,2{,}5'', \quad \frac{\pi - \vartheta}{3} = 44^0\,37'\,57{,}5'', \quad \frac{\pi + \vartheta}{3} = 75^0\,22'\,2{,}5'',$$

$$\log y_1 = 0{,}3650684, \qquad y_1 = 2{,}317760,$$
$$\log(-y_2) = 0{,}2331322, \qquad -y_2 = 1{,}710536,$$
$$\log(-y_3) = 0{,}7833491 - 1, \qquad -y_3 = 0{,}607224.$$

Als Probe auf die Richtigkeit der Rechnung kann dienen, daß die Summe der Logarithmen

$$\log y_1 + \log(-y_2) + \log(-y_3) = \log y_1 y_2 y_3$$

gleich dem Logarithmus des unabhängigen Gliedes, also hier gleich $\log 65 - \log 27 = 0{,}3815496$, und daß die Summe $y_1 - y_2 - y_3$ gleich dem negativen Koeffizienten von y^2, also hier $= 0$ werden muß (§ 70, 3.).

§ 92. Die Cardanische Formel.

1. Wir haben durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen die Auflösung der Gleichung

$$(1) \qquad y^3 + ay = b$$

unter der Voraussetzung, daß

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$$

negativ ist, auf die Dreiteilung des Winkels zurückgeführt. Dazu führte die Substitution

$$(2) \qquad \cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{27\,R}{a^3}}, \quad y = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\vartheta,$$

woraus noch folgt:

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} - \sqrt{R}\right),$$
$$\cos\vartheta - i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} + \sqrt{R}\right).$$

Machen wir auf der linken Seite von der Moivreschen Formel Gebrauch, und nehmen die Kubikwurzeln, so können wir dafür auch setzen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\tfrac{1}{3}\vartheta + i\sin\tfrac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}, \\ \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\tfrac{1}{3}\vartheta - i\sin\tfrac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation dieser beiden Formeln ergibt sich:

$$(4) \qquad \frac{-a}{3} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}},$$

und durch Addition:

(5) $$y = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}.$$

Hier stellt sich die reelle Wurzel y also dar durch die Summe zweier dritten Wurzeln aus imaginären Größen, und wir werden später noch sehen, daß es auf keine Weise möglich ist, diese Wurzeln so darzustellen, daß die reelle Größe y durch reelle Radikale ausgedrückt wird. Darum wurde bei den älteren Mathematikern dieser Fall (des negativen R) der irreduzible Fall (casus irreducibilis)[1]) der kubischen Gleichung genannt.

2. Nehmen wir aber jetzt R positiv an, so hat jede der beiden Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}, \quad \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}$$

einen reellen Wert, und ihr Produkt gibt

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{4} - R} = \sqrt[3]{\frac{-a^3}{27}} = \frac{-a}{3},$$

wie die Gleichung (4) verlangt. Der Ausdruck (5) gibt einen reellen Wert y, der der Gleichung (1) auch jetzt noch genügt, wovon man sich durch eine einfache Rechnung überzeugen kann.

Der Ausdruck (5) für die Wurzel einer kubischen Gleichung heißt die Cardanische Formel.

3. Man gelangt zu diesem Resultat auch direkt, ohne den Durchgang durch die trigonometrischen Funktionen.

Man setzt

$$y = u + v$$

und behält sich vor, über eine der beiden Größen u, v noch zu verfügen. Dann ist

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u + v), \end{aligned}$$

und wenn also y eine Wurzel von (1) sein soll, so muß

$$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) = b$$

sein.

Diese Gleichung kann aber dadurch befriedigt werden, daß man

$$3uv = -a,$$
$$u^3 + v^3 = b$$

1) In dem Ausdruck „casus irreducibilis" ist das Wort „irreduzibel" in einem anderen als dem heute üblichen Sinne gebraucht (§ 68).

setzt. Es ist also die Summe und das Produkt der beiden Größen u^3, v^3 bekannt und man erhält nach § 50, 4.:

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = 2\sqrt{R},$$

also

$$u = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}},$$

wodurch wieder die Formel (5) für y hergestellt ist. Die beiden Kubikwurzeln u, v stehen in der durch $3uv = -a$ ausgedrückten Abhängigkeit voneinander.

§ 93. Die imaginären Wurzeln der kubischen Gleichung.

1. Wir haben früher gesehen, daß, wenn man eine Wurzel einer Gleichung kennt, die Bestimmung der übrigen auf die Auflösung einer Gleichung niedrigeren Grades zurückgeführt wird. Eine kubische Gleichung hat drei Wurzeln, und es müssen also, nachdem die eine reelle Wurzel $y_1 = u + v$ gefunden ist, die beiden andern, die dann von einer quadratischen Gleichung abhängen, ermittelt werden. Diese quadratische Gleichung wollen wir bilden.

2. Wenn wir die Funktion $y^3 + ay - b$ durch $y - y_1$ dividieren, so geht die Division auf, und es ergibt sich (§ 66, 3.)

$$y^3 + ay - b = (y - y_1)(y^2 + yy_1 + y_1^2 + a).$$

Die beiden noch fehlenden Wurzeln y_2, y_3 der kubischen Gleichung sind also die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 + yy_1 + y_1^2 + a = 0$$

oder

$$(y + \tfrac{1}{2}y_1)^2 = -\tfrac{3}{4}y_1^2 - a.$$

Setzt man hierin $y_1 = u + v$, $a = -3uv$, so kann man dafür wegen $(u+v)^2 - 4uv = (u-v)^2$ auch schreiben:

$$(y + \tfrac{1}{2}(u+v))^2 = -\tfrac{3}{4}(u-v)^2.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind also

$$-\tfrac{1}{2}(u+v) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v),$$

und wenn wir zur Abkürzung

(1) $$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon$$

setzen, so ergibt sich durch Quadrierung

(2) $$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2,$$

und die beiden Wurzeln y_2, y_3 der vorgelegten kubischen Gleichung sind

$$(3) \qquad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v.$$

3. Diese Wurzeln sind (bei reellen u, v, also bei positivem R) konjugiert imaginär.

Es ist, wie aus (1) und (2) hervorgeht, $\varepsilon^3 = 1$, also ε eine imaginäre dritte Wurzel aus 1. Sie genügt der quadratischen Gleichung

$$(4) \qquad 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0,$$

und die spezielle kubische Gleichung $x^3 - 1 = 0$ hat die drei Wurzeln 1, ε, ε^2.

§ 94. Die Diskriminante der kubischen Gleichung.

1. Die Bedeutung der Größe R tritt deutlich hervor, wenn man sie durch die Wurzeln der kubischen Gleichung ausdrückt. Es sei also

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v,$$

folglich, wenn man für ε, ε^2 die Werte $\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right) : 2$, also

$$1 - \varepsilon = \tfrac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 1 - \varepsilon^2 = \tfrac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3}$$

setzt:

$$y_1 - y_2 = \tfrac{3}{2}(u + v) - i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2},$$

$$y_1 - y_3 = \tfrac{3}{2}(u + v) + i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2},$$

und hieraus durch Multiplikation:

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) &= \tfrac{9}{4}(u + v)^2 + \tfrac{3}{4}(u - v)^2 \\ &= 3(u^2 + v^2 + uv).\end{aligned}$$

Multipliziert man dies noch mit $y_2 - y_3 = i\sqrt{3}\,(u - v)$, so ergibt sich

$$(y_2 - y_3)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = \sqrt{-27}\,(u^3 - v^3),$$

oder nach der Bedeutung von u^3, v^3 (§ 92, 3.)

$$= 2\sqrt{-27 R} = \sqrt{-(27 b^2 + 4 a^3)}.$$

Das Quadrat dieses Ausdruckes:

$$D = (y_2 - y_3)^2 (y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2,$$

heißt die Diskriminante der kubischen Gleichung, die sich hiernach gleich $-4 \cdot 27 R$ ergibt.

2. Die Diskriminante ist Null, wenn zwei der Wurzeln y_1, y_2, y_3 einander gleich sind, und das Verschwinden der Diskriminante oder

also $D = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Doppelwurzel der kubischen Gleichung. Es wird in diesem Falle

$$u = v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}},$$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}, \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}.$$

Wenn die Diskriminante D positiv (also R negativ) ist, so sind die drei Wurzeln reell, und wenn D negativ (also R positiv) ist, so hat die Gleichung eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln.

§ 95. Trigonometrische Auflösung kubischer Gleichungen.

1. Wir haben in § 91 gesehen, wie man die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(1) \qquad y^3 + ay = b$$

im Falle eines negativen R durch die Dreiteilung des Winkels, also mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln finden kann. Aber auch für ein positives R kann man die Tafeln zur leichteren Auflösung der kubischen Gleichung benutzen.

Wir können dabei b positiv annehmen, denn die Gleichung (1) hat für ein negatives b die entgegengesetzten Wurzeln, wie für das gleich große positive b. Dann haben wir aber zu unterscheiden, ob a positiv oder negativ ist.

2. Bei positivem a setzen wir

$$(2) \qquad \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{a^3}{27}} \operatorname{cotg} \vartheta, \quad \sqrt{R} = \sqrt{\frac{a^3}{27}} \frac{1}{\sin \vartheta},$$

und erhalten nach § 92, 3.

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg} \vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta}\right)} = \sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt[3]{\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta}},$$

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg} \vartheta - \frac{1}{\sin \vartheta}\right)} = -\sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt[3]{\frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}},$$

$$y = u + v = \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta}} - \sqrt[3]{\frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}\right),$$

oder wenn man

(3) $$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3$$

setzt,

(4) $$y = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\operatorname{cotg}\varphi.$$

Nach (2), (3), (4) aber findet man y aus den Tafeln.

3. Bei negativem a setze man

(5) $$\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-a^3}{27}}\frac{1}{\sin\vartheta}, \quad \sqrt{R} = \sqrt{\frac{-a^3}{27}}\operatorname{cotg}\vartheta,$$

$$y = \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}} + \sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\right),$$

(6) $$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3,$$

(7) $$y = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\frac{1}{\sin\varphi}.$$

Als Beispiel nehme man etwa

$$y^3 - 2y = 2,$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{8}{27}},$$

und erhält mit einer siebenstelligen Tafel $y = 1{,}769292$, worin nur die letzte Stelle etwas unsicher ist.[1])

§ 96. Auflösung der Gleichung vierten Grades.

1. Die Auflösung der Gleichung vierten Grades oder, wie wir auch sagen, der biquadratischen Gleichung läßt sich auf die einer Gleichung dritten Grades zurückführen. Man kann dabei, nach einem Verfahren von Euler, in ganz ähnlicher Weise zu Werke gehen, wie man bei der Auflösung der kubischen Gleichung verfährt.[2])

Ähnlich wie die Gleichung dritten Grades läßt sich die allgemeine Gleichung vierten Grades

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

1) Ein reiches Material zu Übungsbeispielen gibt E. Lampe in der Wissenschaftlichen Beilage zum Programm der Luisenstädtischen Oberrealschule zu Berlin, Ostern 1885, „Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade“ (Gaertners Verlagsbuchhandlung).

2) Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra. Zweiter Teil, erster Abschnitt, Nr. 15.

durch die Substitution

$$y = x - \tfrac{1}{4}A$$

auf die einfachere Form

(1) $$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

bringen, in der das Glied mit der dritten Potenz der Unbekannten fehlt, und die Koeffizienten a, b, c sind leicht zu bildende Verbindungen der Koeffizienten A, B, C, D.

Man zerlegt nun x in drei Teile

$$2x = u + v + w$$

und bildet

$$4x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu),$$
$$16x^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + vw + wu)$$
$$+ 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw(u + v + w),$$

und wenn man dies in (1) einsetzt, so folgt:

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(uv + vw + wu)(u^2 + v^2 + w^2 + 2a)$$
$$+ 4a(u^2 + v^2 + w^2) + 8(uvw + b)(u + v + w)$$
$$+ 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 16c = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man

(2) $$u^2 + v^2 + w^2 = -2a,$$

(3) $$uvw = -b$$

setzt. Sie wird dann

$$4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 4a(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 16c = 0,$$

und diese ergibt nach (2):

(4) $$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = a^2 - 4c.$$

Bedeutet nun z eine unbestimmte Größe, so folgt aus (2), (3), (4)

$$(z - u^2)(z - v^2)(z - w^2) = z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2,$$

und es sind daher u^2, v^2, w^2 die Wurzeln der kubischen Gleichung:

(5) $$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0$$

(§ 70, 1.); bezeichnet man also die Wurzeln dieser Gleichung mit z_1, z_2, z_3, so wird

(6) $$u = \sqrt{z_1}, \quad v = \sqrt{z_2}, \quad w = \sqrt{z_3}.$$

Die Vorzeichen dieser drei Quadratwurzeln sind nicht alle drei willkürlich, sondern nach (3) ist eins von ihnen durch die beiden anderen bestimmt. Man erhält so die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -b$ ist, in der Form:

$$
\begin{aligned}
2x_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\
2x_2 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
2x_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
2x_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung dritten Grades (5) heißt die kubische Resolvente der gegebenen Gleichung vierten Grades. Da $z_1 z_2 z_3 = b^2$ positiv ist, so sind folgende drei Fälle möglich:

1) z_1, z_2, z_3 sind reell und positiv; dann hat die biquadratische Gleichung vier reelle Wurzeln.

2) Zwei der Wurzeln von (5), etwa z_2, z_3, sind negativ, die dritte z_1 ist positiv. In diesem Falle sind alle vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 imaginär, und zwar ist x_1 konjugiert mit x_2, x_3 konjugiert mit x_4.

3) Die kubische Gleichung (5) hat zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, etwa z_2, z_3. Da das Produkt $z_2 z_3$ dann positiv ist, so ist auch z_1 positiv. Die Quadratwurzeln bestimmen wir so, daß $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ konjugiert imaginär sind.

Dann werden x_1 und x_2 reell, x_3 und x_4 konjugiert imaginär.

§ 97. Die Diskriminante der biquadratischen Gleichung.

1. Welcher der drei Fälle 1), 2), 3) stattfindet, läßt sich aus den Koeffizienten der gegebenen Gleichung (1) erkennen, ehe man die Gleichung wirklich aufgelöst hat.

Zu diesem Zweck bildet man zunächst die Differenzen

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, & x_3 - x_4 &= \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
x_1 - x_3 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_3}, & x_2 - x_4 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_3}, \\
x_1 - x_4 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}, & x_2 - x_3 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2},
\end{aligned}
$$

woraus sich durch Multiplikation ergibt

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4)(x_2 - x_4)(x_2 - x_3) \\
& = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_1 - z_2).
\end{aligned}
$$

Das Quadrat dieser Größe heißt die Diskriminante der biquadratischen Gleichung. Es ist eine symmetrische Funktion der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 und folglich nach § 70 rational durch die Koeffizienten a, b, c darstellbar.

Das Verschwinden der Diskriminante ist die notwendige

und hinreichende Bedingung, daß die biquadratische Gleichung eine Doppelwurzel hat.

2. Die Formel (1) enthält den Satz, daß die Diskriminante der biquadratischen Gleichung gleich der Diskriminante ihrer kubischen Resolvente ist. Um aber die Diskriminante der kubischen Resolvente nach § 94 zu bilden, müssen wir diese zunächst durch die Substitution

$$z = y - \frac{2a}{3}$$

von der zweiten Potenz der Unbekannten befreien. Man erhält dann, wenn man wie in § 91, 3. rechnet, für y die kubische Gleichung

$$y^3 + Ay + B = 0,$$

worin

$$A = -\frac{a^2}{3} - 4c,$$

$$B = -\frac{2a^3}{27} + \frac{8ac}{3} - b^2,$$

und die Diskriminante

$$D = -27B^2 - 4A^3$$

ist wieder gleich der Diskriminante der biquadratischen Gleichung; und wenn man dies ausrechnet, so ergibt sich

$$D = 16a^4c - 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144acb^2 + 256c^3 - 27b^4.$$

3. Um nun die Entscheidung zwischen den drei Fällen 1), 2), 3) zu treffen, bemerken wir, daß der Fall 3), in dem die biquadratische Gleichung zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat, nach § 94 und § 96, 3) schon durch das negative Vorzeichen von D hinlänglich gekennzeichnet ist.

Es ist also nur noch für den Fall eines positiven D zwischen den zwei Fällen 1), 2), d. h. zwischen den beiden Fällen von vier reellen und vier imaginären Wurzeln zu unterscheiden. Im ersten Fall hat die kubische Resolvente drei positive, im zweiten eine positive und zwei negative Wurzeln.

Nun ergibt sich aber aus der Resolvente § 96, (5) nach den Sätzen § 70:

$$-2a = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$a^2 - 4c = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3,$$

und wenn also die drei Größen z_1, z_2, z_3 positiv sind, so muß

(2) $$a < 0, \quad a^2 - 4c > 0$$

sein, und wir wollen jetzt nachweisen, daß diese Bedingungen in Ver-

bindung mit $D > 0$ auch hinreichend sind für den Fall von vier reellen Wurzeln.

4. Wenn $D > 0$ ist, so bleibt, da das Produkt der drei Wurzeln gleich b^2, also positiv ist, außer dem eben erwähnten nur noch der Fall übrig, daß von den drei Wurzeln z_1, z_2, z_3 zwei negativ sind. Sei also $z_2 = -\xi_2$, $z_3 = -\xi_3$ und ξ_2, ξ_3 positiv.

Ist nun $a < 0$, so ist

$$z_1 > \xi_2 + \xi_3,$$

$$z_1(\xi_2 + \xi_3) > (\xi_2 + \xi_3)^2,$$

$$z_1(\xi_2 + \xi_3) - \xi_2\xi_3 > \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 + \xi_2\xi_3 > 0,$$

und folglich

$$z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3 < 0, \quad a^2 - 4c < 0.$$

Es ist also in diesem Falle entweder $a \gtreqless 0$ oder $a^2 - 4c < 0$, also die Bedingungen (2) nicht erfüllt, die sonach für den ersten Fall charakteristisch sind. Wenn b und mithin eine der Wurzeln z_1, z_2, z_3 gleich 0 ist, so ändert sich nichts in diesen Schlüssen.

5. Wenn D verschwindet, so sind zwei der Größen z_1, z_2, z_3 einander gleich. Es sei also $z_2 = z_3$ und zunächst von Null verschieden. Dann ist z_1 jedenfalls positiv (oder nicht negativ), da $z_1 z_2 z_3 = b^2$ nicht negativ sein kann. Es wird dann

$$2x_1 = \sqrt{z_1} + 2\sqrt{z_2}, \quad 2x_2 = \sqrt{z_1} - 2\sqrt{z_2},$$

$$2x_3 = 2x_4 = -\sqrt{z_1}.$$

Es ist also die Doppelwurzel der biquadratischen Gleichung reell, und x_1, x_2 sind reell oder konjugiert imaginär, je nachdem z_2 positiv oder negativ ist. Es ergeben sich als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Realität der Wurzeln genau die Ungleichungen (2).

6. Hierin ist als Spezialfall der enthalten, daß $z_1 = z_2 = z_3 > 0$ ist. Dann wird

$$x_1 = \tfrac{3}{2}\sqrt{z_1}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z_1},$$

und die biquadratische Gleichung hat eine dreifache Wurzel. Die Bedingung hierfür ist

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = (z - z_1)^3,$$

woraus:

$$3z_1 = -2a, \quad 3z_1{}^2 = a^2 - 4c, \quad z_1{}^3 = b^2,$$

und wenn man z_1 eliminiert:

$$a^2 + 12c = 0, \quad 8a^3 + 27b^2 = 0.$$

7. Ist aber $z_2 = z_3 = 0$, dann ergibt sich

$$x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{z_1}, \quad x_3 = x_4 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z_1},$$

und die biquadratische Gleichung hat zwei Doppelwurzeln. Diese sind reell oder konjugiert imaginär, je nachdem z_1 positiv oder negativ ist.

Die Bedingungen für diesen Fall sind:

$$b = 0, \quad a^2 - 4c = 0,$$

und z_1 wird positiv oder negativ, je nachdem a positiv oder negativ ist. Wenn endlich z_1, z_2, z_3 alle drei verschwinden, so ist

$$a = 0, \quad a^2 - 4c = 0, \quad b = 0,$$

und die biquadratische Gleichung hat eine vierfache Wurzel mit dem Wert Null.

§ 98. Die Gruppe der Gleichung vierten Grades.

1. Der tiefere Grund für die Reduktion der biquadratischen Gleichung auf eine kubische Resolvente beruht auf den Eigenschaften der Permutationsgruppe von vier Elementen (§ 56, 6.). Diese Gruppe besteht, wie wir gesehen haben, aus 24 Permutationen. Verstehen wir unter den Elementen dieser Permutationen die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 einer biquadratischen Gleichung, so können wir sagen, daß eine symmetrische Funktion eine solche ist, die bei allen diesen Permutationen ungeändert bleibt, und eine solche Funktion ist rational durch die Koeffizienten der Gleichung vierten Grades ausdrückbar, und wenn keine besonderen Relationen zwischen den Wurzeln bestehen, so sind die symmetrischen Funktionen die einzigen, die diese Eigenschaft haben. Denn wenn man umgekehrt die Koeffizienten als symmetrische Grundfunktionen

$$\begin{aligned} -a_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ -a_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\ a_4 &= x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

auffaßt, so ist klar, daß jede rationale Funktion dieser Koeffizienten zugleich eine symmetrische Funktion der x ist, und die x sind die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \tag{1}$$

Diese Gruppe von 24 Permutationen wird daher die (Galoissche) Gruppe der allgemeinen Gleichung 4ten Grades genannt.

2. Nun ist, wie wir früher allgemein bewiesen haben, in dieser Gruppe eine Gruppe von nur 12 Elementen enthalten, nämlich die Gruppe der geraden Permutationen, und es gibt Funktionen der x, die nur durch die Permutationen dieser Gruppe ungeändert bleiben. Solche Funktionen heißen alternierende Funktionen, und die Gruppe der geraden Permutationen heißt darum auch die alternierende Gruppe. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist das Differenzenprodukt

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

dessen Quadrat die Diskriminante ist. Diese Funktion ändert ihr Vorzeichen, wenn irgend eine Transposition, etwa (x_1, x_2), vorgenommen wird, und nimmt den früheren Wert wieder an, wenn zwei oder überhaupt eine gerade Zahl von Transpositionen nacheinander ausgeführt werden.

3. Jede Funktion Q der x, die durch die Permutationen der alternierenden Gruppe ungeändert bleibt, ist rational durch P und durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 ausdrückbar.

Denn wenn eine solche Funktion Q_1 durch irgend eine Transposition, etwa (x_1, x_2), in Q_2 übergeht, so geht Q_2 durch abermalige Anwendung einer Transposition wieder in Q_1 über, und die Funktion kann überhaupt keinen andern Wert erhalten als Q_1 und Q_2, weil man alle ungeraden Permutationen aus den geraden durch nachträgliche Ausführung einer Transposition erhält. Demnach ist $Q_1 + Q_2$ eine symmetrische Funktion. Die Differenz $Q_1 - Q_2$ ändert ihr Vorzeichen durch die Vertauschung (x_1, x_2) und sie verschwindet also, wenn $x_1 = x_2$ ist. Es ist daher $Q_1 - Q_2$, als ganze Funktion von x_1 aufgefaßt, durch $x_1 - x_2$ teilbar, und ebenso auch durch die übrigen Differenzen $x_1 - x_3, x_1 - x_4, \ldots$, also auch durch das Produkt P. Der Quotient $(Q_1 - Q_2)/P$ ist aber wieder eine symmetrische Funktion.

Setzt man also

$$P = \sqrt{D}, \quad Q_1 + Q_2 = 2A, \quad Q_1 - Q_2 = 2B\sqrt{D},$$

so ist D die Diskriminante, und A, B sind andere ganze rationale Funktionen der Koeffizienten. Folglich ist

$$Q_1 = A + B\sqrt{D}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

4. In der Gruppe der 24 Permutationen ist eine Gruppe von 8 Permutationen enthalten, die wir mit G_1 bezeichnen wollen (§ 56, 6.):

$$G_1 = (1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3),$$
$$(1, 2), (3, 4), (1, 4, 2, 3), (1, 3, 2, 4).$$

Setzt man diese Permutationen zusammen mit zwei nicht zu ihnen gehörigen, z. B. mit

$$(1, 4), (1, 3),$$

die man bei der Komposition an zweite Stelle setzt, so entstehen zwei neue Systeme G_2, G_3, die mit G_1 zusammen die ganze Gruppe von 24 Permutationen ausmachen, nämlich (§ 56, 4.)

$$G_2 = (1,4), (1,2,4,3), (1,3,4,2), (2,3), (1,2,4), (1,4,3), (2,3,4), (1,3,2),$$
$$G_3 = (1,3), (1,2,3,4), (2,4), (1,4,3,2), (1,2,3), (1,3,4), (1,4,2), (2,4,3).$$

G_2 und G_3 sind keine Gruppen im eigentlichen Sinne des Wortes. Denn das Kompositum zweier Elemente, z. B. aus G_2, ist nicht in G_2 enthalten. Sie werden daher als Nebengruppen bezeichnet.

Eine Funktion y_1 der x, die durch die Permutationen von G_1 ungeändert bleibt, kann überhaupt durch alle Permutationen nur drei Werte y_1, y_2, y_3 annehmen, und die symmetrischen Grundfunktionen der y

$$\begin{aligned} -A_1 &= y_1 + y_2 + y_3, \\ A_2 &= y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3, \\ -A_3 &= y_1 y_2 y_3 \end{aligned}$$

sind symmetrische Funktionen der x und daher rational durch die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung darstellbar. Die y_1, y_2, y_3 sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(2) \qquad y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0.$$

Jede solche Gleichung heißt eine kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung (1).

Eine dreiwertige Funktion y_1, die durch die Permutationen von G_1 ungeändert bleibt, heißt zu der Gruppe G_1 gehörig..

5. Man kann auf mannigfache Art Funktionen bilden, die zu der Gruppe G_1 gehören, und erhält darnach verschiedene Methoden der Auflösung der biquadratischen Gleichung. Auch die Methode von Euler benutzt eine solche Funktion, nämlich

$$z_1 = \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$

die, wie man sieht, durch G_1 ungeändert bleibt und durch G_2, G_3 in die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} z_2 &= \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2, \\ z_3 &= \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 \end{aligned}$$

übergeht. Wenn man die drei Wurzeln der kubischen Resolvente kennt, so hat man, um die x zu finden, noch die Quadratwurzeln aus diesen Wurzeln zu ziehen, zwischen denen noch eine Relation $(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -b)$ besteht.

6. Eine andere, noch einfachere Funktion, die zu der Gruppe G_1 gehört, ist

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

die durch G_2 und G_3 in

$$y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4,$$
$$y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3$$

übergeht. Die Koeffizienten A_1, A_2, A_3 lassen sich hier leicht als symmetrische Funktionen berechnen. Es ist nach der im § 70 und 71 gebrauchten Bezeichnung

$$\begin{aligned} -A_1 &= \Sigma x_1 x_2 = a_2, \\ A_2 &= \Sigma x_1^2 x_2 x_3 = \Sigma x_1 \Sigma x_1 x_2 x_3 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= a_1 a_3 - 4 a_4, \\ -A_3 &= \Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 \\ &= x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_1^2 + (\Sigma x_1 x_2 x_3)^2 - 2 \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4, \end{aligned}$$

ferner

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_1 x_2 = a_2 a_4,$$
$$\Sigma x_1^2 = (\Sigma x_1)^2 - 2 \Sigma x_1 x_2 = a_1^2 - 2 a_2,$$

und folglich

$$-A_3 = a_1^2 a_4 + a_3^2 - 4 a_2 a_4,$$

und die kubische Resolvente lautet also bei dieser Annahme:

$$(3) \qquad y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4 a_4) y + 4 a_2 a_4 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0.$$

Sie vereinfacht sich ein wenig, wenn man die verkürzte Form der biquadratischen Gleichung, in der $a_1 = 0$ ist, zugrunde legt.

7. Macht man aber, um die Gleichung (3) von der zweiten Potenz der Unbekannten zu befreien, die Substitution

$$3y = t + a_2,$$

so ergibt sich durch einfache Rechnung die Resolvente für t:

$$(4) \qquad t^3 - 3At - B = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A &= a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_4, \\ B &= 27 a_1^2 a_4 + 27 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten A, B heißen die erste und zweite Invariante der biquadratischen Gleichung (1).

8. Hat man die Wurzeln der Resolvente (3), also y_1, y_2, y_3, so kann man die z_1, z_2, z_3 daraus ableiten, denn es ist

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)^2 = (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 4(x_1+x_2)(x_3+x_4)$$
$$= a_1^{\,2} - 4a_2 + 4y_1,$$

und man erhält also die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, wenn man hieraus und aus den beiden analogen Ausdrücken die Quadratwurzeln zieht. Von diesen drei Quadratwurzeln ist eine durch die beiden andern bestimmt, denn es ist

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$$

eine symmetrische Funktion, die man durch einfache Rechnung so in den Koeffizienten ausdrückt:

$$-a_1^{\,3} + 4a_1a_2 - 8a_3.$$

9. Eine Funktion u_1, die durch die Vierergruppe

$$(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)$$

ungeändert bleibt, kann sechs verschiedene Werte annehmen. Beschränkt man sich aber auf die geraden Permutationen, so erhält man nur drei Werte u_1, u_2, u_3 und die symmetrischen Funktionen dieser drei Werte

$$-B_1 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$B_2 = u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3,$$
$$-B_3 = u_1u_2u_3,$$

bleiben durch die alternierende Gruppe ungeändert und sind also durch die Quadratwurzel $\sqrt{D}$ und die Koeffizienten ausdrückbar. Man erhält so eine neue Art kubischer Resolventen. Die einfachste Annahme, die wir machen können, ist

$$u_1 = (x_1-x_2)(x_3-x_4),$$
$$u_2 = (x_1-x_3)(x_4-x_2),$$
$$u_3 = (x_1-x_4)(x_2-x_3).$$

Durch Addition und Multiplikation ergibt sich

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$
$$u_1u_2u_3 = -\sqrt{D},$$

also $B_1 = 0$ und $B_3 = \sqrt{D}$. Etwas weitläufiger ist die Bildung von B_2. Es ergibt sich aber durch Ausmultiplizieren

$$-(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) = \Sigma x_1^{\,2}x_2^{\,2} - \Sigma x_1^{\,2}x_2x_3 + 6x_1x_2x_3x_4$$
$$= (\Sigma x_1x_2)^2 - 3\Sigma x_1^{\,2}x_2x_3,$$
$$\Sigma x_1^{\,2}x_2x_3 = \Sigma x_1 \Sigma x_1x_2x_3 - 4x_1x_2x_3x_4,$$

und daraus

$$-B_2 = a_2^{\,2} - 3a_1a_3 + 12a_4 = A,$$

worin A dieselbe Bedeutung wie in 7. hat. Wir haben also die kubische Resolvente

$$u^3 - Au + \sqrt{D} = 0. \tag{5}$$

Hat man u_1, u_2, u_3, so kann man daraus die y_1, y_2, y_3 finden, denn es ist

$$\begin{aligned} u_2 - u_3 &= x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_2 x_4 - 2x_1 x_2 - 2x_3 x_4 \\ &= a_2 - 3y_1, \end{aligned}$$

und aus den y erhält man die x wie oben durch Quadratwurzeln.

§ 99. Zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

1. Auf eine Gleichung vierten Grades führt auch die Aufgabe, zwei Unbekannte aus zwei Gleichungen zweiten Grades zu bestimmen. Eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten x, y hat die Form

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0. \tag{1}$$

Wenn man eine der beiden Unbekannten, etwa x, willkürlich annimmt, so erhält man die andere auf zwei Arten durch Auflösung einer quadratischen Gleichung

$$by^2 + 2y(c'x + a') + ax^2 + 2b'x + c = 0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind, wenn b von Null verschieden ist:

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{(c'x + a')^2 - b(ax^2 + 2b'x + c)}$$

oder

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

wenn zur Abkürzung

$$A = c'^2 - ab, \quad B = a'c' - bb', \quad C = a'^2 - bc$$

gesetzt wird.

Der Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen kann ein vollständiges Quadrat einer linearen Funktion $\alpha x + \beta$ sein, und dann zerfällt die quadratische Funktion $f(x, y)$ in zwei lineare Funktionen

$$by + c'x + a' \pm (\alpha x + \beta).$$

Es findet dies statt, wenn

$$\alpha^2 = A, \quad \alpha\beta = B, \quad \beta^2 = C,$$

also

$$AC - B^2 = 0$$

ist, und dann ergibt sich

$$\alpha = \sqrt{A}, \quad \beta = B : \sqrt{A} = \sqrt{C}.$$

Die Bedingung für das Zerfallen der quadratischen Funktion in zwei lineare Funktionen ist also

$$(c'^2 - ab)(a'^2 - bc) - (a'c' - bb')^2 = 0,$$

und wenn man dies entwickelt und den Faktor b weghebt:

$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = 0, \tag{2}$$

was man auch in Form einer Determinante darstellen kann (§ 44):

$$\begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung heißt die Determinante der Funktion $f(x, y)$.

2. Wir haben hier angenommen, daß b von Null verschieden sei. Ist $b = 0$, aber a von Null zerschieden, so löst man die Gleichung (1) nach x statt nach y auf und gelangt zu demselben Resultat. Sind aber a und b beide gleich Null, so ist c' von Null verschieden, wenn die Gleichung (1) nicht linear ist. Wenn dann die Funktion

$$c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy$$

in zwei lineare Faktoren zerfallen soll, so muß sie die Form haben:

$$2c'(x + m)(y + n),$$

und es ergibt sich

$$c'n = b', \quad c'm = a', \quad 2c'mn = c,$$

woraus man, da c' nicht Null ist, die Relation erhält

$$2a'b' - cc' = 0.$$

Diese Gleichung geht aber aus (2) hervor, wenn $a = b = 0$ gesetzt wird.

Wenn endlich a, b und c' gleich Null sind, so ist die Relation (2) gleichfalls erfüllt.

Dies ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktion $f(x, y)$ entweder linear sei oder in zwei lineare Faktoren zerfalle.

3. Es seien jetzt zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten gegeben:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0,$$
$$\varphi(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma + 2\alpha'y + 2\beta'x + 2\gamma'xy = 0,$$

aus denen die Werte der Unbekannten bestimmt werden sollen.

In dem besonderen Fall, wo f und φ in je zwei Faktoren ersten Grades zerfallen:

$$f = f_1 f_2, \quad \varphi = \varphi_1 \varphi_2,$$

erhält man vier Lösungen aus je zwei linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &1) \quad f_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \\ &2) \quad f_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \\ &3) \quad f_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \\ &4) \quad f_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Auf diesen besonderen Fall aber können wir den allgemeinen Fall durch Lösung einer kubischen Gleichung zurückführen.

Wenn wir nämlich unter λ einen beliebigen Koeffizienten verstehen und

$$F = f + \lambda \varphi$$

setzen, so verschwindet die Funktion zweiten Grades F für alle Wertsysteme x, y, die f und φ zugleich zu Null machen.

Nun können wir aber λ auf drei Arten so bestimmen, daß F in zwei lineare Faktoren zerfällt. Wir erhalten hierfür nämlich eine in λ kubische Gleichung, wenn wir nach (3) die Determinante der Funktion F gleich Null setzen:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a + \lambda\alpha, & c' + \lambda\gamma', & b' + \lambda\beta' \\ c' + \lambda\gamma', & b + \lambda\beta, & a' + \lambda\alpha' \\ b' + \lambda\beta', & a' + \lambda\alpha', & c + \lambda\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene Wurzeln dieser kubischen Gleichung, so erhält man zwei Funktionen

$$F_1 = f + \lambda_1 \varphi, \quad F_2 = f + \lambda_2 \varphi,$$

die in je zwei lineare Faktoren zerfallen.

Auf diese Weise gelangt man also direkt zu der kubischen Resolvente, ohne erst die Gleichung vierten Grades, die sich durch Elimination der y aus $f = 0$ und $\varphi = 0$ bilden läßt, berechnet zu haben.

4. Man kann auf unendlich viele Arten eine Gleichung vierten Grades mit einer Unbekannten durch zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten ersetzen, und damit die eben besprochene Methode auf die Gleichung vierten Grades anwenden. Am einfachsten ist wohl der folgende Weg.

Ist die gegebene Gleichung vierten Grades:

$$(5) \qquad x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

so setze man

$$(6) \qquad xy - 1 = 0$$

und erhält durch Multiplikation von (5) mit y^2:

(7) $$x^2 + a_1 x + a_2 + a_3 y + a_4 y^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich für λ die kubische Resolvente

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}\lambda, & \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{2}\lambda, & a_4, & \frac{1}{2}a_3 \\ \frac{1}{2}a_1, & \frac{1}{2}a_3, & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung lautet entwickelt:

$$\lambda^3 - \lambda^2 a_2 + \lambda(a_1 a_3 - 4a_4) + 4a_2 a_4 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0,$$

und stimmt also überein mit der in § 98, 6. gefundenen Resolvente für y.

5. Diese Resultate erhalten eine anschauliche Bedeutung, wenn man sich der Darstellung durch die analytische Geometrie bedient. Sind x, y rechtwinklige Koordinaten, so bedeutet eine Gleichung zweiten Grades $f(x, y) = 0$ einen Kegelschnitt. Zwei Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ schneiden sich in vier Punkten. Durch vier Punkte 1, 2, 3, 4 kann man aber auf drei Arten zwei gerade Linien legen, nämlich $\overline{12}$, $\overline{34}$; $\overline{13}$, $\overline{24}$; $\overline{14}$, $\overline{23}$, und wenn man diese Linienpaare hat, so findet man die Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 aus linearen Gleichungen.

Jeder Kegelschnitt, dessen Gleichung die Form $f + \lambda\varphi = 0$ hat, geht durch die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $f = 0$, $\varphi = 0$, und die Gesamtheit dieser Kegelschnitte, wenn λ jeden beliebigen Wert erhält, heißt ein Kegelschnittbüschel. In einem solchen Büschel sind drei besondere Kegelschnitte enthalten, die in zwei gerade Linien zerfallen, und die zugehörigen Werte von λ erhält man als Wurzeln der kubischen Gleichung (4). Näheres hierüber enthält der Abschnitt über analytische Geometrie.

Siebzehnter Abschnitt.

Genäherte Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen.

§ 100. Die Cartesische Zeichenregel.

1. Für den praktischen Rechner ist die Frage nach der algebraischen Auflösung einer Gleichung von geringerer Bedeutung. Ihm kommt es darauf an, die Wurzeln einer Gleichung, deren Koeffizienten numerisch gegeben sind, auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen zu berechnen, d. h. zwei rationale Zahlen anzugeben, deren Unterschied eine gegebene Größe nicht überschreitet, zwischen denen eine Wurzel liegt. Diese Aufgabe aber läßt sich immer lösen, und es gibt dafür so einfache und wirksame Methoden, daß man ihre Anwendung selbst bei Gleichungen 3ten oder 4ten Grades der Berechnung der algebraischen Ausdrücke, wie sie z. B. die Cardanische Formel gibt, oft vorziehen wird.

2. Wenn die Koeffizienten der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ rationale Zahlen sind, so wird man zunächst nach § 68, 1. untersuchen, ob vielleicht rationale Wurzeln vorhanden sind; ist a eine solche, so bildet man durch Division $f(x)/(x - a)$ und hat es dann nur noch mit einer Gleichung niedrigeren Grades zu tun. Ja man wird eventuell erst versuchen, die Funktion $f(x)$ in Faktoren niedrigeren Grades zu zerlegen, um die Berechnung der Wurzeln so einfach als möglich zu machen.

3. Sind α und β zwei Zahlen von der Art, daß $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ verschiedene Vorzeichen haben, so ist man sicher, daß zwischen α und β wenigstens eine Wurzel liegt; denn, wenn x in $f(x)$ die Zahlenreihe von α bis β durchläuft, so geht $f(x)$ von negativen zu positiven Werten und muß also dabei durch Null hindurchgehen (§ 72, 5.). Es könnte auch $f(x)$ drei oder fünf, überhaupt eine ungerade Anzahl von Durchgängen durch Null haben; dann liegen drei oder fünf Wurzeln zwischen α und β. Es ist dabei zu beachten, daß

ein Wert von x, für den $f(x) = 0$ wird, ohne bei dem Durchgang von x durch diesen Wert das Zeichen zu wechseln, zweimal oder mit einer geraden Anzahl von Malen zu zählen ist.

4. Zunächst aber ist die Frage, wie viele Wurzeln überhaupt vorhanden sind, oder wie viele reelle, oder wie viele positive Wurzeln. Ehe alle diese Fragen durch den Sturmschen Lehrsatz endgültig beantwortet werden konnten, sind verschiedene Sätze darüber aufgestellt worden, die zwar keine ganz präzise und allgemeine Antwort geben, aber doch bei ihrer Einfachheit in vielen Fällen mit Nutzen angewandt werden. Der bekannteste und einfachste dieser Sätze ist die Cartesische Zeichenregel. In der Formulierung und dem Beweis des Satzes folgen wir der Darstellung von Gauß.[1])

5. Es sei X ein Polynom vom m^{ten} Grade, in dem wir den Koeffizienten von x^m gleich 1 annehmen, und worin das von x unabhängige Glied nicht fehlen soll, so daß $x = 0$ nicht unter den Wurzeln von X enthalten ist. Ordnen wir X nach absteigenden Potenzen von x, so kommt zuerst ein positiver Koeffizient $+1$, und es kommt darauf an, zu zählen, wie oft ein Wechsel in den Vorzeichen der Koeffizienten eintritt, wenn man vom ersten zum letzten Gliede von X fortschreitet. Potenzen von x, die darin fehlen, werden ausgelassen, nicht etwa mit dem Koeffizienten Null in Ansatz gebracht.

Nach diesen Festsetzungen sei $-Nx^n$ das erste negative Glied, dem das Glied $+N'x^{n'}$ vorausgehe; ferner $+Px^p$ das zunächst hierauf folgende positive Glied mit vorausgehendem $-P'x^{p'}$ u. s. f., endlich $\pm Sx^s$ das Glied, bei dem zum letztenmal das Zeichen gewechselt hat, dem also $\mp S'x^{s'}$ vorausgeht. Das Zeichen $\pm$ bleibt dann bis zu Ende, d. h. bis zu dem von x unabhängigen Glied $\pm T$.

Wir setzen also X in die Form

$$(1) \qquad \begin{aligned} X = \quad & x^m + \cdots + N'x^{n'}, \\ & - Nx^n - \cdots - P'x^{p'}, \\ & + Px^p + \cdots \quad \cdots . \\ & \cdots \quad \cdots \pm S'x^{s'}, \\ & \pm Sx^s \pm \cdots \pm T. \end{aligned}$$

Die erste Zeile enthält hier positive, die zweite negative, die dritte

1) Der Satz findet sich andeutungsweise schon bei Cardanus, deutlich ausgesprochen in der „Géométrie“ von Descartes (1637). In dem „Treatise of Algebra“ von John Wallis (1685) wird die erste Entdeckung des Satzes Thomas Harriot (lebte 1560—1621 in Oxford) zugeschrieben, nach Cantors Urteil mit Unrecht (Geschichte der Mathematik Bd. III, S. 4). Gleichwohl wird der Satz auch heute noch bisweilen der Harriotsche genannt. Vgl. Gauß, „Beweis eines algebraischen Lehrsatzes“, Werke Bd. III, S. 67.

wieder positive Glieder u. s. f., und die Anzahl der Zeilen in (1) ist also um eins größer als die Anzahl der Zeichenwechsel in X, die wir mit w bezeichnen.

6. Wir bilden nach (1) das Produkt

$$X_1 = X(x - \alpha), \tag{2}$$

worin α eine beliebige positive Größe ist, und erhalten einen Ausdruck vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade, den wir so darstellen:

$$\begin{aligned} X_1 = \quad & x^{m+1} \quad + \cdots \\ & - N_1 x^{n+1} - \cdots \\ & + P_1 x^{p+1} + \cdots \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \pm S_1 x^{s+1} \pm \cdots \\ & \mp T_1 . \end{aligned} \tag{3}$$

Wenn n' größer als $n+1$ ist, so ist hier $N_1 = N$, und wenn $n' = n+1$ ist, $N_1 = N + \alpha N'$, und folglich ist N_1 positiv. Aus demselben Grunde sind $P_1, \ldots, S_1, T_1 = \alpha T$ positiv.

Wie die Zeichen in den einzelnen Zeilen von (3) wechseln, ist unbestimmt. Jedenfalls aber findet bei Übergang von x^{m+1} zu $-N_1 x^{n+1}$ ein oder mehrere, jedenfalls eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln statt.

Das Gleiche gilt bei Übergang von $-N_1 x^{n+1}$ zu $+P_1 x^{p+1}$ u. s. f., und zuletzt noch einmal bei Übergang von $\pm S_1 x^{s+1}$ zu $\mp T_1$.

Die Zahl w_1 der Zeichenwechsel in X_1 ist also mindestens um eins größer, allgemein um eine ungerade Zahl größer als die Zahl w der Zeichenwechsel von X, und es ist also

$$w_1 = w + 1 + g, \tag{4}$$

wenn g eine nicht negative gerade Zahl ist.

7. Wenn die Funktion X keine positive Wurzel hat, so weist sie in ihren Koeffizienten entweder keinen oder eine gerade Zahl von Zeichenwechseln auf. Denn wenn die Anzahl der Zeichenwechsel ungerade ist, so ist das letzte Glied $\pm T$ negativ, und X hat für $x = 0$ einen negativen Wert, während X für einen hinlänglich großen Wert von x das Zeichen von x^{m+1}, also das positive, hat. Es müßte also mindestens eine positive Wurzel von X vorhanden sein.

8. Es seien jetzt α, β, γ die sämtlichen positiven Wurzeln einer Funktion $f(x)$ und

$$f(x) = X(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots \tag{5}$$

Dann ist X eine ganze Funktion, die nur negative oder imaginäre Wurzeln hat, und die $=1$ zu setzen ist, wenn $f(x)$ nur positive Wurzeln hat.

Nach 6. kommt nun zu den etwa in X schon vorhandenen Zeichenwechseln durch jeden Faktor $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$ mindestens ein, immer aber eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln zu den in X etwa schon vorhandenen hinzu, und daraus folgt mit Rücksicht auf 7.:

Die Zahl der positiven Wurzeln ist so groß oder um eine gerade Zahl kleiner als die Anzahl der Zeichenwechsel in den Koeffizienten $f(x)$.

9. Jeder negativen Wurzel von $f(x)$ entspricht eine positive Wurzel von $f(-x)$ und demnach können wir den Satz so ergänzen:

Die Zahl der negativen Wurzeln von $f(x)$ ist so groß oder um eine gerade Zahl kleiner als die Anzahl der Zeichenwechsel in den Koeffizienten von $f(-x)$.

10. Wir wollen die Cartesische Zeichenregel auf die Diskussion der Gleichung 4ten Grades anwenden. Es sei also

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c,$$
$$f(-x) = x^4 + ax^2 - bx + c.$$

Die a, b, c nehmen wir von Null verschieden an. Dann haben wir nach den Vorzeichen der Glieder von $f(x)$ und $f(-x)$ acht verschiedene Fälle:

	$f(x)$				w	$f(-x)$				w
1)	+	+	+	+	0	+	+	−	+	2
2)	+	+	−	+	2	+	+	+	+	0
3)	+	−	+	+	2	+	−	−	+	2
4)	+	−	−	+	2	+	−	+	+	2
5)	+	+	+	−	1	+	+	−	−	1
6)	+	+	−	−	1	+	+	+	−	1
7)	+	−	+	−	3	+	−	−	−	1
8)	+	−	−	−	1	+	−	+	−	3

In den mit w überschriebenen Rubriken steht die Zahl der Zeichenwechsel in der davorstehenden Reihe.

Nehmen wir noch das Resultat aus § 97 hinzu, daß bei negativer Diskriminante D zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln

vorhanden sind und bei positivem D entweder vier reelle oder vier imaginäre Wurzeln, so ergibt sich nach 8. und 9. in den verschiedenen Fällen:

1) $D > 0$: 4 imaginäre,
   $D < 0$: 2 imaginäre, 2 reelle negative Wurzeln.

2) $D > 0$: 4 imaginäre,
   $D < 0$: 2 imaginäre, 2 reelle positive Wurzeln.

In 3. und 4. erhalten wir aus den Vorzeichen der Diskriminante und der Koeffizienten allein keine Entscheidung; denn in diesen Fällen kann die Anzahl der positiven sowohl als der negativen Wurzeln gleich 2 oder gleich 0 sein.

In den Fällen 5), 6) haben wir eine positive und eine negative Wurzel, also zwei imaginäre Wurzeln, und die Diskriminante muß negativ sein, wie sich an dem Ausdruck § 97, 2. auch leicht direkt erkennen läßt.

Im Falle 7) haben wir eine negative Wurzel und drei oder eine positive, je nachdem D positiv oder negativ ist, und im Falle 8) eine positive und drei oder eine negative Wurzel.

§ 101. Der Sturmsche Lehrsatz.

1. Das wissenschaftliche Fundament für jede Näherungsmethode zur Auflösung algebraischer Gleichungen bildet der Sturmsche Lehrsatz, der uns lehrt, mit Sicherheit zu ermitteln, wie viele Wurzeln einer gegebenen Funktion $f(x)$ vom n^{ten} Grade zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen. Der Satz, dessen Grundgedanke überaus einfach ist, beruht auf der Stetigkeit der ganzen Funktionen, nach der eine solche Funktion bei stetiger Veränderung von x nicht von positiven zu negativen Werten übergehen kann, ohne durch den Wert Null hindurchzugehen.

2. Wenn x_1 eine Wurzel von $f(x)$ ist, so ist $f(x)$ durch $x - x_1$ teilbar, und wenn wir

$$(1) \qquad f(x) = (x - x_1) F(x)$$

setzen, und mit $f_1(x)$ die abgeleitete Funktion von $f(x)$ bezeichnen, so ist (§ 66, 4.)

$$F(x_1) = f_1(x_1).$$

Wir nehmen an, daß $f(x)$ und $f_1(x)$ keine gemeinsame Wurzel haben, oder daß $f(x)$ zuvor von etwa vorhandenen gemeinsamen Faktoren

mit $f_1(x)$ befreit sei (§ 67). Dann ist $f_1(x_1)$ und folglich auch $F(x_1)$ von Null verschieden und kann positiv oder negativ sein. Es wird dann $F(x)$ dasselbe Zeichen haben, so lange x nahe genug bei x_1 liegt.

Aus (1) ergibt sich dann:

Ist $f_1(x_1)$ positiv, und geht x wachsend durch x_1 hindurch, so geht $f(x)$ wachsend durch 0, d. h. von negativen zu positiven Werten.

Ist aber $f_1(x_1)$ negativ, so geht $f(x)$ von positiven zu negativen Werten.

Wir können beides zusammenfassen, indem wir sagen:

Wenn x wachsend durch eine Wurzel x_1 von $f(x)$ hindurchgeht, so gehen die Funktionen

$$f(x), \quad f_1(x)$$

von verschiedenen zu gleichen Zeichen über.

3. Wir führen nun eine Kette von Divisionen aus, genau wie wenn es sich darum handelte, den größten gemeinschaftlichen Teiler der beiden Funktionen $f(x)$, $f_1(x)$ zu finden (§ 67), nur mit dem Unterschied in der Bezeichnung, daß wir die jedesmaligen Reste mit $-f_2, -f_3, \ldots$ bezeichnen. Sind dann $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ die Quotienten, so erhalten wir die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} f &= Qf_1 - f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 - f_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-2} &= Q_{m-2} f_{m-1} - f_m, \end{aligned}$$

und da die Grade der Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ immer abnehmen, so setzen wir den Algorithmus so lange fort, bis f_m von x unabhängig geworden ist. Nach der Voraussetzung, daß f und f_1 keinen gemeinsamen Teiler haben, ist f_m von Null verschieden. Es folgt aus dieser Annahme auch, daß in der Sturmschen Kette

$$(3) \qquad f, f_1, f_2, \ldots, f_m$$

für keinen Wert von x zwei benachbarte Glieder $f_\nu, f_{\nu+1}$ zugleich verschwinden können, da für einen solchen auch f und f_1 verschwinden müßten.

4. Für irgend einen Wert von x zählen wir in der Reihe (3) einen Zeichenwechsel, wenn zwei aufeinanderfolgende Glieder f_ν, $f_{\nu+1}$ verschiedene Zeichen haben, und eine Zeichenfolge, wenn sie dasselbe Zeichen haben.

Für jeden Wert von x, für den keine dieser Funktionen verschwindet, haben wir also eine bestimmte Anzahl von Zeichenwechseln. Der Sturmsche Satz hat dann folgenden Inhalt:

Sind α und β zwei Werte von x und $\alpha < \beta$, so ist die Anzahl der zwischen α und β gelegenen Wurzeln von $f(x)$ gleich der Anzahl der beim Übergang von $x = \alpha$ zu $x = \beta$ verlorenen Zeichenwechsel der Sturmschen Kette (3).

5. Der Beweis dieses Satzes ist jetzt sehr einfach: Ein Verlust oder Gewinn an Zeichenwechseln kann nur dann eintreten, wenn eine der Funktionen der Sturmschen Kette durch Null geht. Ist aber $0 < \nu < m$, und ist $f_\nu(x_0) = 0$, so ist nach (2) $f_{\nu-1}(x_0) = -f_{\nu+1}(x_0)$, und $f_{\nu-1}$ und $f_{\nu+1}$ haben also für $x = x_0$ und in der Nähe dieses Wertes entgegengesetztes Zeichen. In der Reihe der drei benachbarten Funktionen

$$f_{\nu-1}(x), \quad f_\nu(x), \quad f_{\nu+1}(x)$$

wird also vor wie nach dem Durchgang von x durch x_0 ein Zeichenwechsel gezählt, und es tritt also kein Verlust oder Gewinn von Zeichenwechseln ein.

Da f_m überhaupt nicht durch Null geht, so kann also eine Änderung in der Anzahl der Zeichenwechsel nur dann eintreten, wenn x durch eine Wurzel von $f(x)$ hindurchgeht. Daß aber dabei jedesmal ein Zeichenwechsel verloren geht, haben wir schon in 2. gezeigt, und hiermit ist der Sturmsche Satz bewiesen.

6. Die Rechnung, die für die Anwendung des Sturmschen Satzes erforderlich ist, wird durch folgende Bemerkungen in manchen Fällen vereinfacht.

Man kann bei der Bildung der aufeinanderfolgenden Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ positive Zahlenfaktoren weglassen, weil dadurch in den Vorzeichen nichts geändert wird und unsere Schlüsse ganz unverändert bleiben.

Kommt man bei der Division zu einer Funktion f_m, von der man weiß, daß sie, auch ohne konstant zu sein, zwischen den Grenzen α, β keinen Zeichenwechsel hat, so kann man die Rechnung abbrechen; denn wir haben von f_m eben nur die Eigenschaft benutzt, daß sie zwischen den Grenzen, die man untersuchen will, keinen Zeichenwechsel haben sollte.

7. Beispiel I. Wir wollen für die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x + 2$$

die Sturmsche Kette bilden. Mit Weglassung positiver Zahlenfaktoren ergibt sich

$$f_1(x) = x^2 - 2,$$
$$f_2(x) = 2x - 1,$$
$$f_3(x) = 1,$$

und es ergeben sich folgende Vorzeichen:

	$x = -3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	3
$x^3 - 6x + 2:$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2:$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x - 1:$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$+1:$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Wir haben also für $x = -3$ drei Zeichenwechsel, für $x = +3$ keinen Zeichenwechsel und folglich zwischen diesen Grenzen drei Wurzeln.

Ein Zeichenwechsel geht verloren zwischen -3 und -2. Also liegt eine Wurzel zwischen diesen Grenzen.

Zum zweiten Male geht ein Zeichenwechsel zwischen 0 und 1 und zum dritten Male zwischen 2 und 3 verloren, also haben wir in jedem dieser Intervalle eine Wurzel.

8. Beispiel II.

$$f(x) = x^3 - \tfrac{15}{11}x^2 + \tfrac{5}{11}x - \tfrac{5}{231},$$
$$f_1(x) = x^2 - \tfrac{10}{11}x + \tfrac{5}{33},$$
$$f_2(x) = x - \tfrac{3}{7},$$
$$f_3(x) = 1.$$

Für $x = 0$ haben wir die Zeichen

$$- \quad + \quad - \quad +,$$

also drei Zeichenwechsel, und für $x = 1$

$$+ \quad + \quad + \quad +,$$

folglich drei Wurzeln zwischen 0 und 1.

9. Für die Zwecke des praktischen Rechnens ist die Anwendung des Sturmschen Satzes nicht notwendig, wenn man sich auf anderem Wege davon überzeugen kann, daß nur eine Wurzel zwischen gegebenen Grenzen liegt. Dies ist z. B. gesichert, wenn man die Gesamtzahl der reellen Wurzeln kennt und ebensoviele Intervalle ermittelt hat, in deren jedem wenigstens eine Wurzel liegt.

§ 102. Regula Falsi.

1. Man veranschaulicht sich die Lage der Wurzeln einer Funktion $f(x)$ durch die Geometrie.

Man stellt die Werte der Veränderlichen x durch die Punkte einer geraden Linie dar, auf der x von einem beliebigen Anfangspunkt in einer beliebigen Längeneinheit als Abszisse gemessen wird, die Werte von $y = f(x)$ trägt man auf einer im Punkt x errichteten Senkrechten als Ordinate auf, gleichfalls in einer beliebigen, wenn man will von der ersten verschiedenen Längeneinheit, die positiven nach der einen, etwa der oberen, die negativen nach der entgegengesetzten Seite. Verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man eine krumme Linie; die Abszissen der Punkte, in denen $y = 0$ ist, also der Schnittpunkte dieser krummen Linie mit der Abszissenlinie, sind dann die Wurzeln von $f(x)$.

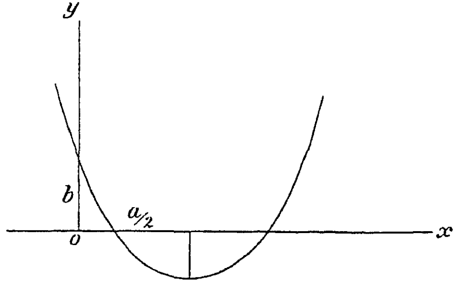


Fig 16.

Ist z. B. $f(x) = x^2 + ax + b$ vom zweiten Grade, so ist die erwähnte Kurve eine Parabel mit nach unten gekehrtem Scheitel (Fig. 16); $f(x)$ hat zwei reelle Wurzeln, wenn der Scheitel tiefer liegt als die Abszissenlinie, zwei imaginäre, wenn der Scheitel höher liegt.

Das oben betrachtete Beispiel

$$y = x^3 - 6x + 2$$

gibt ungefähr die Fig. 17.

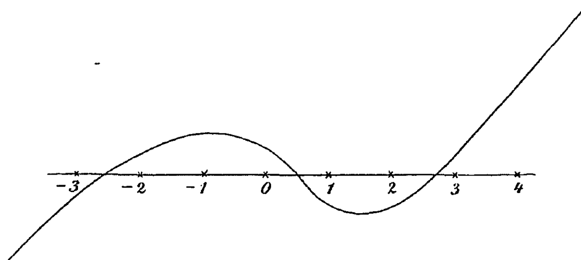


Fig. 17

2. Hat man zwei Werte α und β (etwa $\alpha < \beta$), zwischen denen eine Wurzel von $f(x)$ liegt, so sind $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ von entgegengesetzten Zeichen; sei etwa $f(\alpha) = -a$ negativ, $f(\beta) = b$ positiv.

Man kann dann α und β als erste Näherungswerte der zwischen ihnen liegenden Wurzel betrachten, deren jeder aber mit einem gewissen Fehler behaftet ist.

Sind z. B. α und β zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, so ist α die Zahl, die bei der Darstellung der Wurzel durch einen Dezimalbruch vor dem Komma steht.

Sei ξ der Fehler von α, also $x = \alpha + \xi$ die gesuchte Wurzel; dann ist $x = \beta - (\beta - \alpha - \xi) = \beta - \eta$, also der Fehler η von β gleich $\beta - \alpha - \xi$; wenn aber α zu klein ist, ist β zu groß. Man nimmt nun zunächst an, daß der Fehler von α größer ist als der Fehler von β, wenn $f(\alpha)$ mehr von der Null abweicht als $f(\beta)$, und angenähert kann man die beiden Fehler diesen Abweichungen proportional annehmen. Es kommt das darauf hinaus, daß man das zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ verlaufende Stück der Kurve, durch die $f(x)$ dargestellt ist, als gerade Linie ansieht (Fig. 18).

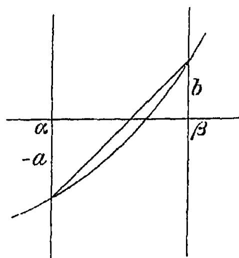


Fig. 18.

Dann ist also

$$\xi : (\beta - \alpha - \xi) = a : b,$$

$$b\xi = a(\beta - \alpha) - a\xi,$$

(1) $$\xi = \frac{a(\beta - \alpha)}{a + b},$$

also

(2) $$x = \alpha + \xi = \frac{\alpha b + \beta a}{a + b}.$$

Diese Formel ist natürlich nicht genau richtig, gibt aber einen Wert von x, der besser ist als α und als β.

Ist $\beta - \alpha = 1$, so wird

(3) $$\xi = \frac{a}{a + b},$$

ein Ausdruck, der die erste, oder nach Umständen auch mehrere der ersten Dezimalstellen nach dem Komma gibt. Die durch (1) oder (2) dargestellte Formel und darnach auch das ganze Verfahren heißt die Regula falsi.

3. Hat man einen Näherungswert α der Wurzel gefunden, so kann man diesen, wenn er schon einen gewissen Grad der Genauigkeit erreicht hat, noch durch ein anderes Verfahren korrigieren. Man setze $x = \alpha + \xi$ und ordne $f(\alpha + \xi)$, indem man auf die einzelnen Potenzen von $\alpha + \xi$ den binomischen Lehrsatz anwendet, nach Potenzen von ξ; es möge sich so ergeben:

(4) $$f(\alpha + \xi) = m_0 + m_1\xi + m_2\xi^2 + m_3\xi^3 + \cdots$$

Es soll nun ξ so bestimmt werden, daß dieser Ausdruck verschwindet. Das scheint zunächst keine Vereinfachung der Aufgabe zu ergeben, weil man für ξ eine Gleichung von ebenso hohem Grade erhält, wie die ursprüngliche war. Wenn aber α schon nahe dem wahren Werte ist, so wird ξ ein kleiner Bruch sein, und die höheren Potenzen können für die nächste Annäherung vernachlässigt werden, wenn die Koeffizienten $m_2, m_3, \ldots$ nicht besonders groß sind. Dann ergibt sich also

$$\xi = -\frac{m_0}{m_1} \tag{5}$$

als Näherung für die Korrektion von α.

Bisweilen ist es besser, auch noch das folgende Glied mit zu berücksichtigen, also ξ aus der quadratischen Gleichung

$$m_0 + m_1\xi + m_2\xi^2 = 0$$

zu bestimmen, wodurch man

$$\xi = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_0m_2}}{2m_2} \tag{6}$$

erhält; das Vorzeichen der Quadratwurzel ist in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von m_1 zu nehmen, damit ξ klein werde.

Dieses Verfahren ist von Newton angegeben, und heißt daher das Newtonsche Näherungsverfahren. Man wendet es auch dazu an, um sich eine vorläufige ungefähre Kenntnis der großen Wurzeln einer Gleichung zu verschaffen, indem man in der entwickelten Funktion $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots$ zunächst nur die beiden obersten Glieder $a_0x^n + a_1x^{n-1}$ beibehält, also x, roh angenähert, gleich $-a_1/a_0$ setzt.

4. Bei der Anwendung wird man sich nicht auf die eine dieser Methoden beschränken, sondern je nach Umständen die eine oder die andere benutzen. Das Entscheidende wird immer sein, zwei Dezimalbrüche α, α' von gleicher Stellenzahl z zu finden, die sich nur in der letzten Stelle um eine Einheit unterscheiden, für die $f(\alpha)$ und $f(\alpha')$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; dann liegt der wahre Wert der Wurzel zwischen α und α', und der Fehler ist kleiner als 10^{-z}. Will man zur Berechnung der folgenden Stelle übergehen, so hänge man an α nacheinander die Ziffern 1 bis 9 an, und nehme die beiden daraus hervorgehenden aufeinanderfolgenden Zahlen α_1, α_1', für die $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_1')$ verschiedene Vorzeichen haben. Wenn man in zweckmäßiger Weise die oben beschriebenen Methoden anwendet, so kann man die Anzahl der hierzu zu machenden Versuche sehr einschränken.

Nützlich ist bei diesen Rechnungen die Anwendung von Potenztafeln, oder, wenn die Genauigkeit ausreicht, von Logarithmentafeln.

§ 103. Anwendung auf ein Beispiel.

1. Wir wollen als Beispiel eine Gleichung 5ten Grades nehmen:

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Es ist hier

$$f(-2) = -26,\quad f(-1) = +1,\quad f(0) = -2,\quad f(1) = -5,\quad f(2) = +22,$$

und folglich haben wir eine Wurzel x_1 zwischen 1 und 2, eine Wurzel x_2 zwischen -1 und 0, und eine x_3 zwischen -2 und -1; die beiden anderen Wurzeln sind imaginär. Wir berechnen zunächst x_1.

Die Regula falsi § 102, (1) würde hier für ξ die Werte $5/27$, also etwa 0,2 ergeben, was zu klein ist, denn man sieht, daß $f(1{,}5) = (\frac{3}{2})^5 - 8 = -13/32$ noch negativ ist, daß also ξ größer als 0,5 sein muß.

Einen besseren Wert gibt uns das Newtonsche Verfahren.

Setzen wir nämlich $x = 1 + \xi$,

$$x^5 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + 5\xi + 1,$$
$$x^5 - 4x - 2 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + \xi - 5,$$

so können wir zwar nicht aus den beiden letzten Gliedern, wohl aber aus den dreien

$$10\xi^2 + \xi - 5 = 0$$

einen Näherungswert finden:

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{201}}{20},\quad \text{etwa } 0{,}6.$$

Man rechnet nun nach der folgenden Tabelle, die wohl ohne Erläuterung verständlich ist.

x	$\log x$	$5 \log x$	x^5	$4x + 2$	$f(x)$
1,5	0,1760913	0,8804565	7,593754	8	− 0,406246
1,6	0,2041200	1,0206000	10,485906	8,4	+ 2,085906
1,51	0,1789769	0,8868845	7,707015	8,04	− 0,232985
1,52	0,1818436	0,9092180	8,113682	8,08	+ 0,033682
1,518	0,1812718	0,9063590	8,060444	8,072	− 0,011546
1,519	0,1815578	0,9077890	8,087030	8,076	+ 0,011030
1,5185	0,1814148	0,9070740	8,073726	8,0740	− 0,000274
1,5186	0,1814434	0,9072170	8,076786	8,0744	+ 0,002386
1,51851	0,1814177	0,9070885	8,073996	8,074040	− 0,000034
1,51852	0,1814205	0,9071025	8,074256	8,074080	+ 0,000176
1,518511	0,1814180	0,9070900	8,074024	8,074044	− 0,000020
1,518512	0,1814183	0,9070915	8,074052	8,074048	+ 0,000004

Es ist also sehr nahe

$$x_1 = 1{,}518512.$$

Die letzte Stelle 2 ist um ein weniges zu groß. Die Wurzel liegt aber näher bei diesem Werte, als bei dem unteren Grenzwerte.

2. Es ist noch zu bemerken, daß man aus jedem Zahlenpaar die beiden letzten Dezimalstellen des nächsten Paares nach der Regula falsi durch eine einfache Rechnung, fast könnte man sagen Schätzung, erhält. Es ist dabei zu bemerken, daß in diesem Beispiel die Regula falsi immer die untere Grenze gibt, was sich leicht daraus erklärt, daß zwischen 1 und 2 die Kurve $y = f(x)$ ihre hohle Seite nach oben kehrt.

So findet man nach § 102, (3) aus 1,5 und 1,60:

$$\xi = \frac{0{,}406246}{2{,}492152} 0{,}1 = 0{,}01 \cdots.$$

Am Anfang der Rechnung genügt es, eine geringere Stellenzahl zu berücksichtigen. Wir haben die Wurzel mit der Genauigkeit berechnet, die mit einer siebenstelligen Logarithmentafel zu erreichen ist. Will man größere Genauigkeit, so muß man entweder größere Tafeln anwenden, oder, was auch durchführbar, wenn auch umständlicher ist, ohne Logarithmen rechnen, wobei sich die abgekürzte Multiplikation anwenden läßt.

3. Um die negativen Wurzeln zu berechnen, kann man $x = -y$ setzen und die positiven Wurzeln von

$$y^5 - 4y + 2 = 0$$

suchen. Man erhält so

$$x_2 = -0{,}5084994,$$
$$x_3 = -1{,}2435964.$$

4. Unsere Gleichung hat noch ein Paar konjugiert imaginäre Wurzeln. Um diese gleichfalls näherungsweise zu ermitteln, setzt man

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und erhält nach dem Moivreschen Satze:

$$x^5 - 4x - 2 = r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) - 4r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 2,$$

und wenn also die Gleichung befriedigt sein soll, so muß

$$r^5 \cos 5\varphi - 4r\cos\varphi - 2 = 0,$$
$$r^5 \sin 5\varphi - 4r\sin\varphi = 0$$

sein. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

und dann gibt die erste:

$$2r(\sin\varphi\cos 5\varphi - \cos\varphi\sin 5\varphi) = \sin 5\varphi,$$

woraus

$$(2) \qquad r = -\frac{\sin 5\varphi}{2\sin 4\varphi}.$$

Bezeichnet man mit ψ das Komplement von φ, setzt alo $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, so ergibt sich aus (1) und (2)

$$(3) \qquad r^4 = \frac{4\cos\psi}{\cos 5\psi}, \quad r = \frac{\cos 5\psi}{2\sin 4\psi}$$

und

$$x = r\sin\psi + ir\cos\psi.$$

Aus (3) erhält man, wenn man die zweite Gleichung in die 4te Potenz erhebt und dann beide Ausdrücke für r^4 einander gleichsetzt:

$$(4) \qquad (\cos 5\psi)^5 - 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0.$$

Setzt man hier $\psi = 0$, so wird die linke Seite $= 1$, also positiv. Setzt man aber $\psi = 10^0$, so wird $\cos 5\psi = \sin 4\psi$, also die linke Seite

$$(\sin 40^0)^4(\sin 40^0 - 64\cos 10^0),$$

was offenbar negativ ist. Folglich liegt eine Wurzel der Gleichung (4) zwischen $\psi = 0$ und $\psi = 10^0$.

Berechnet man etwa mit fünfstelligen Tafeln die Logarithmen der beiden Ausdrücke

$$(\cos 5\psi)^5, \quad 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4$$

für einige Gradzahlen zwischen 0 und 10, so ergibt sich, daß der Zeichenwechsel zwischen $\psi = 4^0$ und $\psi = 5^0$ stattfindet. Hierauf läßt sich die Regula falsi anwenden, durch die man ψ in der Nähe von $4^0\,40'$ findet. Nimmt man $\psi = 4^0\,30'$, $4^0\,40'$, so findet man wieder durch die Regula falsi einen Wert in der Nähe von $4^0\,38'$. Man berechnet nun

$$\psi = 4^0\,38' \qquad \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81745 - 1$$

$$\log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}81368 - 1;$$

$$\psi = 4^0\,39' \qquad \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81610 - 1$$

$$\log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}81871 - 1.$$

Der Unterschied ist also das eine Mal positiv, das andere Mal negativ, und folglich liegt ψ zwischen $4^0\,38'$ und $4^0\,39'$. Setzt man $\psi = 4^0, 38'\,30''$, so folgt:

$$\log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}8167625 - 1$$

$$\log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}8166885 - 1.$$

Die Differenz ist 0,000074, folglich ist $\psi = 4^0\,38'\,30''$ ein guter (etwas zu kleiner) Näherungswert.

Aus (3) erhält man dann

$$\log r = \log\cos 5\psi - \log\sin 4\psi - \log 2;$$

$$\begin{array}{ll}
\log\cos 5\psi & = 0{,}9633525 - 1 \\
\log\sin 5\psi & = 0{,}5029838 - 1 \\
\log 2 & = 0{,}3010300 \\
\hline
\log r & = 0{,}1593387 \\
\log\sin\psi & = 0{,}9080762 - 2 \\
\log\cos\psi & = 0{,}9985733 - 1 \\
\hline
\log\,(r\sin\psi) & = 0{,}0674149 - 1 \\
\log\,(r\cos\psi) & = 0{,}1579120,
\end{array}$$

folglich sind die beiden imaginären Wurzeln annähernd gleich

$$x = 0{,}11679 \pm i\cdot 1{,}4385,$$

und ihr absoluter Wert

$$r = 1{,}44424.$$

Als Probe der Genauigkeit der Rechnung kann dienen, daß die Summe der Wurzeln

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

sein muß. Es ergibt sich, wenn x_4 und x_5 die beiden imaginären Wurzeln sind,

$$x_1 + x_4 + x_5 = 1{,}75209,$$
$$x_2 + x_3 = -\,1{,}7520958.$$

§ 104. Entwicklung der reellen Wurzeln in Kettenbrüche.

1. Wir haben im § 87 gesehen, wie sich jede irrationale Zahl durch einen Kettenbruch darstellen läßt, und haben dies spezieller durchgeführt bei den Quadratwurzeln.

Hat man umgekehrt eine hinlängliche Zahl aufeinanderfolgender Teilnenner, so erhält man genäherte Darstellungen der irrationalen Zahl durch rationale Brüche. Diese werden sich um so mehr dem wahren Werte der Irrationalzahl annähern, je schneller die Nenner der Näherungsbrüche $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ anwachsen, und es ist daher für die Rechnung günstig, wenn unter den Teilnennern $q, q_1, q_2, \ldots$ bald eine verhältnismäßig große Zahl vorkommt.

2. Ist nun die Irrationalzahl x als Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ gegeben, so kann man diese Kettenbruchentwicklung direkt finden, und erhält also eine weitere Näherungsmethode zur numerischen Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung.[1])

Wir nehmen an, es sei, nötigenfalls nach dem Sturmschen Satze, eine positive ganze Zahl q ermittelt, so daß zwischen q und $q+1$ eine oder mehrere Wurzeln von $f(x)$ liegen. Man setzt dann

$$x = q + \frac{1}{x_1} = \frac{q x_1 + 1}{x_1},$$

und erhält für x_1 wieder eine Gleichung n^{ten} Grades

$$x_1{}^n f\left(\frac{q x_1 + 1}{x_1}\right) = f_1(x_1) = 0,$$

die so viele reelle Wurzeln größer als 1 hat, als die gegebene Funktion $f(x)$ Wurzeln zwischen q und $q+1$ hat.

Man wähle eine Zahl q_1 so, daß zwischen q_1 und $q_1 + 1$ wenigstens eine Wurzel von $f(x_1)$ liegt, und setze

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}.$$

Man erhält dann wieder eine Gleichung n^{ten} Grades für x_2,

$$x_2{}^n f_1\left(\frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}\right) = f_2(x_2) = 0,$$

die wieder wenigstens eine Wurzel größer als 1 hat.

Und so kann man fortfahren. Wenn zwischen q und $q+1$ mehr als eine Wurzel von $f(x)$ liegt, so erhält man unter Umständen mehrere Werte für q_1. Ebenso kann man mehrere Werte für q_2 finden; aber endlich gelangt man dazu, die sämtlichen Wurzeln zwischen q und $q+1$ voneinander zu trennen.

Der Wert von x stellt sich dann durch den Kettenbruch

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

dar.

3. Da man zur Erreichung einer beträchtlichen Annäherung an den wahren Wert einer Wurzel x meist eine große Zahl von Teilnennern berechnen muß und die Bildung der Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots$ sehr mühsam ist, so ist diese Methode mehr von theoretischem Interesse als zu rechnerischen Zwecken brauchbar.

1) Diese Methode verdanken wir Lagrange, Mém. de Berlin 1767.

Nur in den Fällen, die jedoch als Ausnahmen zu betrachten sind, wo in der Reihe $q, q_1, q_2, \ldots$ bald eine verhältnismäßig große Zahl auftritt, erhält man bessere Resultate.

Ein Beispiel dieser Art bietet die kubische Gleichung:

$$x^3 - 2x - 2 = 0.$$

Man erhält die sukzessiven Umformungen:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x - 2 &= 0, & q &= 1, \\ 3x^3 - x^2 - 2x - 1 &= 0, & q_1 &= 1, \\ 2x^3 - 4x^2 - 8x - 3 &= 0, & q_2 &= 3, \\ 9x^3 - 22x^2 - 14x - 2 &= 0, & q_3 &= 2, \\ 46x^3 - 6x^2 - 32x - 9 &= 0, & q_4 &= 1, \\ x^3 - 94x^2 - 132x - 46 &= 0, & q_5 &= 95, \\ 3561x^3 - 9083x^2 - 191x - 1 &= 0, & q_6 &= 2, \end{aligned}$$

und aus der Reihe der Teilnenner

$$(1, 1, 3, 2, 1, 95, 2, \ldots)$$

ergibt sich die Reihe der Näherungsbrüche

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{23}{13}, \frac{2201}{1244}, \frac{4425}{2501}, \ldots;$$

von diesen Brüchen ist abwechselnd der eine kleiner, der andere größer als x. Die beiden letzten geben, in Dezimalbrüche verwandelt:

$$1{,}76929260, \quad 1{,}76929228,$$

und der Fehler in der letzten, etwas zu kleinen Zahl ist kleiner als

$$0{,}00000016.$$

Achtzehnter Abschnitt.

Kreisteilung.

§ 105. Einheitswurzeln.

1. Wenn wir irgend eine komplexe Größe z durch den absoluten Wert und die Phase darstellen:

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so ist (§ 51, 8.)

$$z^n = r^n \cos(n\vartheta + i\sin n\vartheta), \tag{1}$$

und hiernach können wir die Aufgabe lösen, alle Zahlen zu finden, deren n^{te} Potenz einer gegebenen (reellen oder komplexen) Zahl c gleich ist, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$z^n = c.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra muß diese Gleichung n Wurzeln haben.

2. Setzen wir

$$c = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und nehmen ϱ positiv, φ zwischen den Grenzen 0 und 2π an, so ergibt sich

$$r^n \cos n\vartheta = \varrho\cos\varphi, \quad r^n \sin n\vartheta = \varrho\sin\varphi.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen quadrieren und addieren, so folgt $r^{2n} = \varrho^2$, und wenn r positiv sein soll, so ergibt sich hieraus

$$r = \sqrt[n]{\varrho},$$

worunter die einzige existierende reelle positive n^{te} Wurzel aus ϱ verstanden ist.

3. Ist r so bestimmt, so folgt

$$\cos n\vartheta = \cos\varphi, \quad \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Hierdurch ist aber der Winkel ϑ nicht eindeutig bestimmt. Es

gilt nämlich in der Trigonometrie der Satz, daß sich zwei Winkel, die denselben Sinus und denselben Kosinus haben, nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden können, und demnach ist, wenn m eine beliebige (positive oder negative) ganze Zahl bedeutet,

$$n\vartheta = \varphi + 2\pi m, \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}.$$

Andererseits aber ergeben zwei Werte von ϑ, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, denselben Wert von z. Wenn wir also $m = qn + k$ setzen, worin k den Rest der Division von m durch n bedeutet, also

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi q,$$

so ergeben alle möglichen Werte der ganzen Zahl q dasselbe z, und man erhält hiernach gewiß alle verschiedenen Werte der n^{ten} Wurzel aus c, wenn man $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ setzt, in der Form

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right],$$

und hierfür kann man nach § 51, 6. auch setzen:

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

oder auch nach (1):

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k.$$

4. Setzen wir zur Abkürzung

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

so ist $\varepsilon^n = 1$ und folglich auch $\varepsilon^{kn} = 1$. Das Produkt der beiden konjugiert imaginären Zahlen

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

ist gleich 1 und folglich können wir

$$\varepsilon^{-k} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

setzen. Zugleich ist $\varepsilon^{-k} = \varepsilon^{n-k}$. Die Werte

(2) $$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}$$

sind aber alle untereinander verschieden. Denn wäre etwa $\varepsilon^k = \varepsilon^h$, so könnten sich nach der schon benutzten Eigenschaft der trigono-

metrischen Funktionen $2\pi k/n$ und $2\pi h/n$ nur durch ein Vielfaches von 2π, also k/n und h/n nur um eine ganze Zahl unterscheiden, was nicht möglich ist, wenn h und k verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ sind.

5. Die Größen (2) heißen die n^{ten} Einheitswurzeln. Es gibt deren n voneinander verschiedene.

Sie sind die Wurzeln der Funktion $x^n - 1$.

Man erhält die sämtlichen n^{ten} Wurzeln einer gegebenen Zahl c, wenn man eine von ihnen mit den n^{ten} Einheitswurzeln multipliziert. Es gibt also (außer wenn $c = 0$ ist) n und nicht mehr verschiedene n^{te} Wurzeln aus c, und folglich auch nicht mehr als n verschiedene n^{te} Wurzeln aus 1.

6. Auf einer Kreisperipherie, deren Halbmesser wir zur Längeneinheit wählen, können die Winkel um den Mittelpunkt durch die zugehörigen Bogen gemessen werden. Dem ganzen Winkelraum von vier Rechten entspricht dann die ganze Kreisperipherie mit der Maßzahl 2π. Teilen wir die ganze Peripherie in n gleiche Teile, so erhalten wir in den Teilpunkten die Ecken eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons und zwar eines n-Ecks.

7. Nach der geometrischen Darstellung des Imaginären (§ 51) sind die Eckpunkte dieses Polygons, wenn wir einen von ihnen in den Punkt $x = 1$, $y = 0$ verlegen, die Bildpunkte der n^{ten} Einheitswurzeln, also der komplexen Größen (2). Wir nennen den Punkt, der, von 0 aus gerechnet, dem Winkel $2\pi k/n$ entspricht, den k^{ten} Eckpunkt des Polygons, so daß der Ausgangspunkt der n^{te} oder auch der nullte Eckpunkt ist.

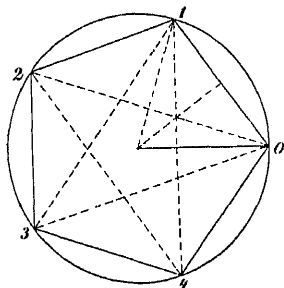


Fig. 19.

Wenn wir die Seite des regelmäßigen n-Ecks mit S_n bezeichnen, so ergibt sich aus der Figur 19:

$$S_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Diese Größen S_n lassen sich sowohl geometrisch als algebraisch bestimmen. Nach der analytischen Geometrie lassen sich aber die Schnittpunkte von Kreisen, deren Mittelpunkte und Radien gegeben sind, und ebenso die Schnittpunkte von Kreisen und geraden Linien algebraisch durch die Wurzeln quadratischer Gleichungen bestimmen, und umgekehrt kann man eine Quadratwurzel aus gegebenen Zahlen, wenn man diese Zahlen durch Strecken darstellt, geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruieren, also auf die Schnittpunkte von Kreisen oder von Kreisen und Geraden zurückführen.

durch eine Kette von Quadratwurzeln bewerkstelligen läßt, so ist die geometrische Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks mit dem Zirkel und dem Lineal allein ausführbar, und es gilt auch umgekehrt: Wenn die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks mit Zirkel und Lineal möglich ist, so führt die algebraische Bestimmung der n^{ten} Einheitswurzeln auf eine Kette von quadratischen Gleichungen.

8. Setzen wir

$$S_{n,k} = 2 \sin \frac{k\pi}{n},$$

so ist $S_{n,k}$ die Sehne des Kreises, die man erhält, wenn man einen Eckpunkt des Polygons, den wir als Ausgangspunkt wählen und mit Null bezeichnen, nicht mit den nächstfolgenden, sondern erst mit dem k^{ten} darauffolgenden verbindet. Es ist dann $S_{n,k} = S_{n,n-k}$. Ist k größer als 1 und kleiner als $n-1$ und teilerfremd zu n, so ist $S_{n,k}$ die Seite eines der überschlagenen (sternförmigen) Polygone (man sehe die Figur 20 beim Fünfeck), wenn aber k und n einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so gibt $S_{n,k}$ die Seite eines Polygons von geringerer Seitenzahl.

9. Ist S_n bekannt, so kann man daraus S_{2n} durch eine Quadratwurzel, also auch durch eine geometrische Konstruktion ableiten (Zweiteilung des Winkels).

Dies ergibt sich am einfachsten aus den trigonometrischen Formeln

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a,$$
$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a,$$

von denen die zweite für $a = \pi/n$ ergibt:

$$2 - \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 = S_{2n}^2,$$

und aus der ersten folgt dann:

$$2 + \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2 = 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^2.$$

Wenn wir also der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen geben, so erhalten wir die Halbierung des Nebenwinkels von π/n.

Wir können daher immer durch geometrische Konstruktion aus dem n-Eck das $2n$-Eck, aus diesem das $4n$-Eck u. s. f. ableiten, und wir wollen uns daher von jetzt an auf die Annahme beschränken, daß n ungerade sei.

10. Hat man umgekehrt das $2n$-Eck, so erhält man daraus das n-Eck durch Überspringen von je einem Eckpunkt, z. B. das Dreieck aus dem Sechseck, das 5-Eck aus dem 10-Eck u. s. f.

Die Seite S_{2n} für ein ungerades n läßt sich aber direkt durch die n^{ten} Einheitswurzeln ε ausdrücken. Es ist nämlich

$$S_{2n} = 2\sin\frac{\pi}{2n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = 2\cos\frac{n-1}{4}\frac{2\pi}{n}$$
$$= \quad -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = -2\cos\frac{n+1}{4}\frac{2\pi}{n}.$$

Andererseits ist nach 4.:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = 2\cos\frac{2\pi k}{n},$$

und wir erhalten also, je nachdem $n-1$ oder $n+1$ durch 4 teilbar, also n von der Form $4m+1$ oder $4m-1$ ist:

$$(3) \qquad \begin{aligned} S_{2n} &= \varepsilon^{\frac{n-1}{4}} + \varepsilon^{-\frac{n-1}{4}}, \quad n = 4m+1, \\ S_{2n} &= -\varepsilon^{\frac{n+1}{4}} - \varepsilon^{-\frac{n+1}{4}}, \quad n = 4m-1. \end{aligned}$$

11. Wenn a, b natürliche Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, so können wir (nach § 76) zwei ganze positive Zahlen x, y so bestimmen, daß

$$bx - ay = 1$$

wird. Dann ist, wenn $ab = n$ gesetzt wird,

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi x}{a} - \frac{2\pi y}{b},$$

und man erhält also die Seite des n-Ecks, wenn man den Punkt $2\pi x/a$ mit dem Punkte $2\pi y/b$ verbindet. So ergibt sich beispielsweise die Seite des regelmäßigen 15-Ecks, wenn man die zweite Ecke des 5-Ecks mit der ersten des Dreiecks verbindet.

Es gibt im ganzen vier verschiedene regelmäßige 15-Ecke, deren erste Teilpunkte bei $2\pi/15$, $4\pi/15$, $8\pi/15$, $14\pi/15$ liegen. Diese findet man, wenn man einen der Dreieckspunkte mit den vier Eckpunkten des Fünfecks verbindet.

Hiernach können wir uns im folgenden mit der Betrachtung solcher Polygone begnügen, deren Seitenzahl eine ungerade Primzahl oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist.

§ 106. Algebraische Bestimmung der Einheitswurzeln.

1. Die Formel für die Summe der geometrischen Progression (§ 66) oder die Division von $x^n - 1$ durch $x - 1$ nach § 63 ergibt

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1.$$

Setzen wir hierin für x irgend eine n^{te} Einheitswurzel, so wird die rechte Seite $= 0$, und es muß also auch die linke verschwinden. Für

$x = 1$ verschwindet der erste Faktor $x - 1$, während der zweite den Wert n annimmt. Setzt man aber für x eine von 1 verschiedene Wurzel, also eine der Größen (§ 105, (2)):

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1},$$

so muß der andere Faktor verschwinden. Es sind daher die Potenzen von ε die Wurzeln der Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(1) \qquad x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0,$$

und diese Gleichung hat auch keine anderen Wurzeln. Denn wenn (1) erfüllt ist, so ist auch $x^n - 1 = 0$, also x gleich einer n^{ten} Einheitswurzel. Der Wert $x = 1$ genügt aber der Gleichung (1) nicht.

Setzen wir $x = \varepsilon$, so ergibt sich aus (1):

$$(2) \qquad \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = -1,$$

also der Satz, daß die Summe der $n - 1$ von 1 verschiedenen n^{ten} Einheitswurzeln $= -1$ ist.

2. Die Gleichung (1) ist eine Gleichung von besonderer Natur, die sich in manchen Fällen vollständig auflösen läßt, wie wir jetzt in einigen Beispielen sehen werden.

Für $n = 3$ lautet die Gleichung (2)

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

oder

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = -1.$$

Dies gibt uns also nach § 105, (3) unmittelbar die Sechseckseite $= 1$, d. h. gleich dem Radius.

Es ist also

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und folglich

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^{-1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

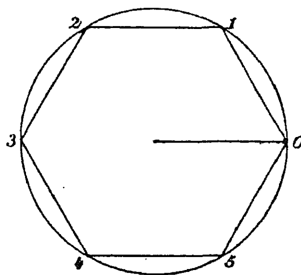


Fig. 20.

3. Für $n = 5$ ergibt

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

nach § 105, (3) die Zehneckseite. Aus (2) aber folgt für diesen Fall

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

oder da $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^3 = \varepsilon^{-2}$ ist:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -1.$$

Es ist aber $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = (\varepsilon + \varepsilon^{-1})^2 - 2 = y^2 - 2$, und daher erhält man für die Zehneckseite:

$$(3) \qquad y^2 = 1 - y, \quad y : 1 = (1 - y) : y,$$

und die zweite Form dieser Gleichung zeigt, daß man y als den größeren der beiden Teile erhält, die sich ergeben, wenn man die Längeneinheit, d. h. den Radius, nach dem goldenen Schnitt teilt (§ 34, 6.). Die algebraische Auflösung von (3) ergibt

$$(4) \qquad y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Die zweite Wurzel ist

$$y_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Daß hier $\sqrt{5}$ positiv zu nehmen ist, folgt daraus, daß der Winkel $2\pi/5$ im ersten Quadranten liegt, also einen positiven Kosinus hat. Um die Bedeutung der zweiten Wurzel y_1 zu erhalten, beachte man:

$$2\cos\frac{4\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{10}$$

und es ist also $-y_1$ die Seite eines überschlagenen Zehnecks, das man erhält, wenn man in dem einfachen Zehneck immer zwei Eckpunkte überspringt. Dieses Zehneck führt durch abermaliges Überspringen von je einer Ecke auf das sternförmige Fünfeck.

Aus (4) ergibt sich

$$2\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{4-y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

und folglich

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

4. Um die Größen y und $-y_1$ zu konstruieren, beachte man, daß $5 = 1^2 + 2^2$ ist. Wenn man also ein rechtwinkliges Dreieck ABC zeichnet, das die beiden Katheten 1 und $\frac{1}{2}$ hat, so ist die Hypotenuse dieses Dreiecks $= \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Wenn wir hiervon wieder die Strecke $\frac{1}{2}$ abschneiden, so bleibt y, und wenn wir $\frac{1}{2}$ zufügen, so ergibt sich $-y_1$.

In der Figur ist also die Strecke $AM = y$ und $AN = -y_1$.

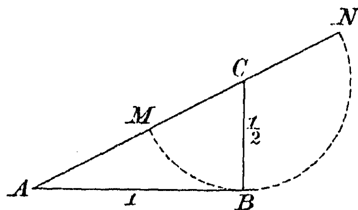


Fig. 21.

5. Eine schöne Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks, die gleichzeitig alle Eckpunkte gibt, hat v. Staudt angegeben. Diese Konstruktion ist in Fig. 22 dargestellt:

Man ziehe in einem Kreis zwei aufeinander senkrechte Durchmesser AB und CD und ziehe in den Punkten A, C, D die Tangenten, d. h. die Senkrechten auf den beiden Durchmessern.

Nun mache man die Strecke Cc doppelt so groß wie den Durch-

messer, also, wenn der Radius $= 1$ ist, $Cc = 4$, und ziehe die Verbindungslinie cS. Diese schneidet den Kreis in zwei Punkten N und N_1. Dann ziehe man die Verbindungslinien CN und CN_1, die den Durchmesser AB in n und n_1 treffen. Wenn man in diesen Punkten Perpendikel auf AB errichtet, so schneiden diese den Kreis in vier Punkten P, P_1, P_2, P_3, die mit A zusammen die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden.

Beweis:

Das Dreieck SNQ ist ähnlich cNC (Gleichheit entsprechender Winkel). Daraus folgt

$$SQ : Cc = NQ : NC$$

und nach dem Satz über die Kreispotenz ist

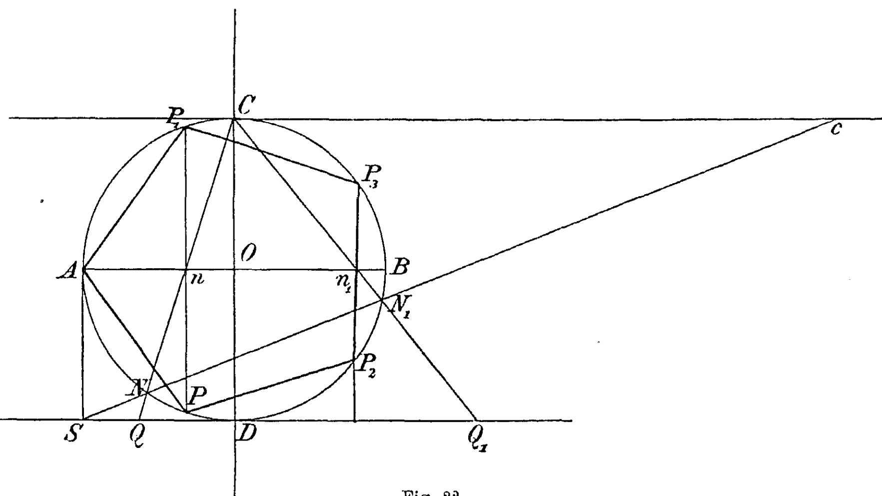


Fig. 22.

$$QD^2 = NQ \cdot QC,$$

woraus

$$SQ : Cc = QD^2 : NC \cdot QC$$

oder

$$SQ : QD = Cc \cdot QD : NC \cdot QC.$$

Die (in der Figur nicht gezeichnete) Sehne DN ist aber senkrecht auf QC, und demnach folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck QDC:

$$DC^2 = NC \cdot QC$$

und somit

$$SQ : QD = QD \cdot Cc : DC^2.$$

Es ist aber nach der Konstruktion $Cc = 2DC = 4SD$ und daher

$$DC : Cc = SD : DC, \quad DC^2 = Cc \cdot SD,$$

und mithin

$$SQ : QD = QD : SD.$$

Es ist also die Strecke SD in Q nach dem goldenen Schnitt geteilt, und folglich, wenn $SD = 1$ ist,

$$QD = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

und da $QD = 2\,On$ ist (wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CQD und CnO):

$$On = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}.$$

Mithin ist der Winkel AOP_1 gleich $2\pi/5$ und AP_1 die Fünfeckseite. Ganz ebenso schließt man, indem man von den beiden ähnlichen Dreiecken SQ_1N_1 und cCN_1 ausgeht, daß

$$On_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{\pi}{5}$$

und folglich der Winkel $P_3OB = \pi/5$ ist.

6. Für die Siebenteilung haben wir zunächst die Gleichung

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = -1,$$

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y_1, \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y_2,$$

und nach § 105, (3) ist $-y_1$ die Seite des regelmäßigen 14-Ecks. Es ist

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2,$$

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y,$$

und folglich ergibt sich für y die kubische Gleichung:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -2\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -2\cos\frac{\pi}{7}.$$

Diese Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, von denen die dem absoluten Werte nach größte und kleinste negativ sind, während die mittlere positiv ist. Weil wir hier auf eine kubische Gleichung gestoßen sind, ist das Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

7. Eine etwas andere Behandlung erfordert das Neuneck, weil 9 keine Primzahl ist, und weil daher jede dritte Einheitswurzel zugleich neunte Einheitswurzel ist.

Wenn ε eine neunte Einheitswurzel ist, so ist ε^3 eine dritte Einheitswurzel, und wenn also diese dritte Einheitswurzel nicht $= 1$, also ε nicht selbst eine dritte Einheitswurzel ist, so ist nach 2.

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0,$$

und diese Gleichung bleibt richtig, wenn ε durch $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^7, \varepsilon^8$ ersetzt wird. Wir haben also eine Gleichung 6ten Grades mit 6 Wurzeln. Es ist aber $\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 1$ und wenn wir also

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1},$$
$$y^3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 3y$$

setzen, so ergibt sich für y die kubische Gleichung:

$$y^3 - 3y + 1 = 0,$$

deren drei Wurzeln

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{9},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9} = -2\cos\frac{\pi}{9}$$

sind; zwei sind positiv, eine ist negativ, und nach § 105, (3) ist y_1 die Seite des regelmäßigen 18-Ecks. Das Neuneck kann daher auch nicht geometrisch konstruiert werden, und noch schlimmer steht es mit dem 11-Eck, was uns für $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ auf die Gleichung 5ten Grades führt:

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

8. Das 13-Eck gibt eine kubische und eine quadratische Gleichung. Zu diesem Resultat führt das folgende Prinzip, das auch in höheren Fällen noch anwendbar ist. Die 13ten Einheitswurzeln

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \varepsilon^3, \quad \varepsilon^4, \quad \varepsilon^5, \quad \varepsilon^6,$$
$$\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-3}, \varepsilon^{-4}, \varepsilon^{-5}, \varepsilon^{-6}$$

lassen sich in der Weise in einen Cyklus ordnen, daß jede aus der vorangehenden auf die gleiche Weise, nämlich durch Quadrieren entsteht:

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^{-5}, \varepsilon^3, \varepsilon^6, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-4}, \varepsilon^5, \varepsilon^{-3}, \varepsilon^{-6},$$

und die letzte, ε^{-6}, gibt durch Quadrieren wieder die erste $\varepsilon^{-12} = \varepsilon$. Wenn man nun in diesem Cyklus jedesmal ein Glied überspringt, so zerfällt er in zwei Cyklen, bei denen jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Erhebung zur 4ten Potenz entsteht. Wir bilden die Summen dieser Glieder:

$$\varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-3} = \eta,$$
$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-6} = \eta_1;$$

wir schreiben kürzer

$$\eta = \Sigma \varepsilon^{\alpha}, \quad \eta_1 = \Sigma \varepsilon^{\beta},$$

$$\alpha \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4, \quad \beta \equiv \pm 2, \pm 5, \pm 6$$

und machen noch die wichtige Bemerkung, daß, wenn a eine der Zahlen α ist, die Zahlen $a\alpha$, abgesehen von Vielfachen von 13, mit den α und die Zahlen $a\beta$ mit den β in ihrer Gesamtheit übereinstimmen, daß dagegen, wenn b eine der Zahlen β ist, die $b\alpha$ mit den β, die $b\beta$ mit den α übereinstimmen.

Dieser Satz ergibt sich nach § 81 daraus, daß die α die quadratischen Reste, die β die quadratischen Nichtreste von 13 sind, und läßt sich hier leicht durch Ausprobieren bestätigen.

Wir nennen die beiden Summen η, η_1 die ersten Perioden. Diese können durch eine Quadratwurzel dargestellt werden, wenn wir ihre Summe $\eta + \eta_1$ und ihr Produkt $\eta\eta_1$ kennen. Es ist aber $\eta + \eta_1$ gleich der Summe aller ε^k, also $= -1$. Das Produkt stellt sich in der Form dar:

$$\eta\eta_1 = \Sigma \varepsilon^{\alpha+\beta}.$$

Der Exponent $\alpha + \beta$ ist, wie man sieht, niemals $= 0$, und nie durch 13 teilbar, und folglich kommt in der Summe $\eta\eta_1$, die im ganzen 36 Glieder enthält, der Summand 1 nicht vor.

Es ist aber entweder durch direkte Rechnung, oder durch die folgende einfache Betrachtung leicht zu sehen, daß jeder Summand ε^k gleich oft, also dreimal vorkommt. Denn ist

$$k \equiv \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \equiv \alpha'' + \beta'' \pmod{13},$$

so ist für eine beliebige durch 13 nicht teilbare Zahl n

$$nk \equiv n\alpha + n\beta \equiv n\alpha' + n\beta' \equiv n\alpha'' + n\beta'',$$

und diese drei Summen sind, da $n\alpha$ und $n\beta$ niemals beide unter den α oder beide unter den β vorkommen können, unter den $\alpha + \beta$ enthalten. Es kommt also jedes nk mindestens dreimal vor und da es im ganzen nur 36 Glieder sind, so muß jeder Summand ε^k gerade dreimal darunter vorkommen. Es ist also $\eta\eta_1 = 3\Sigma\varepsilon^k = -3$, und wir haben η und η_1 aus

$$\eta + \eta_1 = -1,$$
$$\eta\eta_1 = -3$$

zu bestimmen. Wenn man die erste dieser Gleichungen zum Quadrat erhebt und das Vierfache der zweiten davon subtrahiert, so folgt:

$$(\eta + \eta_1)^2 - 4\eta\eta_1 = (\eta - \eta_1)^2 = 13$$

und folglich:

$$\eta = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Daß das Vorzeichen von $\sqrt{13}$ hierin positiv gewählt werden muß, ergibt sich aus der Darstellung

$$\eta = 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} + 2\cos\frac{8\pi}{13},$$
$$= 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} - 2\cos\frac{5\pi}{13},$$
$$\eta_1 = 2\cos\frac{4\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13};$$

da die Kosinus der Winkel im ersten Quadranten positiv sind, und der kleinere Winkel einen größeren Kosinus hat, so sieht man hieraus unmittelbar, daß η_1 negativ und folglich $\eta = -3/\eta_1$ positiv ist.

9. Nachdem man η und η_1 gefunden hat, erhält man für y eine kubische Gleichung. Man setze nämlich

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}, \quad y_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3},$$

woraus sich durch einfache Rechnung ergibt:

$$y + y_1 + y_2 = \eta,$$
$$yy_1 + yy_2 + y_1 y_2 = \Sigma \varepsilon^k = -1,$$
$$yy_1y_2 = 2 + \eta_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2},$$

und demnach sind y, y_1, y_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$y^3 - \eta y^2 - y + \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei positive und eine negative Wurzel, nämlich

$$2\cos\frac{2\pi}{13}, \quad -2\cos\frac{5\pi}{13}, \quad 2\cos\frac{6\pi}{13},$$

von denen die kleinste positive $2\cos\frac{6\pi}{13} = 2\sin\frac{\pi}{13}$ die Seite des 26-Ecks gibt.

10. Man kann auch zuerst eine rationale Gleichung dritten Grades bilden, wenn man

$$z = \varepsilon + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{2\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13},$$
$$z_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = 2\cos\frac{4\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13},$$
$$z_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-6} = -2\cos\frac{5\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}$$

setzt. Man findet durch Rechnung

$$zz_1 = -1 + z_1, \quad z_1 z_2 = -1 + z_2, \quad zz_2 = -1 + z,$$
$$z + z_1 + z_2 = -1,$$
$$zz_1 + zz_2 + z_1 z_2 = -4,$$
$$zz_1 z_2 = -z_2 + z_1 z_2 = -1,$$

und folglich die kubische Gleichung:

$$z^3 - z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Kennt man die drei Wurzeln z, z_1, z_2 dieser Gleichung, so ergeben sich

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y' = \varepsilon^5 + \varepsilon^{-5}$$

als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 - zy + z_2 = 0.$$

§ 107. Das regelmäßige Siebenzehneck.

1. Gauß hat das Gebiet der Elementargeometrie durch die schöne Entdeckung bereichert, daß das regelmäßige Siebenzehneck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.[1])

Wenn man die 17ten Einheitswurzeln ε^k in der Weise in eine Reihe zu ordnen versucht, daß jedes folgende Glied das Quadrat des vorausgehenden ist, so findet man, daß man auf diese Weise nicht alle diese Wurzeln erhält, sondern nur acht von ihnen:

$$\varepsilon, \ \varepsilon^2, \ \varepsilon^4, \ \varepsilon^8, \ \varepsilon^{-1}, \ \varepsilon^{-2}, \ \varepsilon^{-4}, \ \varepsilon^{-8},$$

und hierauf würde wieder $\varepsilon^{-16} = \varepsilon$ folgen.

Um alle ε^k zu erhalten, müssen wir noch eine zweite ähnliche Reihe ansetzen, die etwa mit ε^3 anfängt. Wir setzen nun

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} = \eta,$$
$$\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} = \eta_1.$$

Es ist dann $\eta + \eta_1 = -1$, und für das Produkt $\eta\eta_1$ erhält man

$$\eta\eta_1 = \Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta},$$

worin α die erste, β die zweite Reihe der Exponenten durchläuft.

---

1) Disq. arithmeticae, Sectio septima Wie von Archimedes berichtet wird, er habe bestimmt, daß sein Grabmal die Kugel mit dem Zylinder zeigen solle, so hat Gauß geäußert, er wünsche auf seinem Grabmal die Figur des Siebzehnecks verewigt. Diese kleine Erzählung zeigt, welchen Wert Gauß selbst auf diese Entdeckung legte. Auf dem Grabstein ist diesem Wunsch nicht entsprochen, wohl aber steht bei dem Denkmal, das Gauß in Braunschweig errichtet ist, die Statue (freilich dem Beschauer kaum sichtbar) auf einem Siebzehneck.

Wieder sind die α die quadratischen Reste, die β die quadratischen Nichtreste von 17. Die Summe enthält 64 Glieder, und man schließt, genau wie bei dem Dreizehneck, daß jedes ε^k gleich oft, nämlich viermal darunter vorkommt. Mithin ist

$$\eta\eta_1 = -4, \quad \eta + \eta_1 = -1,$$

woraus man $\eta - \eta_1 = \sqrt{17}$ und folglich

$$\eta = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

findet. Daß das Vorzeichen von $\sqrt{17}$ in diesen Formeln positiv zu nehmen ist, sieht man, wenn man η_1 in die Form setzt:

$$\eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17},$$

was offenbar negativ ist. Folglich ist η positiv.

2. Um η und η_1 zu konstruieren, benutzt man, wie in § 106, 4., die Eigenschaft der Zahl 17, die Summe zweier Quadrate, $4^2 + 1^2$ zu sein. Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 2 und $\frac{1}{2}$, dessen Hypotenuse dann $\frac{1}{2}\sqrt{17}$ ist. Schneidet man auf diesem die Strecke $\frac{1}{2}$ ab oder fügt sie hinzu, so erhält man η und $-\eta_1$ ($AC = \eta$, $AC' = -\eta_1$ (Fig. 23)). Die Summen η, η_1 heißen die e r s t e n P e r i o d e n.

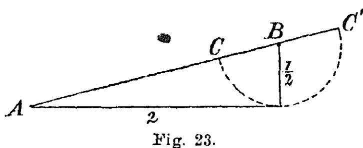


Fig. 23.

Aus ihnen kann man vier zweite Perioden bilden, wenn man jedesmal ein Glied überspringt, also

$$z = \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$z_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = 2\cos\frac{4\pi}{17} - 2\cos\frac{\pi}{17},$$

$$z_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{15},$$

$$z_3 = \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = -2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17}.$$

Man erhält hieraus durch direktes Addieren und Multiplizieren:

$$z + z_1 = \eta, \quad zz_1 = -1,$$

$$z_2 + z_3 = \eta_1, \quad z_2 z_3 = -1,$$

woraus

$$z = \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 4}}{2}, \quad z_1 = \frac{\eta - \sqrt{\eta^2 + 4}}{2},$$

$$z_2 = \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1{}^2 + 4}}{2}, \quad z_3 = \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1{}^2 + 4}}{2}.$$

Daß die Vorzeichen hier positiv zu nehmen sind, zeigt die Darstellung durch die Kosinus, wonach z_1 und z_3 negativ, z und z_2 positiv sind.

Um z und z_1 zu konstruieren, nimmt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 1 und $\frac{1}{2}\eta$, dessen Hypotenuse dann $\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2+4}$ ist; wenn man $\frac{1}{2}\eta$ zu dieser Hypotenuse zufügt oder von ihr wegnimmt, so erhält man z und $-z_1$, und auf gleiche Weise kann man z_2 und z_3 aus η_1 konstruieren.

Endlich sei

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17},$$

$$y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

also

$$y + y_1 = z, \quad y y_1 = z_2,$$

woraus

$$y = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4z_2}}{2}, \quad y_1 = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4z_2}}{2},$$

was wieder leicht konstruiert werden kann. Die Seite des einfachen regelmäßigen 34-Ecks ist y_1.

Eine elegante Konstruktion des Siebzehnecks, ganz entsprechend der des Fünfecks, hat v. Staudt gegeben (Crelles Journal, Bd. 24).

Neunzehnter Abschnitt.

Unmöglichkeitsbeweise.

§ 108. Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

1. Es gibt eine Reihe von altersher berühmter geometrischer Probleme, von denen bekannt war oder angenommen wurde, daß sie nicht mit Zirkel und Lineal gelöst werden können. Hierhin gehört vor allem die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung eines Würfels, die Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, die Quadratur des Kreises.

Die geometrische Konstruierbarkeit ist mit der algebraischen Tatsache gleichbedeutend, daß die gesuchte Größe aus den gegebenen durch eine Reihe von Quadratwurzeln ableitbar sei (§ 105, 7.).

Einfacher läßt sich dies ausdrücken, wenn wir uns auf den in § 69, 7. eingeführten Begriff des Rationalitätsbereiches und seine Erweiterung durch Adjunktion stützen. Es war unter einem Rationalitätsbereich ein Zahlengebiet verstanden, in dem die rationalen Rechenoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (mit Ausnahme der Division durch Null) unbeschränkt ausführbar sind, ohne auf Zahlen zu führen, die nicht in dem Gebiete enthalten sind. Unter Adjunktion haben wir die Hinzufügung einer neuen Zahl verstanden, wodurch ein erweiterter Rationalitätsbereich entsteht, der den ursprünglichen als Teil enthält. So entsteht z. B. durch Adjunktion von $i = \sqrt{-1}$ zu dem Bereich der rationalen Zahlen der Bereich der komplexen Zahlen $x + iy$, worin x und y rationale Zahlen sind.

Hiernach können wir die charakteristische Eigenschaft der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen, die wir von jetzt ab auch kurz als konstruierbare Größen bezeichnen wollen, so ausdrücken:

> Jede konstruierbare Größe x muß in einem Rationalitätsbereich enthalten sein, der aus dem der gegebenen Größen durch sukzessive Adjunktion einer Reihe von Quadratwurzeln abgeleitet ist.

Die Reihenfolge, in der diese Quadratwurzeln adjungiert werden, kann möglicherweise auf verschiedene Arten vorgenommen werden. Dies ist z. B. der Fall, wenn es sich um eine Summe $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ handelt, wo es gleichgültig ist, welche der beiden Wurzeln zuerst ausgezogen wird; dagegen ist in einem Ausdruck wie $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{\gamma}}$ zuerst $\sqrt{\gamma}$ zu suchen und dann kann erst $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{\gamma}}$ gefunden werden.

Wir denken uns eine dieser Reihenfolgen festgesetzt und bezeichnen die letzte Quadratwurzel, die zu adjungieren ist, mit $\sqrt{\theta}$. Der Rationalitätsbereich, in dem $\sqrt{\theta}$ noch nicht enthalten ist, heiße der vorletzte Rationalitätsbereich.

Es ist dann $\sqrt{\theta}$ nicht in dem vorletzten Rationalitätsbereich enthalten, dagegen sind alle geraden Potenzen von $\sqrt{\theta}$ darin enthalten, und folglich kann jede konstruierbare Größe x in der Form dargestellt werden:

$$x = \frac{a + b\sqrt{\theta}}{c + d\sqrt{\theta}},$$

worin a, b, c, d Größen des vorletzten Rationalitätsbereiches sind. Erweitert man diesen Bruch mit $c - d\sqrt{\theta}$, so ergibt sich

$$x = \frac{(a + b\sqrt{\theta})\,(c - d\sqrt{\theta})}{c^2 - d^2\theta},$$

und wenn man

$$y = \frac{ac - bd\theta}{c^2 - d^2\theta}, \quad z = \frac{bc - ad}{c^2 - d^2\theta}$$

setzt, so folgt:

$$x = y + z\sqrt{\theta},$$

worin y, z im vorletzten Rationalitätsbereich enthalten sind. Der Nenner $c^2 - d^2\theta$ kann nicht verschwinden, da θ nicht das Quadrat einer Größe des vorletzten Rationalitätsbereiches sein soll.

2. Hiernach ist x die Wurzel einer quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2yx + (y^2 - \theta z^2) = 0,$$

die wir auch durch

$$f(x) = 0$$

bezeichnen, deren Koeffizienten im vorletzten Rationalitätsbereiche enthalten sind. Ist also $\sqrt{\theta_1}$ die vorletzte der zu adjungierenden Quadratwurzeln, so können wir die Gleichung $f(x) = 0$ auch so darstellen:

$$f(x) = \varphi(x) + \sqrt{\theta_1}\,\psi(x) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\varphi - \sqrt{\theta_1}\,\psi$, so erhalten wir eine Gleichung vierten Grades

$$f_1(x) = \varphi(x)^2 - \theta_1\,\psi(x)^2 = 0,$$

in der auch die vorletzte Quadratwurzel $\sqrt{\theta_1}$ nicht mehr vorkommt, und die in die Form

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{\theta_2}\psi_1(x) = 0$$

gesetzt werden kann, in der $\sqrt{\theta_2}$ die vor-vorletzte Quadratwurzel ist. Hieraus kann wieder die Gleichung 8ten Grades

$$f_2(x) = \varphi_1(x)^2 - \theta_2\psi_1(x)^2 = 0$$

abgeleitet werden, und so können wir fortfahren, bis alle adjungierten Quadratwurzeln herausgeschafft sind. So kommen wir zu dem Satze:

Jede konstruierbare Größe x ist die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rational in den gegebenen Größen sind.

Natürlich ist dieser Satz nicht umkehrbar; denn nicht jede algebraische Gleichung läßt sich durch eine Kette von Quadratwurzeln lösen.

§ 109. Eine kubische Gleichung ist nicht durch Quadratwurzeln lösbar.

Wir können, wie schon früher (§ 91, 3.) gezeigt, eine kubische Gleichung ohne Anwendung von Wurzeln auf die vereinfachte Form bringen:

(1) $$x^3 + ax = b,$$

und es seien jetzt a und b gegebene rationale Zahlen. Bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3 die drei Wurzeln dieser Gleichung, so ist (§ 70, 1.)

(2) $$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Es möge nun eine dieser Wurzeln, etwa x_1, durch eine Kette von Quadratwurzeln bestimmbar sein. Dann ist, wenn wir mit $\sqrt{\theta}$ die letzte Quadratwurzel bezeichnen, nach dem vorigen Paragraphen

(3) $$x_1 = y + z\sqrt{\theta},$$

worin y, z, θ dem vorletzten Rationalitätsbereiche angehören. Dagegen können wir annehmen, daß die $\sqrt{\theta}$ nicht dem vorletzten Rationalitätsbereiche angehöre und daß z von Null verschieden sei.

Setzen wir den Ausdruck (3) in (1) ein, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$A + B\sqrt{\theta} = 0,$$

worin

$$A = y^3 + 3yz^2\theta + ay - b,$$
$$B = 3y^2z + z^3\theta + az,$$

rational durch die früheren Quadratwurzeln dargestellt sind. Da aber $\sqrt{\theta}$ durch diese nicht darstellbar sein soll, so muß $A = 0$ und $B = 0$ sein, und es folgt also daraus, daß auch

$$x_2 = y - z\sqrt{\theta}$$

eine Wurzel von (1) ist, die, da z nicht Null ist, von der Wurzel x_1 verschieden ist. Aus (2) ergibt sich aber dann

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2y.$$

Es hängt also x_3 nur von den früheren Quadratwurzeln ab.

Ist nun x_3 nicht eine rationale Zahl, so muß noch eine der $\sqrt{\theta}$ vorangehende $\sqrt{\theta_1}$ vorhanden sein, und es ist

$$x_3 = y_1 + z_1\sqrt{\theta_1}.$$

Ebenso wie vorhin schließt man jetzt, daß eine der beiden andern Wurzeln, etwa x_1 gleich $-2y_1$, also von $\sqrt{\theta}$ (und von $\sqrt{\theta_1}$) unabhängig sein muß, was wegen (3) unserer Annahme widerspricht, daß $\sqrt{\theta}$ nicht durch die früheren Quadratwurzeln ausdrückbar sei. Wir haben also damit den Satz:

Eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die keine rationale Wurzel hat, ist niemals durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar.

2. Dieser Satz ist unmittelbar anwendbar auf die Würfelverdoppelung, die von der Gleichung $x^3 = 2$ abhängt, ebenso auf die Probleme des regelmäßigen Siebenecks und Neunecks. Denn die Gleichungen, von denen diese Probleme abhängen, sind nach § 106, 6. 7.

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \quad y^3 - 3y + 1 = 0,$$

und nach dem Satze § 68, 1. könnten diese Gleichungen nur die rationalen Wurzeln $+1$ oder -1 haben, und diese beiden Werte genügen nicht.

3. Die Trisektion des Winkels hängt von der Gleichung ab:

(4) $$x^3 - 3x = 2\cos\vartheta. \quad (\S\ 91,\ 1.)$$

Ist $\cos\vartheta$ gegeben, so kann der Winkel ϑ konstruiert werden. Setzen wir $2\cos\vartheta = a$, so lautet diese Gleichung

(5) $$x^3 - 3x = a,$$

und die Aufgabe kann so gefaßt werden, daß aus zwei beliebig gegebenen Strecken, von denen die eine die Längeneinheit, die andere a ist, die Strecke x konstruiert werden soll. Für unendlich viele besondere Werte von a ist diese Aufgabe lösbar, z. B. für $a = 0$ (Dreiteilung

des rechten Winkels) oder für $a = \sqrt{2}$ (Dreiteilung des Winkels von 45^0) oder $a = 2 \cos \frac{3\pi}{17}$. Man braucht, um andere konstruierbare Fälle zu finden, nur irgend eine aus der Einheit durch Konstruktion ableitbare Strecke α zu nehmen und $a = \alpha^3 - 3\alpha$ zu setzen. Dann ist $x = \alpha$ eine Wurzel unserer Gleichung.

Lassen wir aber a unbestimmt, so kann die Gleichung (5), wie oben bewiesen ist, nur dann durch Quadratwurzeln lösbar sein, wenn sie eine Wurzel hat, die rational durch a ausdrückbar ist.

Daß dies im allgemeinen unmöglich ist, schließt man daraus, daß man unendlich viele rationale Werte von a angeben kann, für die diese Gleichung keine rationale Wurzel hat. Ein solcher Wert ist z. B. $a = -1$, für den $\vartheta = \pi/3$ und $x = 2 \cos \pi/9$ ist. Diese Annahme führt auf das reguläre Neuneck, das, wie wir gesehen haben, nicht konstruierbar ist.

Um andere Fälle dieser Art zu finden, setze man

$$\cos \vartheta = m/n, \quad nx = y,$$

worin m, n ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Dann wird die Gleichung (4):

$$y^3 - 3n^2 y = 2mn^2, \tag{6}$$

und wenn (4) eine rationale Lösung hat, so muß (6) eine ganzzahlige Lösung haben. Dies ist aber z. B. unmöglich, wenn n durch eine ungerade Primzahl p, aber nicht durch deren Quadrat teilbar ist, weil dann y durch p und folglich die linke Seite von (6) durch p^3, die rechte nur durch p^2 teilbar wäre.

§ 110. Reduktion einer Funktion durch ein Radikal.

1. Um weitere Anwendungen auf die Algebra zu machen, beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Ist n eine Primzahl und a eine Zahl des Rationalitätsbereiches, die nicht die n^{te} Potenz einer anderen Zahl des Rationaltätsbereiches ist, so ist

$$\varphi(x) = x^n - a$$

irreduzibel.

Für $n = 2$ ist dieser Satz einleuchtend, denn für $n = 2$ wird $\varphi(x) = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$, und diese Faktoren sind nur dann rational, wenn $\sqrt{a}$ rational ist.

Versteht man für ein ungerades n unter $\sqrt[n]{a} = r$ eine bestimmte der verschiedenen n^{ten} Wurzeln, z. B. wenn a reell ist, die reelle,

unter ε die n^{te} Einheitswurzel $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, so sind die sämtlichen n^{ten} Wurzeln aus a:

(1) $$r,\ \varepsilon r,\ \varepsilon^2 r,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1} r.$$

Wenn nun $\varphi(x)$ zerfällt, etwa in das Produkt $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$, worin der Grad μ von $\varphi_1(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \cdots + b_\mu$ kleiner als n ist, so werden die Wurzeln von $\varphi_1(x)$ unter denen von $\varphi(x)$ zu suchen sein, und da $b = (-1)^\mu b_\mu$ dem Produkte der Wurzeln von $\varphi_1(x)$ gleich ist (§ 70), so ist

$$b = \varepsilon^k r^\mu, \quad a = r^n,$$

worin k eine ganze Zahl ist, und b dem Rationalitätsbereich angehört. Erhebt man die erste dieser Gleichungen in die n^{te} Potenz, so folgt nach der zweiten:

(2) $$b^n = a^\mu.$$

Da nun aber μ kleiner als die Primzahl n und folglich μ, n relativ prim sind, so kann man die ganzen Zahlen p, q so bestimmen, daß $pn + q\mu = 1$ wird (§ 76). Es ist dann wegen (2):

$$a = a^{pn} a^{q\mu} = (a^p b^q)^n,$$

folglich a die n^{te} Potenz einer Zahl des Rationalitätsbereiches, wie bewiesen werden sollte.

2. Wenn $\chi(x)$ und $\psi(x)$ ganze Funktionen von x mit Koeffizienten des Rationalitätsbereichs bedeuten, und $r = \sqrt[n]{a}$, so ist $\chi(r)$ nur dann gleich 0, wenn $\chi(x)$ durch $\varphi(x) = x^n - a$ teilbar ist. Ist $\chi(x)$ relativ prim zu $\varphi(x)$, so können wir nach § 67, 5. die beiden Funktionen $F(x)$ und $F_1(x)$ so bestimmen, daß

$$F(x)\,\chi(x) + F_1(x)\,\varphi(x) = \psi(x),$$

und folglich, wenn wir $x = r$, also $\varphi(r) = 0$ setzen und $\chi(r)$ von Null verschieden annehmen,

$$\frac{\psi(r)}{\chi(r)} = F(r).$$

In dieser Form ist also jede Zahl enthalten, die durch die vier Spezies aus r und aus Zahlen des Rationalitätsbereiches abgeleitet werden kann. Da man überdies die höheren Potenzen von r vermöge $r^n = a$ durch die niedrigeren ausdrücken kann, so folgt, daß jede Zahl ω des durch Adjunktion von r erweiterten Rationalitätsbereichs in der Form

$$\omega = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_{n-1} r^{n-1}$$

dargestellt werden kann, worin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ dem ursprünglichen Rationalitätsbereich angehören. Diese Darstellung ist nur auf eine

Weise möglich, weil sich aus zwei solchen Darstellungen durch Subtraktion eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Grades für r ergeben würde.

3. Wir wollen die Wurzeln von $\varphi(x)$, also die Größen (1) mit

$$r,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{n-1}$$

bezeichnen. Es ergibt sich dann aus den Newtonschen Formeln für die Potenzsummen (§ 71, (6)), da hier die Koeffizienten

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$$

gleich Null sind,

$$(3) \qquad r^\nu + r_1^\nu + r_2^\nu + \cdots + r_{n-1}^\nu = 0, \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Wenn wir r in ω durch $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ ersetzen, so erhalten wir n Zahlen

$$(4) \qquad \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{n-1},$$

die wir konjugierte Zahlen nennen. Die Summe dieser Zahlen ist nach (3)

$$S(\omega) = \omega + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1} = n\alpha_0,$$

und ist also eine rationale Größe. Sie heißt die Spur der Zahl ω. Da aber ω^ν für jedes ganzzahlige ν selbst wieder eine Zahl von der Form ω ist, so folgt, daß auch

$$S(\omega^\nu) = \omega^\nu + \omega_1^\nu + \cdots + \omega_{n-1}^\nu$$

eine rationale Größe ist.

Daraus schließen wir aber, daß alle Koeffizienten A_i des Produktes

$$F(x) = (x-\omega)(x-\omega_1)\cdots(x-\omega_{n-1})$$
$$= x_n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n,$$

die sich ja nach den Newtonschen Formeln rational durch die $S(\omega^\nu)$ ausdrücken lassen, Zahlen des Rationalitätsbereiches sind. Insbesondere ist das Produkt

$$N(\omega) = \omega\,\omega_1\,\omega_2 \cdots \omega_{n-1} = (-1)^n A_n,$$

das die Norm von ω genannt wird, im Rationalitätsbereich enthalten.

4. Ist in einem besondern Fall

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n-1},$$

so ist $S(\omega) = n\omega = n\alpha_0$, also ω selbst im Rationalitätsbereich enthalten und umgekehrt, weil dann $\omega = \alpha_0$ ist.

Es ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ω selbst im Rationalitätsbereich enthalten ist, die, daß die konjugierten Werte von ω alle einander gleich sind.

Diese Sätze sind übrigens spezielle Fälle des allgemeinen Satzes von den symmetrischen Funktionen.

5. Endlich sei hier an den Satz erinnert, der nach § 69, 7. aus der vorausgesetzten Irreduzibilität von $\varphi(x) = x^n - a$ folgt, daß, wenn irgend eine Gleichung $F(r) = 0$, mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches, richtig ist, auch

$$F(r_1) = 0, \quad F(r_2) = 0, \cdots, F(r_{n-1}) = 0$$

sein muß.

6. Wir nehmen nun an, es sei irgend eine ganze Funktion $f(x)$ irreduzibel im Rationalitätsbereich, sie werde aber reduzibel durch Adjunktion einer Wurzel r von $\varphi(x)$. Die Grade m und n von $f(x)$ und $\varphi(x)$ seien beide Primzahlen. Den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in $f(x)$ nehmen wir gleich 1 an.

Wir deuten die Zerlegung von $f(x)$ in zwei Faktoren des erweiterten Rationalitätsbereiches so an:

$$f(x) = f_1(x, r) f_2(x, r),$$

worin $f_1(x, r)$, $f_2(x, r)$ ganze Funktionen der Grade m_1, m_2 sind, deren Koeffizienten rational von r abhängen, also Zahlen der Form ω (Nr. 2) sind. Auch in f_1 und f_2 seien die Koeffizienten der höchsten Potenz von x gleich 1.

Nach dem Satze 5. ist dann auch

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x, r_1) f_2(x, r_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x) &= f_1(x, r_{n-1})\, f_2(x, r_{n-1}), \end{aligned}$$

und wenn man alle diese Gleichungen multipliziert und

$$\begin{aligned} F_1(x) &= f_1(x, r) f_1(x, r_1) \cdots f_1(x, r_{n-1}) = N f_1(x, r), \\ F_2(x) &= f_2(x, r) f_2(x, r_1) \cdots f_2(x, r_{n-1}) = N f_2(x, r) \end{aligned}$$

setzt,

$$f(x)^n = F_1(x)\, F_2(x); \tag{5}$$

darin sind $F_1(x)$, $F_2(x)$ ganze Funktionen der Grade nm_1, nm_2, deren Koeffizienten als symmetrische Funktionen der Wurzeln von $\varphi(x)$ im Rationalitätsbereich enthalten sind.

Da nun $f(x)$ irreduzibel angenommen war, so muß nach (3) sowohl $F_1(x)$ als $F_2(x)$ eine Potenz von $f(x)$ sein. Sei also

$$F_1(x) = f(x)^{p_1}, \quad F_2(x) = f(x)^{p_2},$$

und folglich, durch Vergleichung der Grade:

$$mp_1 = nm_1, \quad mp_2 = nm_2 \quad m_1 + m_2 = m.$$

Da nun m_1 und m_2 kleiner als m und folglich nicht durch m teilbar

sind, so muß n durch m teilbar, und da beides Primzahlen sind, $n = m$ sein. Hieraus folgt der Satz:

Eine irreduzible Funktion $f(x)$ vom Primzahlgrad m kann nur dann durch Adjunktion eines Radikals, dessen Wurzelexponent ebenfalls eine Primzahl ist, reduzibel werden, wenn der Wurzelexponent gleich m ist.

§ 111. Der irreduzible Fall der kubischen Gleichung.

1. Daß bei einer kubischen Gleichung mit drei reellen Wurzeln die Cardanische Formel diese Wurzeln nur als Summe zweier imaginärer Radikale gibt, ist eine frühzeitig gemachte Bemerkung, und man hat darum diesen Fall den irreduziblen (casus irreducibilis) genannt, worin das Wort irreduzibel in einem anderen als dem heute gebräuchlichen Sinne zu verstehen ist. Aus den Sätzen des vorigen Paragraphen können wir jetzt den folgenden Satz ableiten:

Eine irreduzible Gleichung dritten Grades mit drei reellen Wurzeln und rationalen Koeffizienten kann nicht durch reelle Radikale gelöst werden.

Wenn eine irreduzible Gleichung, deren Koeffizienten wir rational annehmen, eine Wurzel hat, die durch eine Kette von reellen Radikalen darstellbar ist, so können wir die aufeinander folgenden Wurzelexponenten als Primzahlen annehmen. Denn eine Wurzel mit zusammengesetztem Exponenten $r = \sqrt[m]{\theta}$ kann, wenn $m = pq$ ist, ersetzt werden durch $r = \sqrt[p]{\sqrt[q]{\theta}}$, also durch mehrmals nacheinander ausgeführtes Radizieren mit Primzahlexponenten. Wir fügen dann der Reihe nach alle diese Radikale bis auf das letzte dem Rationalitätsbereich zu, wodurch die Gleichung noch nicht zerfällt. Erst durch Hinzufügung des letzten Radikals r, das nach § 110, 6. vom dritten Grade sein muß, tritt ein Zerfallen ein. Es erhält also eine Wurzel den Ausdruck

$$x_1 = a + br + cr^2,$$

worin a, b, c rational durch die früheren Radikale ausdrückbar sind, während $r = \sqrt[3]{\theta}$ nicht in dieser Weise darstellbar ist. Es folgt hieraus, daß θ nicht die dritte Potenz einer im Rationalitätsbereich enthaltenen Größe α sein kann; denn von den drei Werten α, $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon^2\alpha$, die dann r haben könnte, wäre nur α reell; also müßte das reelle r gleich α sein, gegen die Voraussetzung. Daraus ergibt sich aber, daß auch

$$x_2 = a + \varepsilon rb + \varepsilon^2 r^2 c,$$
$$x_3 = a + \varepsilon^2 rb + \varepsilon r^2 c$$

Wurzeln der gegebenen kubischen Gleichung sein müssen; denn aus dem Satze § 110, 5. folgt, daß mit $f(x_1)$ zugleich $f(x_2)$ und $f(x_3)$ verschwinden. Nun ist hier

$$\varepsilon = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

und da a, b, c reell sind, so können x_2 und x_3 nur dann reell sein, wenn

$$rb = r^2 c$$

ist. Wären b und c gleich 0, so wäre $x_1 = a$, also $f(x)$ durch $x - a$ teilbar, also gegen die Voraussetzung schon vor Adjunktion von r reduzibel. Daher müßte $r = b/c$, d. h. r rational durch die früheren Radikale ausdrückbar sein, was gleichfalls der Voraussetzung widerspricht.

§ 112. Darstellung der Einheitswurzeln durch Radikale.

1. In § 110, 1. ist gezeigt, daß die Funktion $\varphi(x) = x^n - a$ vom Primzahlgrade n in einem Rationalitätsbereiche irreduzibel ist, in dem a enthalten, aber nicht die n^{te} Potenz einer Zahl b des Rationalitätsbereiches ist. Eine Gleichung von der Form $x^n - a = 0$ heißt eine reine Gleichung, ihre Wurzel $\sqrt[n]{a}$ heißt ein Radikal vom Grade n in dem Rationalitätsbereiche.

Eine Zahl heißt durch Radikale darstellbar oder metacyklisch, wenn sie in einem Rationalitätsbereiche enthalten ist, der aus dem Bereiche der rationalen Zahlen durch sukzessive Adjunktion von Radikalen des jeweils vorangegangenen Rationalitätsbereiches abgeleitet ist. Eine Gleichung, die durch Radikale lösbar ist, heißt eine metacyklische Gleichung.

2. Zu den metacyklischen Zahlen gehören alle Einheitswurzeln, und zwar beweisen wir den Satz:

Mag m eine Primzahl oder zusammengesetzt sein, so sind alle m^{ten} Einheitswurzeln durch Radikale darstellbar, und die Grade dieser Radikale sind kleiner als m.

3. Die m^{ten} Einheitswurzeln (oder auch Einheitswurzeln vom Grade m) sind die Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades

$$x^m - 1 = 0.$$

Sie sind, wie wir schon in § 105 gesehen haben, alle in der Form enthalten:

$$r^k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m},$$

worin

$$r = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$$

ist, und k die Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m-1$ durchläuft.

Haben k und m einen größten gemeinschaftlichen Teiler d, der größer als 1 ist, und ist $k = dk'$, $m = dm'$, so ist

$$r^k = \cos\frac{2\pi k'}{m'} + i\sin\frac{2\pi k'}{m'},$$

und dies ist zugleich eine Einheitswurzel vom Grade m'.

Ist aber k relativ prim zu m, so kann

$$r^{kh} = \cos\frac{2\pi kh}{m} + i\sin\frac{2\pi kh}{m}$$

nur dann gleich 1 sein, wenn $h = m$ oder ein Vielfaches von m ist. In diesem Falle ist also r^k nicht zugleich Einheitswurzel von niedrigerem Grade.

Man unterscheidet daher primitive und imprimitive m^{te} Einheitswurzeln. Die primitiven m^{ten} Einheitswurzeln sind solche, die nicht zugleich Einheitswurzeln niedrigeren Grades sind. Man erhält sie, wenn man in r^k den Exponenten k die Reihe der relativen Primzahlen zu m durchlaufen läßt; und ihre Anzahl ist also gleich $\varphi(m)$ (§ 73, 7.).

4. Der zu beweisende Satz 2. ist richtig in den ersten Fällen, denn für $m = 1$ und $m = 2$ haben wir nur die rationalen Einheitswurzeln $+1$, -1, für $m = 3$ haben wir die Einheitswurzeln

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

die also aus der reinen Gleichung $x^2 + 3 = 0$ abgeleitet werden. Die vierten Einheitswurzeln $+i$, $-i$ ergeben sich aus der reinen Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Wir können also die vollständige Induktion anwenden und annehmen, der Satz 2. sei bewiesen für alle Einheitswurzeln, deren Grad m_1 kleiner als m ist. Können wir ihn unter dieser Voraussetzung beweisen, so ist er allgemein bewiesen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

5. Der Grad m ist eine zusammengesetzte Zahl,

$$m = pm_1,$$

p eine in m aufgehende Primzahl und $m_1 > 1$, also $m_1 < m$, $p < m$.

Ist r eine m^{te} Einheitswurzel, so ist $r^p = a$ eine Einheitswurzel vom Grade m_1 und folglich nach der Voraussetzung durch Radikale darstellbar. Es ist also r die Wurzel der reinen Gleichung

$$x^p - a = 0,$$

und diese ist, wenn a in dem bis dahin gebildeten Rationalitätsbereiche nicht die p^{te} Potenz einer rationalen Größe ist, irreduzibel. Folglich ist auch r durch Radikale darstellbar.

Ist aber $a = b^p$ die p^{te} Potenz einer rationalen Größe, und ϱ eine p^{te} Einheitswurzel, so ist $r = \varrho b$, und nach der Voraussetzung ist, da $p < m$ ist, ϱ gleichfalls durch Radikale darstellbar.

6. Es bleibt der Fall übrig, daß m eine Primzahl ist. In diesem Falle sind alle m^{ten} Einheitswurzeln, mit Ausnahme von 1, primitiv, und wenn man eine von diesen mit r bezeichnet, also etwa

$$r = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$$

setzt, so sind die sämtlichen primitiven Einheitswurzeln vom Grade m:

$$(1) \qquad r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots,\ r^{m-1}.$$

Wenn sich k und k' um ein Vielfaches von m unterscheiden, so ist $r^k = r^{k'}$, und man erhält also auch alle Wurzeln (1) in der Reihe

$$(2) \qquad r^{k_1},\ r^{k_2},\ r^{k_3},\ \ldots,\ r^{k_{m-1}},$$

wenn $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{m-1}$ irgend $m-1$ Zahlen sind, die die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, m-1$ zu Resten nach m haben. Die $m-1$ Zahlen (2) sind die Wurzeln der Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$(3) \qquad \frac{x^m - 1}{x - 1} = x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \cdots + x + 1 = 0.$$

Man kann die Wurzeln dieser Gleichung so anordnen, daß jede von ihnen dieselbe Potenz der vorangehenden ist, wie alle übrigen, und die erste wieder dieselbe Potenz der letzten. Eine solche Anordnung heißt eine cyklische Anordnung.

Um dies nachzuweisen, nehme man eine primitive Wurzel g der Primzahl m, die es nach § 78 immer gibt. Dann ist unter den Resten der Potenzen von g

$$1,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{m-2}$$

jede der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, m-1$ einmal enthalten, und die Größen (1) stimmen also, von der Reihenfolge abgesehen, mit

$$(4) \qquad r,\ r^g,\ r^{g^2},\ \ldots,\ r^{g^{m-2}}$$

überein, die wir, in der gleichen Reihenfolge, auch kürzer mit

$$(5) \qquad r, r_1, r_2, \ldots, r_{m-2}$$

bezeichnen. In dieser Reihe ist jedes Glied die g^{te} Potenz des vorhergehenden, und das erste wieder die g^{te} Potenz des letzten, da nach dem Fermatschen Satze $g^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ ist.

7. Es sei jetzt ε irgend eine $(m-1)^{te}$ Einheitswurzel, also, da $m-1 < m$ ist, nach unserer Voraussetzung eine durch Radikale darstellbare Zahl.

Wir adjungieren die Zahl ε dem Rationalitätsbereiche und betrachten die Funktion

$$\psi(r) = r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2},$$

die wegen (4) und (5) eine rationale Funktion von r ist.

Wenn wir hierin r durch $r_1 = r^g$ ersetzen, so geht r_1 in $r_1^g = r_2$, r_2 in $r_2^g = r_3, \ldots, r_{m-2}$ in $r_{m-2}^g = r$ über, und wir erhalten:

$$\psi(r_1) = r_1 + \varepsilon r_2 + \varepsilon^2 r_3 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r,$$

und folglich, da $\varepsilon^{m-1} = 1$ ist,

$$\psi(r) = \varepsilon \psi(r_1),$$

und ebenso $\psi(r_1) = \varepsilon\psi(r_2)$, $\psi(r_2) = \varepsilon\psi(r_3)$, $\cdots$.

Daraus folgt:

$$\psi(r)^{m-1} = \psi(r_1)^{m-1} = \cdots = \psi(r_{m-2})^{m-1},$$

und es ergibt sich also

$$\psi(r)^{m-1} = \frac{1}{m-1}\left[\psi(r)^{m-1} + \psi(r_1)^{m-1} + \cdots + \psi(r_{m-2})^{m-1}\right].$$

Die rechte Seite dieses Ausdruckes ist aber eine symmetrische Funktion der Wurzeln $r, r_1, r_2, \ldots, r_{m-2}$ der Gleichung (3) und kann also nach dem Hauptsatze von den symmetrischen Funktionen (§ 70, 3.) rational ausgedrückt werden. Dieser Ausdruck wird aber außer rationalen Zahlen noch ε enthalten. Bezeichnen wir mit A also eine Größe des durch ε erweiterten Rationalitätsbereiches, so ist

$$\psi(r)^{m-1} = A,$$

und die Bestimmung von $\psi(r)$ ist auf eine Reihe von Radikalen zurückgeführt, deren Grade die in $m-1$ aufgehenden Primzahlen p sind. Wenn bei den hierbei nacheinander auftretenden reinen Gleichungen $x^p - a = 0$ eine reduzible vorkommen sollte, so tritt nach 5. an Stelle von $\sqrt[p]{a}$ eine p^{te} Einheitswurzel, die nach Voraussetzung durch Radikale darstellbar ist.

Hieraus folgt, daß die Zahlen $\psi(r)$ durch Radikale darstellbar sind.

8. Es gibt $m-1$ Einheitswurzeln ε vom Grade $m-1$, darunter die Zahl 1, und diese sind die Wurzeln der Gleichung $x^{m-1}-1=0$.

In dieser Gleichung sind alle Koeffizienten, mit Ausnahme des ersten und des letzten, gleich Null, und demnach ergibt sich aus den Newtonschen Formeln (§ 71, (6)), daß auch alle Potenzsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-2}$ gleich Null sein müssen, also:

$$(6) \qquad \Sigma\varepsilon = 0, \quad \Sigma\varepsilon^2 = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma\varepsilon^{m-2} = 0,$$

worin sich die Summen über alle ε erstrecken. Setzen wir nun, um die Abhängigkeit von ε anzudeuten,

$$r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon),$$

setzen hierin für ε seine $m-1$ verschiedenen Werte, und bilden die Summe $\Sigma\psi(r, \varepsilon)$ aller dieser Funktionen, so folgt wegen (6):

$$r = \frac{1}{m-1}\Sigma\psi(r, \varepsilon),$$

und es ist also auch r durch Radikale darstellbar und damit der Satz 2. bewiesen.

9. Hiernach können wir die Definition 1. so erweitern:

Eine Zahl heißt durch Radikale darstellbar oder metacyklisch, wenn sie durch sukzessive Adjunktion von Wurzeln reiner Gleichungen von Primzahlgrad, $x^n - a = 0$, ausdrückbar ist, mögen diese reduzibel oder irreduzibel sein.

Denn ist $a = b^n$ die n^{te} Potenz einer Größe des vorangehenden Rationalitätsbereiches, und setzen wir $x = by$, so folgt $y^n - 1 = 0$, und diese Gleichung ist durch Radikale lösbar.

§ 113. Die Gleichung fünften Grades ist im allgemeinen nicht durch Radikale lösbar.

1. Es sei jetzt $f(x)$ eine irreduzible Funktion von ungeradem Primzahlgrad n mit rationalen Koeffizienten, von der wir voraussetzen wollen, daß sie durch eine Kette von Radikalen (die nicht reell vorausgesetzt zu werden brauchen) reduzibel wird. Wir bilden einen Rationalitätsbereich, in den wir alle zur Reduktion von f nötigen Radikale mit Ausnahme des letzten aufnehmen, so daß also $f(x)$ auch in diesem Rationalitätsbereich noch irreduzibel ist. Wenn dieser Rationalitätsbereich die n^{te} Einheitswurzel ε noch nicht enthält, so fügen wir diese noch hinzu, wodurch abermals keine Zerfällung eintreten kann. Denn nach § 112, 2. ist ε durch eine Kette von

Radikalen darstellbar, deren Grad niedriger ist als n, durch die nach § 110, 6. keine Reduktion der Funktion n^{ten} Grades $f(x)$ bewirkt werden kann. Die Adjunktion eines möglicherweise überflüssigen Radikals ist ja immer gestattet.

Die ε rechnen wir also mit zu den „früheren Radikalen". Das letzte Radikal r, durch das die Zerfällung eintritt, muß nach § 110, 6. vom Grade n sei. Es sei also

$$r = \sqrt[n]{\theta},$$

und r sei nicht rational durch die früheren Radikale ausdrückbar. Dann kann θ nicht die n^{te} Potenz einer Größe α des Rationalitätsbereiches sein, weil sonst $r = \varepsilon^k \alpha$ ebenfalls im Rationalitätsbereiche enthalten wäre.

2. Da hiernach $x^n - \theta$ irreduzibel ist, so kann man nach § 110, 5. in jeder Gleichung, die r enthält, r durch $\varepsilon r, \varepsilon^2 r, \varepsilon^3 r, \ldots, \varepsilon^{n-1} r$ ersetzen.

Ist also z. B. für irgend eine rationale Funktion ψ

$$\psi(r) = \psi(\varepsilon r),$$

so ist auch

$$\psi(\varepsilon r) = \psi(\varepsilon^2 r) = \psi(\varepsilon^3 r) = \cdots = \psi(\varepsilon^{n-1} r),$$

und es ist also $\psi(r)$ selbst im Rationalitätsbereich enthalten (§ 110, 4.).

3. Es werde jetzt also $f(x)$ durch Adjunktion von r reduzibel, und es sei $f(x, r)$ ein Faktor von $f(x)$, der auch nach Adjunktion von r nicht weiter zerlegbar ist. Der Koeffizient der höchsten Potenz werde immer gleich 1 angenommen.

Wenn aber $f(x, r)$ ein Faktor von $f(x)$ ist, so gehen nach § 110, 5. die n Faktoren

$$(1) \qquad f(x, r),\ f(x, \varepsilon r),\ f(x, \varepsilon^2 r),\ f(x, \varepsilon^3 r),\ \ldots,\ f(x, \varepsilon^{n-1} r)$$

alle in $f(x)$ auf. Diese Faktoren sind alle zugleich mit $f(x, r)$ irreduzibel; und es sind keine zwei miteinander identisch, da sie sonst nach 2. alle identisch und folglich rational sein müßten, was der Annahme widerspricht, daß $f(x)$ erst nach Adjunktion von r reduzibel werde. Es haben also auch keine zwei der Funktionen (1) einen gemeinschaftlichen Teiler, da ein solcher rational durch r darstellbar und doch in einer der irreduziblen Funktionen (1) enthalten wäre. Das Produkt

$$(2) \quad F(x) = Nf(x, r) = f(x, r) f(x, \varepsilon r) f(x, \varepsilon^2 r) f(x, \varepsilon^3 r) \cdots f(x, \varepsilon^{n-1} r)$$

ist aber rational und folglich durch $f(x)$ teilbar, und da es keine

anderen Faktoren als solche, die auch in $f(x)$ aufgehen, enthalten kann, so ist es eine Potenz von $f(x)$.

Diese Potenz muß aber hier die erste sein, da ein linearer Faktor, der in $F(x)$ mehr als einmal vorkäme, ein gemeinsamer Faktor zweier Funktionen (1) sein müßte. Es ist also

$$(3) \qquad f(x) = f(x, r) f(x, r_1) f(x, r_2) f(x, r_3) \cdots f(x, r_{n-1}),$$

und die $f(x, r)$ sind in bezug auf x vom ersten Grade. Man erhält also die Wurzeln von $f(x)$, wenn man die Faktoren $f(x, r)$ gleich Null setzt, also z. B.

$$(4) \qquad x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_{n-1} r^{n-1},$$

worin die $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ Größen des vorletzten Rationalitätsbereiches sind.

4. Die Funktion n^{ten} Grades $f(x)$ muß immer mindestens eine reelle Wurzel haben, da n ungerade ist und die imaginären Wurzeln nur paarweise vorkommen können; es sind daher entweder alle Wurzeln reell, oder es sind zwei imaginär und $n-2$ reell, oder es sind vier imaginär und $n-4$ reell u. s. f.

5. Wir wollen uns nun die sukzessive Adjunktion der Radikale in der Weise angeordnet denken, daß wir zu jedem imaginären Radikal ϱ, das noch keine Zerfällung von $f(x)$ bewirkt, gleichzeitig das konjugiert imaginäre ϱ' adjungieren. Das ist offenbar gestattet, da die Adjunktion eines möglicherweise überflüssigen Radikals nicht schadet.

Wenn nach dieser Anordnung $r = \sqrt[n]{\theta}$ das erste zerfällende Radikal ist, so sind nur folgende Fälle möglich:

1) Ist θ reell, so kann, da ε dem Rationalitätsbereich angehört, auch r reell angenommen werden.

Wenn dann x_1 eine reelle Wurzel von $f(x)$ ist, so sind die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ in (4) gleichfalls reell; denn wären sie komplex und $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_{n-1}$ ihre konjugiert imaginären Zahlen, die nach unserer Voraussetzung gleichfalls zum Rationalitätsbereich gehören, so wäre auch

$$x_1 = \alpha_0' + \alpha_1' r + \alpha_2' r^2 + \cdots + \alpha'_{n-1} r^{n-1},$$

also

$$(\alpha_0 - \alpha_0') + (\alpha_1 - \alpha_1') r + (\alpha_2 - \alpha_2') r^2 + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}) r^{n-1} = 0.$$

Dies ist aber, da $x^n - \theta$ irreduzibel ist, nicht möglich, außer wenn $\alpha_0 - \alpha_0' = 0$, $\alpha_1 - \alpha_1' = 0$, $\alpha_2 - \alpha_2' = 0$, $\alpha_3 - \alpha_3' = 0, \ldots, \alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1} = 0$, also die α_i reell sind.

Dann ergeben sich die $n-1$ anderen Wurzeln von $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
&x_2 = \alpha_0 + \varepsilon\,\alpha_1 r + \varepsilon^2 \alpha_2 r^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} \alpha_{n-1} r^{n-1},\\
(5)\qquad &x_3 = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1 r + \varepsilon^4 \alpha_2 r^2 + \cdots + \varepsilon^{2(n-1)} \alpha_{n-1} r^{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_n = \alpha_0 + \varepsilon^{n-1} \alpha_1 r + \varepsilon^{2(n-1)} \alpha_2 r^2 + \cdots + \varepsilon^{(n-1)^2} \alpha_{n-1} r^{n-1},
\end{aligned}
$$

die nach 3. alle voneinander und von x_1 verschieden sind.

Nun sind

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \ldots, \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} \text{ konjugiert imaginär mit}$$

$$\varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{n-2}, \ldots, \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}$$

und folglich

$$x_2, \quad x_3, \quad \ldots, x_{\frac{n+1}{2}} \text{ konjugiert imaginär mit}$$

$$x_n, \quad x_{n-1}, \ldots, x_{\frac{n+3}{2}}.$$

Die Funktion $f(x)$ hat also in diesem Falle eine reelle und $n-1$ paarweise konjugiert imaginäre Wurzeln.

Wenn zweitens θ imaginär ist, und θ' konjugiert imaginär mit θ, so sind alle Wurzeln von $x^n - \theta$ imaginär; zu jeder von ihnen, r, gibt es eine bestimmte konjugierte Zahl r', die eine Wurzel von $x^n - \theta' = 0$ ist, und es ist

$$(6)\qquad r r' = r_1 r_1' = r_2 r_2' = \cdots = r_{n-1} r_{n-1}' = \sqrt[n]{\theta\theta'} = R$$

reell. Wir wollen nun anstatt r zuerst die reelle Zahl R adjungieren, wenn sie nicht schon im Rationalitätsbereich enthalten ist, und haben nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

2) Es tritt bereits durch Adjunktion von R eine Reduktion von $f(x)$ ein. Dann ist die Adjunktion von r nicht mehr erforderlich, und da R ein reelles Radikal ist, so kommen wir auf den Fall 1) zurück.

3) Es tritt durch Adjunktion von R noch keine Reduktion von $f(x)$ ein, wozu auch der Fall gehört, daß R rational ist (wie z. B. in der Cardanischen Formel bei den kubischen Gleichungen).

Dann ist die Adjunktion von r selbst noch notwendig zur Lösung der Gleichung. Es ist aber mit r auch zugleich schon $r' = R/r$ adjungiert.

Ist dann $x_1 = \psi(r)$ reell, so ist

$$(7)\qquad \psi(r) = \psi'(r') = \psi'\left(\frac{R}{r}\right),$$

worin ψ' die Bedeutung hat, daß alle in ψ vorkommenden imaginären Zahlen des Rationalitätsbereiches durch ihre gleichfalls dem Rationalitätsbereich angehörigen konjugiert imaginären Zahlen zu ersetzen sind.

Die Gleichung (7) bleibt aber jetzt bestehen, wenn darin r durch jede der Wurzeln $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$ von $x^n - \theta$ ersetzt wird, und da nach (6) auch $R/r_1 = r_1', \ldots$ ist, so folgt

$$\psi(r_1) = \psi'(r_1'), \quad \psi(r_2) = \psi'(r_2'), \quad \ldots, \quad \psi(r_{n-1}) = \psi'(r_{n-1}'),$$

d. h. es sind alle n Zahlen $\psi(r), \psi(r_1), \psi(r_2), \psi(r_3), \ldots, \psi(r_{n-1})$ reell. Die Funktion $f(x)$ hat also in diesem Falle n reelle Wurzeln.

Für den Fall $n = 5$ gibt dies den folgenden Satz:

6. Eine irreduzible algebraisch lösbare Gleichung fünften Grades mit reellen Koeffizienten hat entweder fünf reelle Wurzeln oder eine reelle und vier imaginäre Wurzeln, niemals drei reelle und zwei imaginäre Wurzeln.[1])

7. Um also nachzuweisen, daß nicht jede Gleichung fünften Grades durch Radikale gelöst werden kann, haben wir nur zu zeigen, daß es irreduzible Gleichungen fünften Grades mit rationalen Koeffizienten gibt, die drei reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln haben. Dies kann aber durch unzählige leicht zu bildende Beispiele erhärtet werden.

So ist z. B., wie wir schon früher gesehen haben (§ 69, 6.),

$$f(x) = x^5 - 4x - 2$$

irreduzibel. Es kann überdies $f(x)$ nicht lauter reelle Wurzeln haben, denn da die vierte und die dritte Potenz darin nicht vorkommt, so ist (nach den Newtonschen Formeln) nicht nur die Summe der Wurzeln, sondern auch die Summe ihrer Quadrate gleich Null, was nicht möglich wäre, wenn alle Wurzeln reell wären. Andererseits ist aber

$$f(-2) = -26, \quad f(-1) = +1, \quad f(1) = -5, \quad f(2) = +22.$$

Es ist also $f(x)$ für $x = -2, -1, +1, +2$ abwechselnd negativ und positiv, und muß also, wenn x die Werte von -2 bis $+2$ durchläuft, dreimal durch Null gehen. Folglich hat $f(x)$ drei reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, und ist sonach nicht durch Radikale lösbar. (In § 103 haben wir für diese Funktion $f(x)$ die reellen sowohl als die imaginären Wurzeln näherungsweise bestimmt.)

8. Anmerkung. Bei diesem Beweise ist es nicht notwendig, den Satz vorauszusetzen, daß jede Gleichung fünften Grades Wurzeln hat. Denn wenn sie überhaupt keine Wurzeln hat, so ist sie auch nicht durch Radikale lösbar, und wenn sie eine Wurzel hat, so hat

1) Dieser Satz rührt von Kronecker her.

sie auch fünf; denn ist x_1 die eine Wurzel, so ist $f(x)/(x-x_1)=0$ eine Gleichung vierten Grades, die ja durch Radikale lösbar ist und vier Wurzeln hat.

Es gibt besondere Gleichungen jeden Grades, die durch eine Kette von Radikalen lösbar sind, zu denen unter anderen die aus der Kreisteilung stammenden Gleichungen gehören.

9. Der erste vollständige Beweis für die Unmöglichkeit, die Gleichung 5ten Grades allgemein aufzulösen, der den zahlreichen vergeblichen Versuchen und gescheiterten Hoffnungen, eine solche Auflösung zu finden, eine Ende machte, rührt von Abel her und war die erste bedeutende Leistung dieses großen Forschers.

In der berühmten Abhandlung im ersten Bande des Journals von Crelle stellt Abel die Frage etwas anders als wir sie hier gefaßt haben. Er fragt, ob man eine algebraische, durch Wurzelzeichen ausgedrückte Funktion x der fünf unbestimmten Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 bilden könne, die der Gleichung

$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$$

identisch genügt, und verneint diese Frage.

Damit ist noch nicht entschieden, ob nicht vielleicht für alle ganzzahligen Werte von a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 Zahlen x durch Wurzelziehen aus den rationalen Zahlen abgeleitet werden können, die dieser Gleichung genügen. Diese Frage haben wir hier gleichfalls im verneinenden Sinne beantwortet.

§ 114. Historisches zur Algebra.

1. Im Altertum gab es mehrere berühmte Probleme, die, nach unserer Ausdrucksweise, auf Gleichungen höherer Grade führen, und deren Lösung mit dem Kreis und der geraden Linie nicht gelingen konnte. Wir nennen die Probleme der Würfelverdoppelung, der Dreiteilung des Winkels, das Archimedische Problem, die Kugel durch eine Ebene derart zu teilen, daß die Volumina in gegebenem Verhältnis stehen. Diese Probleme lassen sich alle durch den Schnitt von Kegelschnitten lösen, sie waren aber auch der Anlaß, andere Kurven zu studieren und zu ihrer Lösung zu verwenden, so die Cissoide des Diokles (um 180 v. Chr.), die Konchoide des Nikomedes (um 180 v. Chr.) u. a. Das Merkwürdigste aber in dieser Richtung sind die Schriften des Apollonius[1]) über die Kegelschnitte. Hier finden wir

[1]) Apollonius aus Pergae, einer Stadt in Pamphylien, lebte und wirkte in Alexandrien. Seine Blütezeit fällt unter die Regierung des Ptolemaeus Philopator, die bis zum Jahr 205 v. Chr. währte.

zum ersten Male Probleme behandelt, die nach unserer Sprechweise auf Gleichungen vierten Grades führen. Er weiß, daß sich zwei Kegelschnitte in höchstens vier Punkten schneiden, daß, wenn ein Berührungspunkt vorhanden ist, außerdem höchstens noch zwei Schnittpunkte existieren können, daß sich zwei Kegelschnitte in höchstens zwei Punkten berühren können und ähnliches. Es sind das Sätze über die Wurzeln von Gleichungen vierten Grades und über das Zusammenfallen von zweien dieser Wurzeln. Von besonderem Interesse ist das 5. Buch, das uns allerdings nicht im griechischen Text, sondern in einer in der Mitte des XVII. Jahrhunderts durch Borelli aufgefundenen arabischen Übersetzung bekannt ist (1661 in lateinischer Übersetzung in Florenz gedruckt).

Hier behandelt Apollonius das Problem, die größten und kleinsten Entfernungen eines gegebenen Punktes von der Peripherie eines Kegelschnittes oder, was dasselbe ist, die Normalen an einen Kegelschnitt zu finden, und so sind diese Sätze in erster Linie für die Lehre vom Größten und Kleinsten von Interesse. Algebraisch aber führt dieses Problem auf eine Gleichung vierten Grades, was bei Apollonius seinen Ausdruck darin findet, daß die Fußpunkte der Normalen als Schnitte des gegebenen Kegelschnittes mit einer gleichseitigen Hyperbel gefunden werden. Aber Apollonius kennt und untersucht auch die Diskriminante dieser biquadratischen Gleichung, d. h. die Lage der Punkte, für die zwei der Normalen in eine zusammenfallen. Er gibt, ganz im Sinne unserer analytischen Geometrie, für jede Abszisse eine Ordinate an, bis zu der der Punkt gehen darf, wenn vier Normalen an den Kegelschnitt möglich sein sollen, und wenn man seine Konstruktion in unsere Sprache überträgt, erhält man die Gleichung der Evolute des Kegelschnittes. Diese Konstruktion hängt von einer Kubikwurzel ab, die, wie bei der Würfelverdoppelung durch Hippokrates von Chios (lebte in der 2. Hälfte des V. Jahrh. v. Chr. in Athen) durch zwei mittlere Proportionalen bestimmt wird. Davon, daß Apollonius die Gesamtheit dieser Punkte als Kurve aufgefaßt habe, findet sich in dem uns erhaltenen Text allerdings keine Spur. Aber vielleicht besitzen wir nicht alles, was Apollonius hierüber gelehrt hat, und diese Vermutung wird noch dadurch gestützt, daß gegen Ende des 5. Buches die Minimallinien so eingehend behandelt sind, während die Maximallinien, die doch aus derselben Konstruktion hervorgehen, nur kurz und unvollständig abgetan werden. Es ist dies dem sonstigen Gebrauch der Griechen nicht entsprechend, die bei einer Gattung von Problemen die verschiedenen möglichen Fälle ins einzelne mit gleicher Sorgfalt zu behandeln pflegen.

2. Ich übergehe nun die allmähliche Entwicklung des Begriffs der algebraischen Gleichungen und will auch nur bei-

läufig die Entdeckung der Auflösung der Gleichungen 3ten und 4ten Grades im 16. Jahrhundert erwähnen.[1]) Zu nennen ist aber Vieta[2]) als ein Vorläufer der modernen Algebra, der zuerst den Satz aussprach, daß jede Aufgabe, die auf eine kubische Gleichung führt, entweder durch zwei mittlere Proportionalen lösbar oder auf die Dreiteilung eines Winkels zurückführbar sei. Zur ersten Klasse gehören die kubischen Gleichungen mit einer reellen Wurzel, die durch die Kubikwurzel aus einer reellen Zahl lösbar sind. (Auf zwei mittlere Proportionalen $a : x = x : y = y : b$, woraus $x^3 = a^2 b$ folgt, hatten bereits die Alten das Delische Problem zurückgeführt.) Zur zweiten Klasse gehören die Gleichungen mit drei reellen Wurzeln, der Casus irreducibilis, die nicht durch Radikale aus reellen Zahlen gelöst werden können, die aber nach Vieta durch Winkelteilung lösbar sind. Und da die Gleichungen vierten Grades, wie schon damals bekannt war, auf kubische und quadratische Gleichungen zurückführbar sind, so ergab sich das Gleiche für die biquadratischen Gleichungen.

Hierdurch war die Schwierigkeit, wie man durch Kubikwurzeln aus imaginären Zahlen zu reellen Zahlen kommen könne, aufgeklärt. Diese Sätze wurden später durch Abel sehr verallgemeinert und auf eine große Klasse von Gleichungen höherer Grade ausgedehnt, die heute den Namen „Abelsche Gleichungen" führen.

3. Von hier an sind in der weiteren Entwicklung der Lehre von den algebraischen Gleichungen mehr und mehr zwei Richtungen zu unterscheiden. Die eine geht darauf aus, bei einer Gleichung, deren Koeffizienten numerisch gegeben sind, die Zahlenwerte der Wurzeln durch ein Approximationsverfahren zu berechnen, was ja für die praktische Anwendung der Algebra das Wichtigste ist. Es war längst bekannt, und bei geometrischer Denkweise fast selbstverständlich, daß, wenn eine Funktion $f(x)$ für $x = a$ und $x = b$ entgegengesetztes Zeichen hat, zwischen a und b mindestens eine Wurzel, allgemein eine ungerade Anzahl von Wurzeln liegt, und damit war das Prinzip gegeben, nach dem man sich durch fortschreitende Teilung

---

1) Der erste Entdecker der Auflösung der Gleichungen 3ten Grades ist Scipione del Ferro (von 1496—1526 Professor in Bologna). Es hat sich daran ein heftiger und unschöner Prioritätsstreit zwischen Geronimo Cardano (Hieronymus Cardanus, 1501—1576, Pavia, Rom) und Nicola Tartaglia (1500—1557, Brescia, Venedig) geknüpft. Cardanus hat zuerst in der „Ars magna" (Nürnberg 1545) die Auflösung der kubischen Gleichung veröffentlicht; daher der noch heute gebräuchliche Ausdruck „Cardanische Formel". Ein Schüler des Cardanus, Luigi Ferrari (1522—1565, Bologna, Mailand), ist der Erfinder der Auflösung der Gleichungen vierten Grades.

2) François Viète, Seigneur de la Rigotière, geb. 1540 in Fontenay-le-Comte in Poitou, gestorben 1603 in Paris.

des Intervalls der Wurzel unbegrenzt nähern konnte. Um aber Überflüssiges zu vermeiden, war es wesentlich, die Wurzeln zu separieren, d. h. solche Intervalle zu ermitteln, in denen nur eine Wurzel liegt, oder, allgemeiner, genau zu entscheiden, wie viele Wurzeln in einem gegebenen Intervall liegen. Dies wollte lange nicht gelingen.

Man konnte zwar eine obere und eine untere Grenze der positiven Wurzeln ermitteln, es gab auch eine Anzahl von Theoremen, durch die die Anzahl der Wurzeln in einem Intervall bis auf eine gerade Zahl, und in besonderen Fällen genau, gefunden werden konnte. Hierher gehört die Zeichenregel von Descartes, die wir im § 100 mitgeteilt haben, ferner eine komplizierte Vorschrift von Newton, das Theorem von Budan und Fourier, das Theorem von Rolle.[1])

Ein exaktes, wenn auch praktisch kaum anwendbares Verfahren zur Lösung der Aufgabe ist von Waring[2]) angegeben und später von Lagrange[3]) wiedergefunden. Es beruht darauf, daß die Gleichung gebildet wird, deren Wurzeln die Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, und eine untere Grenze für die positiven Wurzeln dieser Gleichung gesucht wird. Ist diese untere Grenze Δ, so kann in einem Intervall von der Größe Δ höchstens eine Wurzel der gegebenen Gleichung liegen.

Eine völlig befriedigende Lösung der Aufgabe gibt der Sturmsche Lehrsatz[4]), der im § 101 abgeleitet ist. Die Arbeit Sturms ist von Fourier angeregt und steht in Beziehung zu mathematisch-physikalischen Untersuchungen, z. B. zu der Frage, mit wie vielen Knoten eine gespannte Saite schwingen kann, die eine augenscheinliche Ähnlichkeit mit der Frage nach den Wurzeln einer algebraischen Gleichung hat.

Kronecker, der, wie wir schon in § 29 bemerkt haben, in prinzipiellen Untersuchungen den Gebrauch der Irrationalzahlen vermieden wissen will, muß der Aufgabe einen anderen Ausdruck geben, da er Gleichungswurzeln und den Satz von der Wurzelexistenz nicht

---

1) Newton, Arithmetica universalis, bewiesen von Sylvester, Transactions of the R. Irish Academy t. 24 (1871); Budan, Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques (1803); Fourier, Analyse des équations determinées (1831); Rolle, 1652—1719, Traité d'Algèbre 1690.

2) E. Waring, Medit. algebr. Cambridge 1770.

3) L. Lagrange, De la résolution des équations numériques de tous les degrés, Paris 1798 (ges. Werke Bd. III).

4) Jakob Karl Franz Sturm, geboren 1803 in Genf, gestorben 1855 in Paris. Sturms Arbeit erschien zuerst im Bulletin de Férussac 1829 und später in den Schriften der Pariser Akademie 1835. Deutsch mit Noten von Loewy in Ostwalds Klassikern Nr. 143, 1904.

benutzen kann. Er zeigt daher nur, wie man durch rationale Rechnung eine ganze Zahl s bestimmen kann, so daß in einem Intervall von der Größe $1/s$ eine ganze Funktion $f(x)$ höchstens einmal das Zeichen wechseln kann. Hierdurch ist dasselbe erreicht, wie durch die Methode Waring-Lagrange.[1]

4. Das andere Ziel, dem die Algebra zustrebte, ist mehr von theoretischer Bedeutung und geht auf die algebraischen Gesetze aus, durch die die Wurzeln einer Gleichung von den Koeffizienten abhängen. Es war natürlich, daß die Erfolge, die bei den Gleichungen dritten und vierten Grades errungen waren, zu immer neuen Versuchen anregten, auch die Gleichungen höherer Grade, zunächst die vom fünften Grade aufzulösen, d. h. auf Radikale zurückzuführen. Wir wissen, daß sich Leibniz mit dieser Frage beschäftigt hat, und damit steht vermutlich der Versuch im Zusammenhang, den Tschirnhaus[2] in einer Abhandlung aus dem Jahre 1683 veröffentlichte, um das Ziel zu erreichen.

Er führt, wenn x die Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ ist, eine neue Unbekannte $y = \varphi(x)$ ein, worin $\varphi(x)$ eine Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Es genügt dann y gleichfalls einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Koeffizienten aber von den n willkürlichen Koeffizienten in φ abhängen. Diese sucht er dann so zu bestimmen, daß die Gleichung für y die Form $y^n = a$ annimmt. Dieses Verfahren führt zwar für die Gleichungen dritten und vierten Grades zum Ziel, nicht aber bei höheren Gleichungen. Gleichwohl ist das Tschirnhaussche Verfahren für die neuere Algebra von Bedeutung geworden, weil es die Mittel bietet, die höheren Gleichungen auf gewisse Normalformen zu bringen, z. B. die Gleichung 5ten Grades auf die sogenannte Bring-Jerrardsche Form $x^5 + x + a = 0$. (Vgl. Felix Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884.)

5. Einen neuen Anstoß für die Behandlung algebraischer Gleichungen gab die große Abhandlung von Lagrange aus den Schriften der Berliner Akademie von den Jahren 1770—71: „Réflexions sur la résolution algébrique des équations“. Hier werden zunächst die Wege zusammengestellt und auf ihren inneren Gehalt geprüft, auf denen die Gleichungen 3ten und 4ten Grades aufgelöst werden können, zu denen die Untersuchungen von Euler, Bézout (1765) und Waring (1736—1798) hinzugekommen waren. Diese Methoden werden dann verallgemeinert und gezeigt, warum sie bei

1) L. Kronecker, Über den Zahlbegriff. Crelles Journal Bd. 101, 1887.
2) Ehrenfried Walther von Tschirnhaus auf Kießlingswalde, 1651—1708, stand zu Leibniz in näherer persönlicher Beziehung.

höheren Gleichungen nicht zum Ziele führen. Dabei ergibt sich der Begriff der Resolventen, die zwar im allgemeinen von Gleichungen höherer Grade abhängen, aber doch in gewissem Sinne als Vereinfachung aufzufassen sind.

Eine Funktion der Wurzeln, die durch Permutation der Wurzeln eine gewisse Anzahl verschiedener Werte annimmt, genügt einer Gleichung, deren Grad durch die Anzahl dieser Werte bestimmt ist. Da die Anzahl der Permutationen von n Größen $n!$ beträgt, so hat eine Funktion der n Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades höchstens $n!$ Werte und genügt einer Gleichung von diesem Grade.

Durch Benutzung der Resolventen wird aber dieser Grad auf $(n-2)!$ zurückgeführt, also bei einer Gleichung 5ten Grades auf den Grad 6. Die Arbeit von Lagrange ist ein Vorläufer der modernen Algebra, die sich auf die Theorie der Permutationsgruppen und der symmetrischen Funktionen stützt.

6. Nach allen vergeblichen Versuchen, die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zu finden, wurde es mehr und mehr zweifelhaft, ob die Lösung überhaupt möglich sei, ob das Problem richtig gestellt sei. Schon Gauß in seiner Doktordissertation vom Jahre 1799 (Werke Bd. 3, S. 17), in der er zum ersten Male die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung nachweist, spricht sich hierüber deutlich aus. Er betont, daß die Auflösung in dem bisherigen Sinne nichts weiter sei, als die Zurückführung auf reine Gleichungen, und daß die reinen Gleichungen vor den anderen nur die größere Leichtigkeit der numerischen Berechnung voraus hätten, daß aber nichts zu der Annahme berechtige, daß diese Zurückführung allgemein möglich sei. Er kündigt sogar darüber weitere Untersuchungen an, die sich indessen in seinen Werken und in seinem Nachlasse nicht finden. Dagegen gibt Gauß bereits im Jahre 1801 in den „Disquisitiones arithmeticae" ein bedeutsames Beispiel für eine weit tiefer gehende Behandlung algebraischer Gleichungen in der Kreisteilungstheorie. Obwohl die hier vorkommenden Gleichungen zu den algebraisch auflösbaren gehören, so tritt diese Frage doch hinter den zahlreichen anderen Folgerungen, die sich für Algebra und Zahlentheorie ergeben, zurück. Im Vordergrunde steht die Frage nach der sukzessiven Reduktion auf eine Kette von Gleichungen möglichst niedrigen Grades. Die Gaußsche Kreisteilungstheorie ist vorbildlich geworden für alle allgemeineren algebraischen Untersuchungen, und daß sie Gauß selbst schon bedeutend weiter geführt hat, ergibt sich aus einer Bemerkung in den „Disquisitiones", nach der er die gleichen Resultate auf anderen Gebieten, z. B. bei der Teilung der elliptischen Funktionen, erhalten habe, eine Bemerkung, die erst Jahrzehnte später

verstanden und gewürdigt werden konnte, nachdem die Theorie der elliptischen Funktionen durch Abel und Jacobi ausgearbeitet war.

7. Inzwischen war in Italien schon ein ernstlicher Versuch gemacht, die Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichungen 5ten Grades zu beweisen. Dies geschah von Paolo Ruffini in seinem Lehrbuche von 1799 „Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la resoluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto“ [1]), und in fünf weiteren Abhandlungen, deren letzte 1813 erschien, ist er immer wieder darauf zurückgekommen.

Ruffini schlägt im allgemeinen den richtigen Weg ein, indem er von der Untersuchung der Anzahl der Werte ausgeht, die eine Funktion der Wurzeln einer Gleichung bei Vertauschung der Wurzeln annehmen kann, und ist dadurch ein erster Begründer der Gruppentheorie geworden. Aber freilich ist seine Beweisführung noch mancherlei Bedenken unterworfen, und seine Resultate wurden gleich zu Anfang von Malfatti bezweifelt und angefochten. Überdies ist seine Darstellung schwer verständlich und ist außerhalb Italien wenig bekannt und beachtet worden.

Erst in der Abhandlung von Cauchy aus dem Jahre 1815 „Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme“, in der Ruffini beiläufig erwähnt wird, der später (1844) eine ausführlichere folgt, wird die Zusammensetzung der Permutationen und der Begriff der Gruppe (unter dem Namen Système conjuguée), die freilich auch schon implizite bei Ruffini vorkommen, ausdrücklich zur Grundlage der Theorie gemacht und die Terminologie und Bezeichnung ausgebildet. [2])

8. Einen bedeutenden Schritt nach vorwärts hat die Algebra durch Niels Henrik Abel gemacht (geb. 5. August 1802 in Finnö bei Stavanger in Norwegen, gest. 6. April 1829 auf dem Eisenwerk Froland bei Arendal).

---

1) Paolo Ruffini, 1765—1822, war von Beruf eigentlich Arzt, hatte zuletzt eine Lehrstelle für Mathematik an der Universität Modena. Vgl. die sehr lesenswerte Schrift von Burckhardt „Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini“ Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Leipzig 1892.

2) Augustin Louis Cauchy, geb. 1789 in Paris, lebte nach der Julirevolution als Erzieher des Herzogs von Bordeaux in Prag, wirkte dann wieder in Paris und starb 1857. Er ist einer der vielseitigsten Forscher und fruchtbarsten Schriftsteller auf fast allen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik. Seine Werke werden in vielen Bänden von der Pariser Akademie herausgegeben.

Von dem liebenswürdigen, zu heiterer leichter Lebensauffassung, zu Freundschaft und geselligem Verkehr geschaffenen, aber durch Sorge, Not und Krankheit darniedergedrückten und schließlich aufgeriebenen Menschen Abel haben uns seine Landsleute Holst, Störmer und Sylow aus Anlaß des hundertsten Geburtstages ein schönes Bild durch die Herausgabe seiner Briefe gegeben. Ohne Anregung von außen, unter Schwierigkeiten aller Art hat er sich zum Mathematiker herangebildet, hat dann während eines kurzen Aufenthaltes in Deutschland und Frankreich die Arbeiten geschaffen, die ihm schon im 27. Lebensjahre einen unsterblichen Namen gemacht haben. Der Tod hat ihn in dem Augenblick hinweggerafft, da ihm durch eine Berufung nach Berlin eine sorgenfreie Zukunft zu winken schien. Diese Berufung war das Werk des trefflichen Crelle, des Begründers des Journals für reine und angewandte Mathematik, der sich des jungen, fremd nach Deutschland gekommenen Abel alsbald väterlich angenommen, ihn auf alle Weise gefördert und sich schon dadurch den Dank der Wissenschaft verdient hat.

Abel hatte seine wissenschaftlichen Versuche mit der Gleichung fünften Grades begonnen und glaubte ihre Lösung gefunden zu haben. Wenn das auch ein Irrtum war, den er selbst bald erkannte, so hatte er doch das Gute, die Aufmerksamkeit der norwegischen Mathematiker, namentlich Hansteens, auf ihn zu lenken und ihm deren Unterstützung zu sichern, die ihm sein Leben lang treu blieb. Degen in Kopenhagen war es, der zwar nicht den Fehler in Abels Auflösung der Gleichung 5ten Grades erkannte, aber ihr doch mißtraute und Abel auf das Feld hinwies, auf dem er bald so großes leisten sollte, die elliptischen Funktionen.

Aber auch die Algebra hat er nicht aus den Augen verloren und gerade in der Verbindung mit der Theorie der elliptischen Funktionen die schönsten Entdeckungen gemacht.

Nachdem ihm, wie es sein mußte, die Auflösung der Gleichungen 5ten Grades mißlungen war, setzte er sich das Ziel, zu entscheiden, ob diese Lösung überhaupt möglich sei oder nicht; er lieferte so, ohne von den Arbeiten Ruffinis Kenntnis zu haben, den ersten vollständigen Beweis der Unmöglichkeit (1824—1826). Aber weit entfernt damit die Sache für abgetan zu halten, fragte er weiter nach der Natur der speziellen Gleichungen höheren Grades, die eine algebraische Auflösung gestatten. Hatte ja die Kreisteilungslehre von Gauß bereits solche Gleichungen kennen gelehrt, und die oben erwähnte rätselhafte Andeutung von Gauß, die uns gleichfalls Abel zuerst enträtselt hat, wies auf weitere Gebiete hin, in denen solche Gleichungen auftreten. Es war die Teilung der elliptischen und höheren Funktionen, die hier in Frage kam, und weiter noch die Theorie der komplexen Multiplikation

der elliptischen Funktionen. So lehrte uns Abel eine große Klasse algebraisch lösbarer Gleichungen kennen, die auch sonst die merkwürdigsten Eigenschaften haben, die heute noch nach ihm die Namen „Abelsche Gleichungen“ führen.

Abel hat sich aber noch eine viel allgemeinere Aufgabe gestellt, nämlich:

Alle Gleichungen von bestimmten Graden zu finden, die algebraisch lösbar sind, und zu entscheiden, ob eine vorgelegte Gleichung algebraisch lösbar ist oder nicht, und was damit zusammenhängt, die Form eines algebraischen Ausdruckes zu finden, der einer algebraischen Gleichung genügen kann.

Hierüber hat er in einer erst lange nach seinem Tode veröffentlichten unvollendeten Arbeit fundamentale Sätze gegeben, auf denen später Kronecker weitergebaut hat.[1])

9. Eine eigenartige Erscheinung in der Geschichte der Algebra ist Evariste Galois. Er war am 26. Oktober 1811 bei Paris geboren und fiel in einem Duell im Mai 1832, hat also noch nicht das Alter von 21 Jahren erreicht.

Im Alter von 16 Jahren, als Schüler des Collège Louis le Grand hat Galois begonnen, sich mit den tieferen Fragen der Algebra zu beschäftigen und hat mehrere Abhandlungen darüber der Pariser Akademie eingereicht und in den „Annalen von Gergonne“ und in dem „Bulletin des sciences mathématiques de Férussac“ veröffentlicht.

Die wichtigsten Ergebnisse seiner Untersuchungen hat er in einem Briefe niedergelegt, den er am Abend vor dem verhängnisvollen Duell, erfüllt von Todesahnung, an seinen Freund Auguste Chevalier geschrieben hat, der in der Revue encyclopédique und später nochmals von Liouville in seinem Journal veröffentlicht ist.

Galois hat die Theorie der Substitutionsgruppen und ihre Anwendung auf die Algebra in gewissem Sinne zum Abschluß gebracht, indem er zeigte, wie alle Fragen, die man in bezug auf eine Gleichung stellen kann, darauf zurückkommen. Er zeigt, nachdem er scharf und präzis definiert hat, was man unter rational zu verstehen hat (Rationalitätsbereich), daß die ganze Natur einer algebraischen Gleichung durch eine Gruppe von Permutationen bestimmt ist, die seitdem allgemein die Galoissche Gruppe der Gleichung genannt wird. Hieraus findet er auf die einfachste Weise die Bedingung, daß eine Gleichung von Primzahlgrad algebraisch lösbar ist, die er so

1) Die Werke von Abel, einschließlich des Nachlasses, sind in zwei Ausgaben erschienen: die erste von Abels Lehrer und Freund Holmböe 1839, die zweite von Sylow und Lie besorgt, und 1881 bei B. G. Teubner in Leipzig gedruckt.

formuliert, daß alle Wurzeln der Gleichung rational durch zwei unter ihnen darstellbar sein müssen. Aber auch andere Fragen, z. B. unter welchen Bedingungen eine Gleichung auf eine andere von niedrigerem Grade zurückführbar ist, oder wie man durch Adjunktion die Gruppe der Gleichung erniedrigen kann, nimmt er in Angriff, und gibt dabei interessante Anwendungen auf das damals erst neu erschlossene Gebiet der elliptischen Funktionen.

10. Über die Natur des Rationalitätsbereiches ist in diesen Untersuchungen keine spezielle Voraussetzung gemacht. Er kann aus rationalen oder auch aus irrationalen Zahlen bestehen, und es können auch veränderliche Größen darin vorkommen, und so beziehen sich alle diese Sätze sowohl auf Zahlen als auf algebraische Funktionen, deren Theorie, in Verbindung mit den aus ihrer Integration hervorgehenden Transzendenten, in den Händen von Abel, Riemann und Weierstraß einen hohen Grad von Vollendung erreicht hat.

11. In der Theorie der algebraischen Zahlen freilich sind durch die allgemeinen Theorien die Probleme eigentlich erst gestellt, die nun auch im einzelnen zu lösen sind. Es ist das fernere Ziel, die Eigenschaften der besonderen Arten algebraischer Zahlen tiefer zu ergründen, und hier bietet sich der weiteren Forschung ein unermeßliches Feld. Es sind bisher nur die aus der Kreisteilung und aus der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen stammenden Zahlen, von denen wir eine einigermaßen genauere Kenntnis besitzen.

DRITTES BUCH.

ANALYSIS.

Zwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen.

§ 115. Reihen mit positiven Gliedern.

1. Unter einer Zahlenreihe verstehen wir eine gesetzmäßige Aufeinanderfolge von Zahlen irgend welcher Art:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

und nennen diese Zahlen auch die Glieder der Reihe. Die Reihe heißt unendlich, wenn das Gesetz so beschaffen ist, daß es ohne Grenzen angewendet werden kann, daß also zu jedem Index ν das entsprechende a_ν berechnet werden kann.

Eine solche unendliche Reihe bilden z. B. die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ und allgemeiner die Glieder einer arithmetischen Progression $a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b, \ldots$ oder die Glieder einer geometrischen Progression $1,\ a,\ a^2,\ a^3, \ldots$. Andere Beispiele sind

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ \ldots,\ n^k,$$

worin der Exponent k eine beliebige positive oder negative Zahl sein kann.

Es kommen aber auch Zahlenreihen vor, die nach viel komplizierteren Gesetzen gebildet sind, z. B. die aufeinanderfolgenden Näherungswerte eines unendlichen Dezimalbruches.

2. Wir betrachten zunächst solche unendliche Reihen, deren Glieder positive Zahlen sind. Aus einer solchen Reihe:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

können wir eine zweite Zahlenreihe ableiten, indem wir die Summen der zwei, drei, vier, ... ersten Glieder nehmen. Wenn wir das erste Glied a_1 noch als erstes Glied der neuen Reihe hinzufügen, so erhalten wir die Reihe

$$A_1 = a_1,$$
$$A_2 = a_1 + a_2,$$
$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$A_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

deren n^{tes} Glied

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ist. Die Reihe der A_n ist gleichfalls unendlich; sie hat ebenfalls positive Glieder; sie hat aber noch die besondere Eigentümlichkeit, daß ihre Glieder mit n zugleich wachsen, daß also

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \cdots$$

ist. Denn jedes Glied A_{n+1} entsteht aus dem vorhergehenden durch Hinzufügung einer positiven Zahl a_{n+1}.

Die Reihe der A_ν heißt die Summenreihe der Reihe der a_ν.

Hat man umgekehrt eine Zahlenreihe $A_1, A_2, A_3, \ldots$, deren Glieder positiv sind und zugleich mit dem Index wachsen, so erhält man eine Reihe $a_1, a_2, \ldots$, deren Summenreihe die erstere ist, wenn man

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2 - A_1, \quad a_3 = A_3 - A_2, \cdots$$

setzt. So ist die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... die Summenreihe der aus lauter Einern bestehenden Reihe.

Die Reihe

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \ldots$$

ist die Summenreihe von

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \frac{1}{4 \cdot 5}, \ldots$$

u. s. f.

3. In Bezug auf die Summenreihen sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn es eine Zahl K von der Art gibt, daß alle A_n immer unter K bleiben, so haben die Zahlen A_n nach § 25 eine obere Grenze, die wir mit A bezeichnen wollen, d. h. es sind alle Zahlen A_n kleiner als A. Wenn aber $\varDelta$ eine beliebige, noch so kleine positive Zahl ist, so liegen zwischen A und $A - \varDelta$ Zahlen A_n. Da die A_n mit n zugleich wachsen, so liegen, wenn ein A_m in diesem Intervall liegt, auch alle A_n, in denen $n > m$ ist, in demselben Intervall.

In diesem Falle heißt die Summenreihe der A_n konvergent. Sie konvergiert gegen A, und die Konvergenz ist um so besser, je eher man bei gegebenem $\varDelta$ in das Intervall $(A - \varDelta, A)$ gelangt. Man nennt A die Summe der Reihe der a_n und setzt auch

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots.$$

Man sagt, die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, für die man auch einen einzelnen Buchstaben A setzen kann, konvergiert.

Häufig bedient man sich des Zeichens Σ (Summe) und setzt demgemäß

$$A = \sum^{h} a_h,$$

worin der Index h bei Σ bedeutet, daß h die Werte 1, 2, 3, ... bis ins Unendliche durchläuft.

4. Um den Grenzwert einer Größenreihe zu bezeichnen, bedient man sich des Zeichens Lim (Abkürzung für limes = Grenze) und schreibt also hier:

(1) $$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} A_n = A,$$

und hierin bedeutet das unter Lim gesetzte $n = \infty$ (n gleich Unendlich), daß A_n dem Wert A beliebig nahe kommt, wenn n über alle Grenzen wächst. Man bezeichnet auch A, mit etwas ungenauem Ausdruck, als die Summe der unendlichen Menge von Summanden a_h. Genauer können wir sagen:

> Die Summe einer unendlichen Reihe von positiven Gliedern ist die obere Grenze aller Summen aus einer endlichen Zahl dieser Glieder.

Wenn die Summe konvergent ist, so kann man durch Bildung der Summe A_n für ein hinlänglich großes n die Zahl A bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit berechnen, und hierauf beruht die häufige Anwendung der unendlichen Reihen.

Man beachte, daß bei der Bildung der Summe A_n die Glieder $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in ihrer Reihenfolge genommen sind, d. h. daß keiner der Summanden fehlen darf. Ist aber n schon so groß, daß A_n in dem vorgeschriebenen Intervall $(A - \Delta, A)$ liegt, so bleibt man in diesem Intervall, wenn man von den folgenden Gliedern $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ beliebige, auch außer der Reihe, also mit Übergehung von einigen, addiert, da ja hierdurch A_n noch vergrößert wird, aber doch immer unter A bleibt.

5. Wenn aber keine Zahl existiert, unter der die Summen A_n bleiben, wenn also die A_n für hinlänglich große n über jede gegebene Zahl hinaus wachsen, dann heißt die Summenreihe der a_n divergent. Die Gesamtheit der Zahlen a_n hat in diesem Fall keine Summe. Man schreibt dann wohl auch

(2) $$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} A_n = \infty,$$

worin das Zeichen ∞ (Unendlich) nicht eine bestimmte Zahl bedeutet,

sondern es soll damit nur gesagt sein, daß die A_n über jede Zahl hinaus wachsen, wenn n unbegrenzt wächst.

6. Als eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz ergibt sich die, daß, wenn eine beliebig kleine positive Zahl ε angenommen ist, alle Summanden a_n kleiner als ε sind, wenn n einen gewissen, von ε abhängigen, hinlänglich großen Zahlenwert m überschritten hat, d. h. es müssen die Zahlen a_n die untere Grenze Null haben, in Zeichen:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0\,. \tag{3}$$

Denn wenn, wie groß auch m sei, immer noch größere Zahlen n vorkommen, für die $a_n > \varepsilon$ ist, so kann man n so groß annehmen, daß in A_n eine beliebig große Anzahl h von Gliedern vorkommt, die größer als ε sind, und daß also $A_n > h\varepsilon$ wird. Für jedes gegebene ε kann aber $h\varepsilon$ beliebig groß gemacht werden, wenn man h genügend groß nimmt.

Die Bedingung (3) ist also für die Konvergenz notwendig, aber sie ist keineswegs hinreichend.

Wir werden später Beispiele von Reihen kennen lernen, in denen die Bedingung (3) befriedigt ist, und die gleichwohl divergent sind.

§ 116. Unendliche geometrische Reihen.

1. Als erstes Beispiel einer unendlichen Reihe wollen wir die geometrische Reihe

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4, \ldots$$

betrachten, in der x eine positive Zahl sein soll. Für die Summe A_n erhalten wir nach § 63:

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn also $x < 1$ ist, so sind alle A_n kleiner als $1/(1-x)$, und $1/(1-x)$ ist zugleich die obere Grenze aller A_n, weil x^n mit unendlich wachsendem n unter jede Grenze heruntersinkt.

Es ist daher unter dieser Voraussetzung die Reihe der A_n konvergent, und wir können setzen

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}\,. \tag{2}$$

Ist aber $x > 1$, so wächst A_n mit n über alle Grenzen, da in diesem

Falle x^n über alle Grenzen wächst. Die Reihe der A_n ist also für $x > 1$ divergent.

Für $x = 1$ endlich ist

$$A_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = n,$$

und auch dies wächst mit n über alle Grenzen. Die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ist daher konvergent, wenn $x < 1$, divergent, wenn $x \overline{\gtrless} 1$ ist.

2. Zu den konvergenten geometrischen Reihen gehören auch die periodischen Dezimalbrüche, und der Beweis, den wir in § 75, 11. dafür gegeben haben, daß ein periodischer Dezimalbruch immer in einen gemeinen Bruch verwandelt werden kann, ist im Grunde nichts anderes, als die Summation dieser unendlichen geometrischen Reihe.

Wenn nämlich ein unendlicher Dezimalbruch

$$\gamma = 0{,}z_1 z_2 z_3 \ldots$$

die Periode

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$$

hat und die dekadisch geschriebene Zahl

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_f = m$$

gesetzt wird, so ist die Bedeutung dieses Dezimalbruches:

$$\gamma = m 10^{-f} + m 10^{-2f} + m 10^{-3f} + \cdots$$
$$= m 10^{-f}(1 + 10^{-f} + 10^{-2f} + \cdots),$$

also, wenn $x = 10^{-f}$ ist und der Bruch (2) mit 10^f erweitert wird:

$$\gamma = \frac{m}{10^f - 1},$$

und dies ist ein rationaler Bruch, dessen Nenner eine mit lauter Neunern geschriebene ganze Zahl ist.

3. Auch ein nicht periodischer Dezimalbruch ist die Summe einer konvergenten unendlichen Reihe, denn ist

$$\gamma = 0{,}z_1 z_2 z_3 \ldots,$$

so setzen wir

$$\gamma_n = z_1 10^{-1} + z_2 10^{-2} + z_3 10^{-3} + \cdots + z_n 10^{-n},$$

und alle diese γ_n sind kleiner als 1; folglich ist die Reihe γ konvergent.

§ 117. Weitere Beispiele divergenter und konvergenter Reihen.

1. Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die unendliche Reihe

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots,$$

deren Glieder $a_n = 1/n$ zwar der Bedingung § 115, 6. genügen, die aber, wie wir sehen werden, trotzdem divergiert.

Es ist nämlich

$$1 > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

und man kann so die Summe (1) in eine beliebig große Zahl von Teilsummen zerlegen, deren jede größer als $\frac{1}{2}$ ist, und deren Gesamtsumme also beliebig groß wird.

2. Um das Wachsen etwas genauer zu untersuchen, setzen wir

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

und für irgend ein m:

$$\sigma_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m-1}.$$

Wenn wir die m Glieder dieser Summe durch den zu kleinen Wert $1/2m$ ersetzen, so wird die Summe verkleinert, und ersetzen wir die Glieder durch $1/m$, so wird die Summe vergrößert. Es ist daher

$$1 > \sigma_m > \frac{1}{2}.$$

Nehmen wir $m = 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots 2^{\nu-1}$, so wird

$$A_{2^\nu - 1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_8 + \cdots + \sigma_{2^{\nu-1}}.$$

Es ist also

$$\nu > A_{2^\nu - 1} > \frac{\nu}{2},$$

und wenn $n \geqq 2^\nu - 1$ ist, so ist $A_n > \frac{\nu}{2}$ und wächst daher mit n ins Unendliche. Folglich ist die Reihe (1) divergent.

3. Wir betrachten ferner die Reihe

$$(2) \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots,$$

worin h irgend ein Exponent sei, der nicht notwendig ganzzahlig sein muß.

Ist $h = 1$, so geht S_h in die eben betrachtete Reihe A über, deren Divergenz wir nachgewiesen haben. Wenn $h < 1$ wird, so wird jedes Glied von S_h noch größer als das entsprechende Glied von A, und folglich wird die Reihe S_h dann um so mehr divergent sein.

Es bleibt also noch der Fall $h > 1$ übrig.

Um die Konvergenz in diesem Falle zu untersuchen, bemerken wir, daß die Summe

$$\sigma_m = \frac{1}{m^h} + \frac{1}{(m+1)^h} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^h}$$

vergrößert wird, wenn wir alle m Glieder durch das erste $1/m^h$ ersetzen. Demnach ist

$$\sigma_m < \frac{1}{m^{h-1}}.$$

Dies wenden wir auf unsere Reihe an, indem wir $m = 1, 2, 4, 8, \ldots$ setzen:

$$1 = 1,$$

$$\frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} < \frac{1}{2^{h-1}},$$

$$\frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \frac{1}{6^h} + \frac{1}{7^h} < \frac{1}{2^{2(h-1)}},$$

$$\frac{1}{8^h} + \frac{1}{9^h} + \cdots + \frac{1}{15^h} < \frac{1}{2^{3(h-1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und wenn wir diese Teilsummen bis zu einem beliebigen Gliede hin addieren und

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots + \frac{1}{n^h}$$

setzen, so ergibt sich

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^{h-1}} + \frac{1}{2^{2(h-1)}} + \frac{1}{2^{3(h-1)}} + \cdots,$$

worin jetzt die Summe auf der rechten Seite ins Unendliche ausgedehnt werden kann, weil dadurch die Summe ja nur vergrößert wird.

Da nun $h > 1$, also $h-1$ positiv und $1/2^{h-1}$ ein echter Bruch ist, so läßt sich die Summe der geometrischen Reihe auf der rechten Seite dieser Ungleichung nach § 116 finden, und es ergibt sich

$$S_n < \frac{1}{1 - 2^{1-h}},$$

und die Reihe (2) ist also konvergent, wenn $h > 1$ ist, divergent, wenn $h \lesseqgtr 1$ ist.

§ 118. **Kennzeichen der Konvergenz.**

1. Es lassen sich die Resultate der beiden letzten Paragraphen durch einen allgemeinen Satz über Reihenkonvergenz wesentlich verallgemeinern.

Dieser Satz lautet so:

Ist

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

eine konvergente unendliche Reihe (mit positiven Gliedern), und ist

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots$$

irgend eine unendliche Reihe positiver Zahlen, die alle unter einer endlichen Grenze g bleiben, so ist auch die Reihe

$$K = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \cdots$$

konvergent.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich fast von selbst. Denn setzen wir

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$
$$K_n = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \cdots + k_n a_n,$$

so folgt aus den Voraussetzungen:

$$(1) \qquad K_n < g A_n,$$

und wenn daher alle A_n unter einer Grenze A bleiben, so bleiben die K_n unter der Grenze gA, und dies ist (bei Reihen mit positiven Gliedern) die hinreichende Bedingung der Konvergenz.

2. Diese Schlußweise wird in nichts geändert, wenn unter den Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ auch Null zugelassen wird, denn dann bleiben die K_n positiv, und die Ungleichung (1) bleibt bestehen. Es haben also auch dann noch die K_n eine obere Grenze. Daraus ergibt sich:

Die Summe aus irgend einem Teil der Glieder einer konvergenten Reihe ist gleichfalls konvergent.

3. Wenn man in einer unendlichen Reihe irgend eine bestimmte endliche Anzahl von Gliedern irgendwie abändert, so wird in bezug auf die Divergenz oder Konvergenz der Reihe nichts geändert.

Denn ist m so groß, daß A_m alle abgeänderten Glieder enthält, so sind alle A_n, in denen $n > m$ ist, durch die Abänderung nur um eine und dieselbe endliche Größe geändert, und haben also auch nach der Abänderung eine endliche Grenze oder nicht, je nachdem das eine oder das andere vor der Abänderung stattfand.

4. Die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe läßt sich in manchen Fällen aus dem Bildungsgesetz der Glieder a_n beurteilen, und dazu führt der Satz 1. in Verbindung mit den Beispielen des vorigen Paragraphen. Das erste dieser Kennzeichen ist das folgende:

Wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

so beschaffen sind, daß das Verhältnis $a_{n+1} : a_n$ von einem bestimmten n an immer kleiner als ein echter Bruch bleibt, insbesondere also, wenn

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta$$

ein echter Bruch ist, so ist die Reihe konvergent.

Um den Satz zu beweisen, nehme man eine Zahl x an, die der Ungleichung

$$\theta < x < 1$$

genügt, und setze $a_n = k_n x^n$. Dann ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k_{n+1}}{k_n} x < \theta,$$

folglich, da $\theta : x$ ein echter Bruch ist,

$$k_{n+1} < k_n.$$

Die k_n bilden also eine Reihe abnehmender positiver Zahlen und bleiben daher alle unter einer endlichen Grenze. Da x ein echter Bruch ist, so ist die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

konvergent, und nach dem Satz 1. konvergiert also auch die Reihe

$$k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Ist der Grenzwert $a_{n+1} : a_n$ größer als 1, so wachsen die a_n mit n zugleich und können also nicht den Grenzwert Null haben. Mithin ist die Reihe schon nach § 115, 6. divergent.

Der Grenzwert 1 für den Quotienten $a_{n+1} : a_n$ kann aber sowohl bei divergenten als bei konvergenten Reihen vorkommen.

Die Reihen, auf die wir die Frage hier zurückgeführt haben:

$$X = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots,$$

heißen Potenzreihen in bezug auf x. Sie sind konvergent, wenn die $k_1, k_2, k_3, \ldots$ endlich bleiben und x ein echter Bruch ist. Zu dieser Klasse gehören auch die unendlichen Dezimalbrüche, die man erhält, wenn man $x = 1/10$ setzt und unter $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Ziffern, d. h. Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, 9$ versteht.

5. Dieses Kennzeichen der Konvergenz ist auf das Beispiel der Reihen S_h § 117, 3. nicht anwendbar, denn wenn $a_n = n^{-h}$ ist, so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^h},$$

und diese Quotienten haben den Grenzwert 1, was auch h sei. Es gibt aber unter den S_h, wie wir gesehen haben, sowohl konvergente als divergente Reihen.

Wir können aber aus diesem Beispiel selbst, das wir direkt untersucht haben, ein neues Kriterium gerade für solche Fälle herleiten, in denen das erste Kriterium ohne Entscheidung läßt.

Wenn na_n mit n über alle Grenzen wächst oder einen von Null verschiedenen Grenzwert g hat, so ist die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ divergent.

Denn unter einer dieser Voraussetzungen läßt sich eine positive Zahl c so annehmen, daß von einem hinlänglich großem Werte m von n an

$$a_n > \frac{c}{n}$$

ist. Es ist also auch

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots > c\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots\right),$$

und die Summe auf der rechten Seite dieser Ungleichung wird mit unendlich wachsender Gliederreihe unendlich (nach § 117, 1.).

6. Hiernach ist z. B. die Reihe

$$\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+2\beta} + \frac{1}{\alpha+3\beta} + \frac{1}{\alpha+4\beta} + \cdots,$$

in der β eine positive Zahl ist, divergent, da der Grenzwert von

$$\frac{n}{\alpha+\beta n} = \frac{1}{\frac{\alpha}{n}+\beta}$$

gleich $1:\beta$, also nicht gleich Null ist.

7. Wenn ein Exponent h gefunden werden kann von der Art, daß

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} a_n n^h = g$$

ein endlicher Grenzwert ist, so ist die Reihe $a_1 + a_2 + \cdots$ konvergent, wenn $h > 1$ ist.

Denn nach dieser Voraussetzung liegen die Zahlen

$$a_n n^h = k_n$$

alle unter einer endlichen Grenze, und da nach § 117, 3. die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \cdots$$

konvergiert, so konvergiert nach 1. auch die Reihe

$$k_1 + \frac{k_2}{2^h} + \frac{k_3}{3^h} + \cdots = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

8. Ist

$$f(n) = \alpha n^h + \alpha_1 n^{h-1} + \alpha_2 n^{h-2} + \cdots + \alpha_h,$$

worin $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ gegebene Zahlen sind, von denen α positiv angenommen ist, so ist

$$\frac{f(n)}{n^h} = \alpha + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_h}{n^h},$$

und der Grenzwert dieses Ausdruckes für unbegrenzt wachsendes n ist also gleich α. Es bleibt also

$$\frac{n^h}{f(n)} = k_n$$

unter einer endlichen Grenze, und die Reihe

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots = \frac{k_1}{1^h} + \frac{k_2}{2^h} + \frac{k_3}{3^h} + \cdots$$

ist, wenn $h > 1$ ist, konvergent.

9. Hiernach ist z. B. die Summe der reziproken Werte der aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \cdots,$$

deren allgemeines Glied

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

ist, konvergent. Wir sind hier in der Lage, die Summe wirklich bestimmen zu können; denn es ist

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

und folglich

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

was für $n = \infty$ den Wert 2 erhält.

§ 119. Die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

1. Wir haben früher bei der Theorie der Logarithmen gesehen, durch welche Erwägungen Neper darauf geführt wurde, als Basis seines Logarithmensystems eine Zahl $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ zu benutzen, worin Δ eine sehr kleine Zahl (bei Neper ein Zehnmilliontel) war. Setzt man $\Delta = 1/n$, so kommt man auf eine Zahl von der Form

$$N = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

worin n eine sehr große Zahl ist. Um über die Natur dieser Zahlen N, die alle positiv sind, Aufschluß zu erhalten, nehmen wir zunächst n als ganze Zahl an und entwickeln für ein unbestimmtes n nach dem binomischen Satze. Wenn wir in der Formel

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdots (n-(n-1))}{n!} x^n$$

$x = 1 : n$ setzen, so folgt:

$$(1) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!},$$

woraus zunächst zu schließen ist, daß alle Zahlen N größer als 2 sind, da alle auf das erste folgenden Glieder positiv sind. Andererseits erhalten wir, wenn wir für alle Differenzen $1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{n-1}{n}$ die größere Zahl 1 setzen:

$$(2) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!};$$

da nun ferner:

$$2! = 2, \quad 3! = 2 \cdot 3 > 2^2, \quad n! > 2^{n-1}$$

ist, so folgt um so mehr:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

und indem man die geometrische Reihe nach § 116 summiert:

$$(3) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \cdot$$

Es sind also alle diese Zahlen N kleiner als 3, und sie müssen folglich (nach § 25) eine obere Grenze haben, die wir nach einem feststehenden allgemeinen Gebrauch mit dem Buchstaben e bezeichnen.

2. Wir beweisen weiter, daß die Zahlen N zugleich mit n wachsen. Zu dem Ende bemerken wir, daß die Summanden auf

der rechten Seite von (1) alle positiv sind, und daß wir also den Ausdruck verkleinern, wenn wir einen Teil der Glieder weglassen. Ist also $m < n$, so ist

$$(4)\quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!};$$

ferner ist, da $m < n$ ist,

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{m},\quad 1 - \frac{2}{n} > 1 - \frac{2}{m}, \cdots,$$

und mithin ist a fortiori:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber, wie aus der Formel (1) folgt, wenn darin m für n gesetzt wird, gleich $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, und folglich, wie bewiesen werden sollte,

$$(5)\quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \text{ wenn } n > m.$$

Wir schließen hieraus, daß für jedes n

$$(6)\quad e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

daß N sich dem Grenzwert e um so mehr annähert, je mehr n wächst, und daß N für hinlänglich große n diesem Grenzwert beliebig nahe kommt, ohne ihn doch vollständig zu erreichen.

3. Man könnte hiernach die Zahl e durch Ausrechnung der Potenz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für ein hinlänglich großes n bis zu jedem Grad der Genauigkeit finden. Wegen allzugroßer Weitläufigkeit ist aber dieser Weg praktisch nicht gangbar. Ein viel einfacherer Weg zur Berechnung dieser Zahl ist folgender:

Aus (4) und (6) folgt für jedes m und jedes größere n:

$$(7)\quad e > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m}.$$

Da nun, wenn man n hinlänglich groß nimmt, für jedes gegebene m die Faktoren

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\quad \left(1-\frac{2}{n}\right),\quad \left(1-\frac{3}{n}\right),\quad \cdots,\quad \left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

der Einheit beliebig nahe gebracht werden können, so folgt aus (7) für jedes beliebige m:

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

und mit Hilfe von (2):

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Nun können nach der Definition von e die beiden Zahlen e und $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ einander so nahe gebracht werden als man will, und mithin kommt auch die zwischen ihnen gelegene Summe

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} \tag{8}$$

dem Werte e so nahe, als man will, wenn m hinlänglich groß ist, und dieser Ausdruck kann dann leicht in einen Dezimalbruch umgewandelt werden.

Hiermit ist die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

bereits nachgewiesen. Sie folgt aber auch aus dem allgemeinen Kennzeichen § 118, 4., denn es hat hier

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

den Grenzwert Null.

4. Um eine Schätzung für die Größe des Fehlers zu gewinnen, den man begeht, wenn man e aus dem Ausdruck (8) berechnet, setzen wir

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \varDelta_m$$

und für ein beliebiges $n > m$:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \varDelta_n.$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned}\varDelta_m - \varDelta_n &= \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\\ &= \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots n}\right).\end{aligned}$$

Es ist aber

$$1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots n}$$
$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m+1}},$$

und die letzte Summe ist gleich $2\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right)$, also kleiner als 2. Folglich ergibt sich

$$\Delta_m < \Delta_n + \frac{2}{(m+1)!},$$

und da man nun nach 3., indem man n groß genug nimmt, Δ_n so klein machen kann als man will, so folgt

(9) $$\Delta_m < \frac{2}{(m+1)!}.$$

Die Berechnung des Ausdruckes (8) ist leicht, da man, um das m^{te} Glied aus dem $(m-1)^{\text{sten}}$ zu erhalten, dieses nur durch m zu dividieren hat. Man erhält z. B. auf sieben Dezimalstellen richtig:

2
0,5
0,1666666667
0,0416666667
0,0083333333
0,0013888889
0,0001984127
0,0000248016
0,0000027557
0,0000002756
0,0000000251
―――――――
2,7182818 .

Ein genauerer Wert ist

$$e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ 23536\ 02874\ 71353.$$

5. Von der Voraussetzung, daß in dem Ausdruck

$$N = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

n nur als ganze Zahl wachsen sollte, können wir uns leicht befreien, und damit den allgemeinen Satz beweisen:

Der Grenzwert von

$$X = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

für ein irgendwie unbegrenzt wachsendes x ist gleich der Zahl e.

Dies ergibt sich aus dem jetzt zu beweisenden Hilfssatze:

Ist $x < y$, so ist

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y. \tag{10}$$

Wir haben in § 63, 3. für eine beliebige ganze Zahl n die identische Gleichung bewiesen

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

worin a und b ganz beliebige Größen sein können.

Nehmen wir a und b positiv und $a > b$ an, so wird die Summe auf der rechten Seite, die aus n positiven Gliedern besteht, vergrößert, wenn wir b durch a ersetzen, und es ist daher

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1}$$

oder

$$a^n - b^n < na^{n-1}(a - b), \tag{11}$$

woraus weiter folgt:

$$a^{n-1}(a - n(a - b)) < b^n \tag{12}$$

unter der Voraussetzung $a > b$.

Wir verstehen unter p eine zweite ganze Zahl und setzen:

$$a = 1 + \frac{p}{n - 1}, \quad b = 1 + \frac{p}{n},$$

$$a - b = \frac{p}{n(n-1)}, \quad a - n(a - b) = 1,$$

und dann ergibt die Ungleichung (12)

$$\left(1 + \frac{p}{n - 1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n,$$

und indem man diese Formel wiederholt anwendet:

$$\left(1 + \frac{p}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n,$$

wenn m und n zwei positive Zahlen sind und

$$m < n$$

ist. Diese Ungleichung bleibt richtig, wenn wir rechts und links die p^{te} Wurzel ziehen, und wir erhalten

$$\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}} < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}. \tag{13}$$

Irgend zwei positive rationale Zahlen x, y lassen sich nun mit demselben Nenner darstellen, und wir können also, wenn $x < y$ ist,

$$x = \frac{m}{p}, \quad y = \frac{n}{p}$$

setzen. Dann aber geht die Ungleichung (13) in (10) über, und diese ist also für rationale x und y bewiesen.

Daß aber der Satz auch für irrationale x und y noch richtig bleibt, folgt aus dem Fundamentalsatz der Stetigkeit (§ 37, 8. und § 26, 5.).

Daraus folgt nun unmittelbar die Richtigkeit unseres Satzes. Denn sind m und n ganze Zahlen und

$$m < x < n,$$

so ist

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

und wenn also m hinlänglich groß genommen wird, so kommt $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ und folglich auch $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ der Zahl e beliebig nahe.

6. Wir können den Satz 5. noch dahin erweitern, daß X auch dann noch die Grenze e hat, wenn x negativ ist und dem absoluten Werte nach ins Unendliche wächst.

Setzen wir nämlich in der Ungleichung (11)

$$a = 1, \quad b = 1 - \frac{p^2}{n^2}, \quad a - b = \frac{p^2}{n^2},$$

so folgt

$$1 - \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n < \frac{p^2}{n}$$

und folglich

$$1 > \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{p^2}{n}.$$

Da sich nun mit unendlich wachsendem n und festgehaltenem p die rechte Seite dieser Ungleichung der Grenze 1 nähert, so folgt, daß sich auch $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n$ und folglich auch $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{p}}$ mit unendlich wachsendem n der Grenze 1 (von unten her) annähert. Setzen wir also

$$x = \frac{n}{p},$$

so ergibt sich für $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$ und ein unendlich wachsendes x der Grenzwert 1.

Es ist aber:

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

und da $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ den Grenzwert e und die linke Seite den Grenzwert 1 hat, so hat $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ den Grenzwert $1 : e$ und folglich auch

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$$

den Grenzwert e, wie bewiesen werden sollte.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

§ 120. Allgemeine Definition der Summe einer unendlichen Reihe.

1. Es genügt für die Anwendungen nicht, unendliche Reihen mit nur positiven Gliedern zu betrachten. Man muß die Untersuchung auch auf solche Reihen ausdehnen, in denen positive und negative Glieder vorkommen. Wenn die Anzahl der negativen Glieder endlich ist, dann kann die Frage nach der Konvergenz durch den Satz § 118, 3. auf den Fall von nur positiven Gliedern zurückgeführt werden. Wenn aber die Anzahl der positiven Glieder sowohl als der negativen unbegrenzt ist, müssen wir einen anderen Weg einschlagen; wir kommen in diesem Falle nicht mehr mit dem Begriff der oberen Grenze aus, sondern müssen den Begriff der Grenze allgemeiner fassen.

2. Es sei jetzt

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots$$

eine unendliche Reihe von Gliedern, für die in bezug auf die Vorzeichen keine Beschränkung besteht. Wir setzen wie früher:

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n.$$

Es sei C irgend eine Zahl, $\varDelta$ eine beliebig kleine gegebene positive Zahl und α, β seien zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß

$$(1) \qquad \alpha < C < \beta, \quad 0 < \beta - \alpha < \varDelta$$

sei.

Es heißt dann C die Grenze der Zahlen $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$, wenn man die Zahl m so bestimmen kann, daß

$$(2) \qquad \alpha < C_n < \beta, \quad \text{wenn} \quad n > m.$$

Es sind also die C_n Näherungswerte für die Zahl C in demselben Sinne, wie wir diesen Ausdruck im § 26 gebraucht haben.

Wenn eine solche Zahl C existiert, so setzen wir $\lim_{n=\infty} C_n = C$ und nennen C die Summe der unendlichen Reihe.

Wir können dann auch sagen, daß die Größen C_n bei wachsendem n um den Wert C schwanken, daß aber die Schwankungen immer kleiner werden und schließlich unter jede Grenze heruntersinken, wenn n unbegrenzt wächst. Wir schreiben in diesem Falle

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

und die Reihe, die wir auch die Reihe C nennen, wird dann konvergent genannt. Für den Fall, wo die $c_1, c_2, c_3, \ldots$ alle positiv sind, fällt diese Definition der Konvergenz und der Summe der Reihe mit den früher gegebenen zusammen.

3. Als allgemeines notwendiges und hinreichendes Kennzeichen der Konvergenz ergibt sich folgendes:

Man bezeichne mit m, n irgend zwei natürliche Zahlen und setze

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}. \tag{3}$$

Die Reihe C ist konvergent, wenn $R_{n,m}$ dem absoluten Werte nach kleiner wird als eine beliebig kleine Zahl ω, sobald n und $n+m$ beide größer sind als eine hinlänglich große Zahl N.

Diese Bedingung läßt sich in unserer Zeichensprache auch so ausdrücken

$$\lim_{N=\infty} R_{n,m} = 0. \tag{4}$$

Sie ist aber nicht bloß hinreichend, sondern auch notwendig.

4. Daß die Bedingung (4) für die Konvergenz notwendig ist, ist leicht einzusehen. Denn wenn $R_{n,m}$ immer noch größer werden könnte als irgend ein positives ω, wie groß auch N sei, so würden

$$C_{n+m} - C_n = R_{n,m}$$

gleichfalls größer als ω sein können, wie groß auch n angenommen wäre; die Schwankungen von C_n würden also nicht unter ω heruntergehen, wie groß auch n angenommen würde.

5. Um nachzuweisen, daß die Bedingung (4) auch hinreichend ist, müssen wir aus ihr die Existenz einer Zahl C ableiten, die natürlich im allgemeinen irrational sein wird, selbst dann, wenn die Zahlen

c_n rational sein sollten. Diese Zahl C müssen wir also durch einen Schnitt definieren (§ 24).

Greifen wir irgend eine Zahl z aus der Reihe der reellen Zahlen heraus, so ist von zweien nur eins möglich:

α) Wie groß auch N sei, es gibt immer noch Zahlen $n > N$, für die $C_n > z$ wird. Ein solches z wollen wir eine „Zahl a" nennen.

β) Man kann N so groß annehmen, daß, wenn $n > N$ ist, immer $C_n \leqq z$ ist. Ein solches z soll eine „Zahl b" heißen.

Unter der Voraussetzung (4) gibt es sowohl Zahlen a als Zahlen b. Denn nach (4) können wir n_0 so groß annehmen, daß, was auch m sei,

$$R_{n_0, m} = C_{n_0+m} - C_{n_0} < \omega \text{ (dem absoluten Werte nach)}$$

für ein beliebig anzunehmendes positives ω. Folglich ist, wenn wir den Wert n_0 festhalten und $n = n_0 + m$ setzen, für jedes beliebige m:

$$C_{n_0} - \omega < C_n < C_{n_0} + \omega.$$

Ist also $z > C_{n_0} + \omega$, so ist z eine Zahl b.

Ist aber $z < C_{n_0} - \omega$, so ist z eine Zahl a, und sonach existieren diese beiden Arten von Zahlen. Überdies ist jede Zahl a kleiner als jede Zahl b, und die beiden Zahlenarten a, b werden also durch einen Schnitt voneinander getrennt. Dieser Schnitt erzeugt eine Zahl C, von der wir nun noch nachzuweisen haben, daß sie die Grenze der C_n ist. Dies ergibt sich so:

Ist α eine beliebige Zahl a, β eine beliebige Zahl b, so ist, wenn wir ausschließen, daß α oder β gleich C sei, nach dem Begriff des Schnittes

$$\alpha < C < \beta. \tag{5}$$

Wir nehmen nun eine positive Zahl ω so klein an, daß auch noch

$$\alpha + \omega < C < \beta - \omega \tag{6}$$

ist, mit anderen Worten, daß auch noch $\alpha + \omega$ eine Zahl a und $\beta - \omega$ eine Zahl b ist, und nehmen N so groß, daß, wenn n_0 und $n_0 + m$ größer als N sind,

$$C_{n_0} - \omega < C_{n_0+m} < C_{n_0} + \omega. \tag{7}$$

Nun läßt sich wegen α) und β) eine Zahl $n_0 > N$ so annehmen, daß $\alpha + \omega < C_{n_0}$, $\beta - \omega > C_{n_0}$, daß also

$$\alpha < C_{n_0} - \omega < C_{n_0} + \omega < \beta, \tag{8}$$

und wegen (7) für jedes positive m:

$$\alpha < C_{n_0} - \omega < C_{n_0+m} < C_{n_0} + \omega < \beta,$$

also wenn $n_0 + m = n$ gesetzt wird, für jedes hinlänglich große n:

$$\alpha < C_n < \beta. \tag{9}$$

Aus (5) und (9) aber ergibt sich, daß C die Grenze der C_n ist, wie bewiesen werden sollte.

6. Hiernach läßt sich das Theorem § 118, 1. dahin erweitern:

Ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

eine konvergente Reihe aus positiven Gliedern und sind

$$k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots$$

positive oder negative Zahlen, die ihrem absoluten Werte nach unter einer endlichen Grenze g bleiben, so ist auch

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \cdots$$

konvergent.

Denn es ist

$$k_n a_n + k_{n+1} a_{n+1} + \cdots + k_{n+m} a_{n+m}$$

dem absoluten Werte nach kleiner als

$$g(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}),$$

woraus die Konvergenz folgt.

§ 121. Unbedingte und bedingte Konvergenz.

1. Es mögen nun in der Reihe

$$(\mathfrak{C}) \qquad c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$$

sowohl positive als negative Glieder vorkommen. Wir bezeichnen die positiven unter ihnen mit

$$(\mathfrak{A}) \qquad a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

und die negativen mit

$$(\mathfrak{B}) \qquad -b_1, -b_2, -b_3, -b_4, \ldots$$

In ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$) sollen die Glieder in derselben Reihenfolge genommen sein, wie sie in ($\mathfrak{C}$) vorkommen, und beide Reihen sollen unendlich sein.

Wenn die Summen

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

beide konvergieren, so konvergiert auch die Summe

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots,$$

und es ist

(1) $$C = A - B.$$

Denn wir können

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

zerlegen in

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu - b_1 - b_2 - \cdots - b_\nu = A_\mu - B_\nu,$$

und wenn n ins Unendliche wächst, so wachsen auch μ und ν ins Unendliche. Es ist also

$$\operatorname{Lim} C_n = \operatorname{Lim} A_\mu - \operatorname{Lim} B_\nu,$$

was auf die Gleichung (1) führt. Wir haben damit den Satz bewiesen:

Eine unendliche Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist immer konvergent, wenn die Reihe der positiven Glieder für sich und die Reihe der negativen Glieder für sich konvergiert.

Unter dieser Voraussetzung ist auch die Reihe aus lauter positiven Gliedern konvergent, die man erhält, wenn man die Glieder $c_1, c_2, c_3, \ldots$ durch ihre absoluten Werte $c_1', c_2', c_3', \ldots,$ d. h. wenn man die b_i durch $-b_i$ ersetzt, und zwar ist die Summe

$$C' = c_1' + c_2' + c_3' + \cdots = A + B,$$

und umgekehrt kann die Reihe C' nur dann konvergieren, wenn sowohl A als B konvergent sind. Eine Reihe, die konvergent bleibt, wenn alle Glieder durch ihren absoluten Wert ersetzt werden, heißt unbedingt konvergent. Bei diesen Reihen gelten im wesentlichen dieselben Gesetze, wie bei den Reihen mit nur positiven Gliedern.

2. Wenn von den beiden Reihen A, B die eine konvergiert, die andere divergiert, so kann die Reihe C nicht konvergieren, denn es wird dann $C_n = A_\mu - B_\nu$ positiv oder negativ unendlich, je nachdem A oder B divergiert. Anders ist es aber, wenn die Reihen A und B beide divergieren. Dann wird zwar die Reihe C', deren Glieder die absoluten Werte der Glieder von C sind, sicher auch divergieren. Es kann aber trotzdem die Reihe C konvergieren, da sich das unendliche Anwachsen ins positive und negative Unendlich bei $A_\mu - B_\nu$ gegenseitig ausgleichen kann. Wir haben es dann mit einer besonderen Art von Reihen zu tun, die man bedingt konvergent nennt. Der Grund dieser Bezeichnung wird nachher noch deutlicher hervortreten.

3. Für die bedingte Konvergenz haben wir nicht so bestimmte Kennzeichen wie für die unbedingte. Es gilt aber der folgende einfache Satz:

Wenn in einer Reihe, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben:

(1) $$P = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - \cdots$$

die $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ positive abnehmende Größen sind, also für jedes n

(2) $$p_n < p_{n-1},$$

und wenn

(3) $$\lim_{n=\infty} p_n = 0$$

ist, so ist P konvergent.

Der Beweis ist sehr einfach: Da die Differenzen

$$p_1 - p_2, \; p_3 - p_4, \; p_5 - p_6, \; \cdots, \; p_{2m-1} - p_{2m}$$

alle positiv sind, so sind, wenn wir

$$P_n = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \cdots \pm p_n$$

setzen, die P_n alle positiv, und die Summen

$$P_2, \; P_4, \; P_6, \; \ldots, \; P_{2m}$$

bilden eine Reihe wachsender Zahlen. Dagegen bilden die

$$P_1, \; P_3, \; P_5, \; \ldots, \; P_{2m-1}$$

eine Reihe abnehmender Zahlen, denn es ist z. B.

$$P_1 = p_1, \quad P_3 = p_1 - (p_2 - p_3),$$
$$P_5 = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5), \cdots$$

Es ist zugleich

$$P_{2m-1} - P_{2m} = p_{2m},$$

also positiv, und daher

$$P_{2m} < P_{2m-1}.$$

Wegen (3) nähert sich aber die Differenz $P_{2m-1} - P_{2m}$ mit unendlich wachsendem m dem Grenzwert Null, und damit ist bewiesen, daß die beiden Größenreihen P_{2m}, P_{2m-1} einer und derselben Grenze P zustreben. (Vgl. denselben Schluß in § 88.)

4. Wenn zwar die Bedingung (2), nicht aber (3) erfüllt ist, wenn sich also die p_n mit unendlich wachsendem n einer von Null verschiedenen Grenze nähern, so haben die P_{2m} eine obere, die P_{2m-1} eine untere Grenze, aber diese Grenzen sind nicht einander gleich. Die Summe P_n nähert sich daher zwei verschiedenen Grenzen, je nachdem man mit einem geraden oder einem ungeraden n abbricht. Solche Reihen, die übrigens in den Anwendungen wenig vorkommen, nennt man oszillierende Reihen, weil ihr Wert gewissermaßen

zwischen zwei Werten oszilliert. Das einfachste Beispiel einer Reihe dieser Art ist

$$+1-1+1-1+1-1+\cdots;$$

diese Summe hat den Wert 0 oder den Wert 1, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Zahl von Gliedern addiert. Zu den konvergenten Reihen sind diese nicht mehr zu rechnen.

5. Zu den Reihen, die nach dem Satz 3. konvergieren, gehören unter anderen die beiden folgenden

$$P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots, \tag{4}$$

$$Q = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots. \tag{5}$$

Die Reihe P enthält alle Brüche mit dem Zähler 1 (Stammbrüche), die mit ungeradem Nenner mit dem positiven, die mit geradem Nenner mit dem negativen Zeichen. Die Reihe Q enthält nur Glieder mit ungeradem Nenner, aber gleichfalls mit abwechselndem Zeichen. Es zeigt sich hier aber eine eigentümliche Erscheinung. Wir setzen zur Abkürzung:

$$U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1},$$

$$G_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Dann ist

$$S_n = 2G_n,$$

und die Summe der $2n$ ersten Glieder der Reihe P ist:

$$P_{2n} = U_n - G_n;$$

ferner ist

$$S_{2n} = U_n + G_n = 2G_{2n}$$

und folglich

$$P_{2n} = U_n - G_n = 2(U_n - G_{2n}). \tag{6}$$

Nun ist aber $U_n - G_{2n}$ die Summe der $3n$ ersten Glieder der Reihe

$$R = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots, \tag{7}$$

die ebenfalls alle Brüche mit dem Zähler 1 enthält, und wie die Reihe P die mit ungeradem Nenner mit dem positiven, die mit geradem Nenner mit dem negativen Zeichen.

Die Glieder der Reihe R sind aber nicht der Größe nach geordnet, sondern es folgen auf ein positives Glied immer zwei negative,

dann wieder ein positives u. s. f. Die Gleichung (6) zeigt aber, daß auch R konvergiert, und daß

$$R = \frac{1}{2} P$$

ist. Es hat also die Reihe R eine andere Summe als die Reihe P, obwohl jedes Glied, das in der einen Reihe vorkommt, auch in der anderen enthalten ist und umgekehrt.

Dies Resultat erscheint auf den ersten Blick paradox, und es wird es noch mehr, wenn man sich, wie es bisweilen geschieht, so ausdrückt, daß die Summe einer solchen Reihe von der Reihenfolge der Summation abhängig sei, was dem kommutativen Gesetz der Addition zu widersprechen scheint. Der wahre Grund der Erscheinung ist der, daß in der Summe $R_{3n} = U_n - G_{2n}$ zwar alle Glieder vorkommen, die in P_{2n} enthalten sind, aber außerdem noch eine gewisse Anzahl negativer Glieder, die in P erst später auftreten, und die Anzahl dieser Glieder wächst mit n ins Unendliche.

6. Dieses Verhalten der bedingt konvergenten Reihen wird sehr geklärt durch eine Betrachtung von Dirichlet[1]), die zu einem merkwürdigen Satz führt.

Es seien

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

zwei divergente Reihen aus positiven Gliedern. Wir setzen aber voraus, daß

(8) $$\operatorname{Lim} a_n = 0, \quad \operatorname{Lim} b_n = 0$$

sei. Daß es solche Reihen gibt, haben wir in § 117 gesehen. Wir können z. B. die vorhin benutzten Reihen

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots,$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

dafür nehmen.

Wir bilden eine Reihe

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots,$$

deren Glieder $c_1, c_2, \ldots$ dieselben Zahlen sind wie die $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$, jedoch so angeordnet, daß wir zunächst eine Anzahl positiver Glieder $a_1, a_2, \ldots$, dann eine Anzahl negativer Glieder $-b_1, -b_2, \ldots$, hierauf wieder einige positive Glieder a, dann wieder negative Glieder $-b, \ldots$ nehmen, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Glieder a sowohl als $-b$ in ihrer Reihenfolge zur Verwendung kommen, ohne daß eines übergangen wird oder mehrmals vorkommt.

1) Zuerst publiziert in Riemanns nachgelassener Abhandlung: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe".

ganz einfachen Überlegung.

Nehmen wir x positiv an, so können wir, da die Reihe A unendlich wird, mit der Summation von Gliedern a so weit gehen, daß die Summe größer wird als x, und daß der Überschuß über x kleiner ist, als das zuletzt hinzugefügte a. Hierauf nimmt man so viele Glieder $-b$, bis die Summe wieder unter x heruntergesunken und der Unterschied kleiner ist als das zuletzt abgezogene b. Darauf addiert man Glieder a, bis man wieder über x gekommen ist, und fährt beliebig lange fort. Der Unterschied zwischen der Summe und der Zahl x ist immer kleiner als das zuletzt hinzugefügte Glied a oder $-b$ und kann also wegen (8) unter jede Grenze heruntergebracht werden. Die so gebildete Summe C konvergiert also gegen x, und damit ist der Satz bewiesen.

§ 122. Der Abelsche Satz von der Stetigkeit der Potenzreihen.

1. Wir haben in § 118 schon Reihen von der Form betrachtet

(1) $$S(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

die wir Potenzreihen genannt haben; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißen die Koeffizienten der Reihe, x das Argument. Wir haben gesehen, daß diese Reihe konvergiert, wenn die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiv sind und unter einer endlichen Grenze liegen, und wenn $x < 1$ ist, und die Konvergenz bleibt nach § 120, 6. bestehen, wenn die $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zum Teil negativ sind, wenn sie nur dem absoluten Werte nach unter einer endlichen Grenze bleiben.

Wir wollen jetzt die Annahme machen, daß die Reihe der Koeffizienten

(2) $$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

konvergent sei und den Wert A habe. Da dies nur dann möglich ist, wenn sich die a_n der Grenze Null nähern, so schließt diese Annahme die Konvergenz der Reihe (1) für $x < 1$ ein.

2. Es besteht unter dieser Voraussetzung der folgende Satz:

Wenn sich x von kleineren Werten der Grenze 1 annähert, so ist A der Grenzwert, dem sich $S(x)$ bis auf jeden beliebigen Grad annähert. In Zeichen

(3) $$\operatorname*{Lim}_{x=1} S(x) = A.$$

Dieser Satz ist zuerst von Abel bewiesen und zu wichtigen Folgerungen benutzt worden. Der Beweis ergibt sich so:

3. Man setze

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

so daß nach der Voraussetzung

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} A_n = A$$

ein bestimmter Wert ist.

Nach (4) kann man die a_n durch die A_n ausdrücken, und man erhält

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1, \\ a_2 &= A_2 - A_1, \\ a_3 &= A_3 - A_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n &= A_n - A_{n-1}, \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} & a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n = \\ & \quad = (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}) + A_n x^n. \end{aligned}$$

Ist nun $x < 1$, so hat x^n für ein unendlich wachsendes n den Grenzwert 0, und A_n bleibt endlich. Demnach ergibt sich, so lange $x < 1$ ist:

(4) $$S(x) = (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots),$$

und die unendliche Reihe $S(x)$ ist also in eine andere Reihe verwandelt, die gleichfalls für $x < 1$ konvergent ist.

Wir verstehen jetzt unter n irgend eine endliche Zahl, und setzen nach (4)

(5) $$S(x) = (1-x) F_n(x) + (1-x) R_n(x),$$

worin

$$\begin{aligned} F_n(x) &= A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}, \\ R_n(x) &= A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

so daß $R_n(x)$ wieder eine unendliche Reihe ist, deren Koeffizienten $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ dem Werte A alle beliebig nahe kommen, wenn n groß genug angenommen wird. Setzen wir also $A_n = A + \alpha_n$, $A_{n+1} = A + \alpha_{n+1}, \ldots$ und beachten die Summenformel der geometrischen Reihe

$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = \frac{x^n}{1-x},$$

so ist

$$R_n(x) = \frac{A x^n}{1-x} + \frac{\varrho}{1-x},$$

worin

$$\frac{\varrho}{1-x} = \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \alpha_{n+2} x^{n+2} + \cdots$$

Wir können nun n so groß annehmen, daß die $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$ dem absoluten Werte nach alle kleiner als eine beliebig kleine positive Größe $\varDelta$ werden, und dann ist, ebenfalls dem absoluten Werte nach,

$$\frac{\varrho}{1-x} < \varDelta(x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots) = \frac{\varDelta x^n}{1-x},$$

also

$$\varrho < \varDelta x^n < \varDelta.$$

Es wird dann nach (5)

$$S(x) = (1-x)\,F_n(x) + Ax^n + \varrho,$$

$$(6) \qquad S(x) - A = (1-x)\,F_n(x) - A(1-x^n) + \varrho.$$

Hieraus läßt sich schließen, daß man x so nahe an 1 nehmen kann, daß die Differenz $S(x) - A$ kleiner als eine beliebig kleine Größe $2\varDelta$ wird, und dies ist der Inhalt der Formel (3).

Denn auf der rechten Seite von (6) kann man das willkürliche n zunächst so groß nehmen, daß $\varrho < \varDelta$ wird, und wenn dies geschehen ist, kann man $1 - x$ und $1 - x^n$ wieder so klein (und positiv) annehmen, daß auch

$$(1-x)\,F_n(x) - A(1-x^n) < \varDelta$$

ist, und dann ist $S(x) - A < 2\varDelta$ (dem absoluten Werte nach).

Hiermit ist also der Abelsche Satz erwiesen. Er kann dazu dienen, die Summe A zu finden, wenn man $S(x)$ und seinen Grenzwert für $x = 1$ ermitteln kann.

§ 123. Reihen mit komplexen Gliedern.

1. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$$

komplex sind, so haben sie die Form

$$c_1 = a + b_1 i, \quad c_2 = a_2 + b_2 i, \quad c_3 = a_3 + b_3 i, \ldots,$$

worin die $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ reelle Zahlen sind.

Die Summe einer solchen Reihe

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots$$

ist nur dann als konvergent zu bezeichnen, wenn die reellen Teile für sich und die imaginären Teile für sich konvergieren, wenn also

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$$

konvergente Reihen sind, und dann ist

$$C = A + Bi$$

die Summe der Reihe C.

Denn wenn A und B die Grenzen von A_n und B_n sind, so ist $A + Bi$ die Grenze von $A_n + B_n i$; und es kann auch niemals $A_n + B_n i$ einen Grenzwert haben, wenn nicht den A_n und B_n einzeln ein solcher zukommt.

2. Für die Konvergenz solcher Reihen ergibt sich dasselbe allgemeine Kennzeichen, wie für die Reihen mit reellen Gliedern, nämlich, wenn wir

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}$$

setzen, so muß $R_{n,m}$, dem absoluten Werte nach, unter jede noch so kleine Zahl heruntersinken, wenn n und $n + m$ beide größer sind, als eine hinlänglich große Zahl N.

Als spezieller Fall ist darin enthalten, daß c_n selbst dem absoluten Werte nach unter jeden Zahlenwert heruntersinken muß, was hiernach eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung der Konvergenz ist, wie in § 115, 6.

Unter dem absoluten Wert einer komplexen Zahl $z = x + iy$ haben wir schon früher (§ 51) die positive Zahl

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

verstanden.

Es ist nun hier zweckmäßig, für den absoluten Wert einer komplexen Zahl z ein einfaches, allgemeines Zeichen zu gebrauchen, und wir folgen Weierstraß, wenn wir dazu die Größe z in zwei vertikale Striche einschließen. Demnach ist

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Über die Konvergenz der Reihen C mit komplexen Gliedern gilt der allgemeine Satz:

Die Reihe C ist konvergent, wenn die Reihe der absoluten Werte

$$C' = |c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| + \cdots$$

konvergiert.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Satze § 51, 5., nach dem der absolute Wert einer Summe niemals größer ist als die Summe der absoluten Werte; denn darnach ist, wenn wir

$$R'_{n,m} = |c_{n+1}| + |c_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}|$$

setzen,

$$|R_{n,m}| \leqq R'_{n,m},$$

und wenn also $R'_{n,m}$ die Null zur Grenze hat, so gilt dasselbe von $R_{n,m}$.

Dieser Satz läßt sich aber ebensowenig wie der entsprechende Satz bei reellen Reihen mit positiven und negativen Gliedern, umkehren. Es kann sehr wohl vorkommen, daß die Reihe C konvergiert, während die Reihe C' divergiert. Wir unterscheiden also auch hier bedingte und unbedingte Konvergenz. Wir nennen eine konvergente Reihe mit komplexen Gliedern unbedingt konvergent, wenn die Reihe der absoluten Werte der Glieder konvergiert, sonst bedingt konvergent.

4. Es ergibt sich hieraus weiter der Satz:

Wenn die Reihe

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots$$

unbedingt konvergiert, und wenn

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots$$

irgend eine Reihe komplexer Zahlen ist, deren absolute Werte

$$|c_1|,\ |c_2|,\ |c_3|,\ |c_4|,\ \ldots$$

nicht ins Unendliche wachsen, so ist auch die Reihe

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 + \cdots$$

unbedingt konvergent.

Denn setzen wir

$$R_{n,m} = c_{n+1} w_{n+1} + c_{n+2} w_{n+2} + \cdots + c_{n+m} w_{n+m},$$

so ist, da der absolute Wert eines Produktes gleich dem Produkte der absoluten Werte der Faktoren ist,

$$|R_{n,m}| \overline{\leqq} |c_{n+1}| \cdot |w_{n+1}| + |c_{n+2}| \cdot |w_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}| \cdot |w_{n+m}|.$$

Wenn also die $|c_{n+1}|,\ |c_{n+2}|,\ \cdots,\ |c_{n+m}|$ alle kleiner als eine bestimmte positive Zahl g sind, so ist

$$|R_{n,m}| < g\,\{|w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots + |w_{n+m}|\},$$

und wenn die Reihe W unbedingt konvergiert, so sinkt die rechte Seite dieser Ungleichung unter jede beliebige Zahl herunter. Das Gleiche gilt also von der linken, und der Satz 4. ist damit bewiesen.

§ 124. Potenzreihen. Konvergenzkreis.

1. Wir betrachten jetzt Potenzreihen, in denen sowohl das Argument z als die Koeffizienten c_ν komplexe Zahlen sein können,

und bezeichnen sie, indem wir noch ein von dem Argument unabhängiges Glied c_0 hinzufügen, mit

(1) $$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots.$$

Wir setzen

$$z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

und stellen z nach § 51 durch die Punkte einer Ebene dar. Es ist dann r der absolute Wert $|z|$ von z, und die repräsentierenden Punkte aller Werte z mit demselben absoluten Wert r liegen auf einem Kreis (r), dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist.

2. Es gibt Potenzreihen, die für jeden Wert des Argumentes z konvergieren. Eine solche Reihe ist z. B.

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$

denn in der Reihe der absoluten Werte

$$1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} + \cdots$$

ist das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ zum n^{ten} Gliede

$$\frac{r^n}{n!} : \frac{r^{n-1}}{(n-1!)} = \frac{r}{n}$$

und hat also die Null zur Grenze, welchen Wert auch r haben mag. Daraus ergibt sich die Konvergenz nach § 118, 4.

Dagegen gibt es auch Reihen, die für keinen Wert von z (außer $z = 0$) konvergieren. Eine solche ist z. B.

$$1 + 1!z + 2!z^2 + 3!z^3 + 4!z^4 + \cdots.$$

Denn nach § 52, 2. kann man, wie klein auch das positive r sein mag, wenn c eine Zahl $> r$ ist, n so groß annehmen, daß $n!r^n > c^n$ wird; es wachsen daher schon die einzelnen Glieder dieser Reihe mit n ins Unendliche, und die Reihe kann nicht konvergent sein.

Im allgemeinen wird aber eine Potenzreihe für gewisse Werte von z konvergieren, für andere divergieren. Für diese Reihen gelten die folgenden Sätze:

3. Ist γ_n der absolute Wert von c_n und r_1 eine positive Zahl von der Art, daß $\gamma_n r_1^n$ mit unbegrenzt wachsendem n nicht unendlich wird, so konvergiert die Reihe $S(z)$ unbedingt für jeden Wert von z, dessen absoluter Wert kleiner als r_1 ist.

Wenn nämlich $r : r_1$ ein echter Bruch ist, so konvergiert die Reihe

$$1 + \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots$$

und folglich auch (nach § 123, 3., 4.)

$$\gamma_0 + \gamma_1 r_1 \frac{r}{r_1} + \gamma_2 r_1^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \gamma_3 r_1^3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots,$$

deren Glieder die absoluten Werte der Reihe $S(z)$ sind. Also konvergiert auch $S(z)$ unbedingt.

4. Wenn $\gamma_n r^n$ für alle Werte von r endlich bleibt, so konvergiert $S(z)$ für alle Werte von z, und dasselbe gilt natürlich auch umgekehrt.

Wenn $\gamma_n r^n$ für irgend ein r endlich bleibt, so gilt dasselbe für alle kleineren Werte von r. Wenn daher $\gamma_n r^n$ zwar nicht für alle, wohl aber für gewisse Werte von r endlich bleibt, so haben diese Werte von r eine obere Grenze ϱ und die Reihe $S(z)$ konvergiert für alle Werte von z, deren absoluter Wert kleiner ist als ϱ.

Der Kreis mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt als Mittelpunkt heißt der Konvergenzkreis der Potenzreihe $S(z)$ und wir haben den Satz:

5. Die Reihe $S(z)$ konvergiert unbedingt für jeden Punkt z im Innern des Konvergenzkreises.

6. Dagegen kann $S(z)$ für keinen Punkt konvergieren, der außerhalb des Konvergenzkreises liegt.

Denn wenn $S(z)$ konvergiert, so muß $\operatorname{Lim} c_n z^n = 0$ sein. Es muß dann $\gamma_n r^n$ endlich bleiben, und r müßte kleiner als ϱ oder höchstens gleich ϱ sein.

Über die Konvergenz in den Punkten der Kreisperipherie selbst läßt sich nichts allgemeines aussagen; es kann hier je nach der Natur der Reihen Konvergenz oder Divergenz stattfinden, auch in einem Teil der Peripheriepunkte Konvergenz, in einem andern Divergenz.

Als einfaches Beispiel führen wir die geometrische Reihe an:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots.$$

Hier ergibt sich $\varrho = 1$ und der Konvergenzkreis ist also der Einheitskreis, worunter wir den Kreis verstehen, der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist.

In diesem Fall findet auf dem Konvergenzkreis nirgends Konvergenz statt, da ja der absolute Wert aller Glieder gleich 1 ist, also nicht gegen Null konvergiert.

7. Wenn die Reihe $S(z)$ für irgend einen Wert von z_1 von z unbedingt konvergiert, so konvergiert auch die Reihe

$$(2) \qquad U(z) = \alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 z + \alpha_2 c_2 z^2 + \alpha_3 c_3 z^3 + \cdots$$

unbedingt, wenn $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ eine Reihe reeller positiver Zahlen ist, die nicht unendlich werden, und zwar für jedes z, dessen absoluter Wert r kleiner ist als der absolute Wert r_1 von z_1.

Dies ergibt sich durch Betrachtung der Reihe

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \gamma_0 + \alpha_1 \gamma_1 r + \alpha_2 \gamma_2 r^2 + \alpha_3 \gamma_3 r^3 + \cdots \\ &= \alpha_0 \gamma_0 + \alpha_1 \gamma_1 \frac{r}{r_1} r_1 + \alpha_2 \gamma_2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 r_1^2 + \alpha_3 \gamma_3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 r_1^3 + \cdots, \end{aligned}$$

die mit der Reihe der absoluten Werte von $U(z)$ übereinstimmt und nach dem Satze § 118, 4. konvergiert.

Für die Gültigkeit dieses Schlusses ist aber nicht einmal erforderlich, daß die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ endlich bleiben, sondern es genügt, wenn $\alpha_n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$ nicht unendlich wird. Nach § 19, 8. findet dies für jedes $r < r_1$ statt, wenn $\alpha_n = n^k$ irgend eine Potenz von n oder noch allgemeiner, wenn es eine ganze Funktion von n ist. Nehmen wir z. B. $\alpha_n = n$ oder $= n^{-1}$ an, so erhalten wir den Satz:

8. Die drei Reihen

$$\begin{aligned} S(z) &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots, \\ T(z) &= c_1 + 2 c_2 z + 3 c_3 z^2 + 4 c_4 z^3 + \cdots, \\ U(z) &= c_0 z + \frac{c_1 z^2}{2} + \frac{c_2 z^3}{3} + \frac{c_3 z^4}{4} + \cdots \end{aligned}$$

haben denselben Konvergenzkreis.

§ 125. Rechnen mit unendlichen Reihen.

1. Wir betrachten zwei unendliche Reihen mit reellen oder komplexen Gliedern u_i, v_i, und setzen

$$(1) \qquad \begin{aligned} U_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ V_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen hier die ersten Glieder nicht mit u_1, v_1, sondern mit u_0, v_0, und verstehen unter U_n, V_n die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder, was besonders für die Multiplikation bequemer ist. Diese Reihen seien konvergent und U, V ihre Summen, also

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} U_n = U, \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} V_n = V.$$

Setzen wir

$$u_0 \pm v_0 = w_0, \quad u_1 \pm v_1 = w_1, \quad u_2 \pm v_2 = w_2, \cdots$$

worin überall die oberen oder überall die unteren Zeichen stehen, und

$$W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n,$$

so ist

$$U_n \pm V_n = W_n.$$

Lassen wir hierin n ins Unendliche wachsen, so ergibt sich, daß auch W_n konvergiert, und daß, wenn der Grenzwert von W_n mit W bezeichnet wird,

$$W = U \pm V$$

ist. Damit ist bewiesen:

Man addiert oder subtrahiert zwei konvergente Reihen, indem man entsprechende Glieder addiert oder subtrahiert.

Der Wert der Reihe U wird nicht geändert, wenn wir beliebige Glieder mit dem Werte Null voranstellen oder einschieben. Daraus ergibt sich, daß man die Summe W auf sehr mannigfache Art bilden kann, indem man die Glieder u_n, v_n auf verschiedene Art einander zuordnet, z. B.

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + (v_3 + u_2) + (v_4 + u_3) + \cdots$$

oder

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + v_3 + (v_4 + u_2) + v_5 + \cdots.$$

2. Nicht ganz so einfach liegen die Dinge bei der Multiplikation. Es seien jetzt

$$(2) \qquad \begin{aligned} U &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \\ V &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \end{aligned}$$

zwei konvergente Reihen. Es seien a_i und b_i die absoluten Werte von u_i und v_i, und wir nehmen zunächst an, daß auch die Reihen

$$(3) \qquad \begin{aligned} A &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \\ B &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \end{aligned}$$

konvergent seien, daß also U und V unbedingt konvergent seien.

3. Wenn wir bei der Multiplikation von A und B so verfahren, als ob es sich um die Multiplikation zweier endlicher Polynome handle, so haben wir jedes Glied der einen Summe mit jedem der andern zu multiplizieren und dann wieder die Summe dieser Produkte zu nehmen. Alle diese Produkte sind aber von der Form $a_\mu b_\nu$. Wir fassen diese Produkte nach den Werten der Indexsumme $\mu + \nu$ in Gruppen zusammen und addieren zunächst die Produkte dieser Gruppen, d. h. wir bilden die Zahlen

$$(4) \qquad \begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_m &= a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \cdots + a_m b_0. \end{aligned}$$

Daraus bilden wir die Gesamtsumme

$$(5) \qquad C_m = c_0 + c_1 + c_1 + \cdots + c_m,$$

und diese Summe wollen wir mit dem Werte des Produktes $A_n B_n$ vergleichen.

In dem Produkte $A_n B_n$ kommen alle die Glieder $a_\mu b_\nu$ vor, in denen gleichzeitig $\mu \leqq n$, $\nu \leqq n$ ist, aber keine anderen Glieder.

In C_m kommen alle die Glieder $a_\mu b_\nu$ vor, in denen $\mu + \nu \leqq m$ ist und keine anderen. Nehmen wir also $m = 2n$ an, so enthält C_m gewiß alle Glieder $a_\mu b_\nu$, in denen $\mu \leqq n$, $\nu < n$ ist, aber außerdem noch andere Glieder, in denen μ oder ν größer als n ist. Da nun alle a_μ, b_ν positiv sind, so folgt

$$(6) \qquad A_n B_n < C_{2n}.$$

Andererseits kommen unter den Gliedern $a_\mu b_\nu$ des Produktes $A_n B_n$ neben anderen alle die vor, in denen $\mu + \nu < n$ ist, denn in keinem dieser Glieder kann μ oder ν größer als n sein. Dies aber sind die Glieder der Summe C_n, und daraus folgt

$$C_n < A_n B_n$$

und folglich auch, wenn wir n durch $2n$ ersetzen,

$$(7) \qquad C_{2n} < A_{2n} B_{2n};$$

aus (6) und (7) aber folgt

$$A_n B_n < C_{2n} < A_{2n} B_{2n}.$$

Da nun nach Voraussetzung $A_n B_n$ und $A_{2n} B_{2n}$ denselben Grenzwert AB haben, so muß auch C_{2n} und folglich auch C_n denselben Grenzwert haben.

Es ist also die Reihe

$$C = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

konvergent und zugleich

$$(8) \qquad C = AB.$$

4. Für das Folgende ist noch zu bemerken, daß die Differenz

$$D_n = A_n B_n - C_n$$

eine Summe von positiven Produkten $a_\mu b_\nu$ ist, und daß D_n für unendlich wachsendes n den Grenzwert Null hat.

5. Wir bilden jetzt aus den Reihen U, V eine neue Reihe W nach demselben Gesetz, nach dem wir aus A und B die Reihe C abgeleitet haben, d. h. wir setzen

$$(9) \qquad \begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0, \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_m &= u_0 v_m + u_1 v_{m-1} + u_2 v_{m-2} + \cdots + u_m v_0, \\ W_m &= w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_m. \end{aligned}$$

Wir bilden nun die Differenz

$$\varDelta_n = U_n V_n - W_n.$$

Diese Differenz weicht nur in der Bezeichnung von D_n ab. Sie besteht aus einer Summe von Produkten $u_\mu v_\nu$, und wenn man diese durch ihre absoluten Werte $a_\mu b_\nu$ ersetzt, so geht $\varDelta_n$ in D_n über. Demnach haben wir nach dem Satze, daß der absolute Wert einer Summe nicht größer ist, als die Summe der absoluten Werte,

$$|\varDelta_n| \overline{\gtrless} D_n,$$

und mithin hat auch $|\varDelta_n|$ und folglich auch $\varDelta_n$ den Grenzwert Null. Daraus folgt aber

$$W = UV.$$

Es ist also auch W konvergent. Es ist aber

$$|w_n| \overline{\gtrless} a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = c_n,$$

und da die Reihe C konvergent ist, so ist auch die Reihe der $|w_i|$ konvergent, d. h. die Reihe W ist unbedingt konvergent, und wir haben den Satz:

Wenn man aus zwei unbedingt konvergenten Reihen U, V nach den Formeln (9) eine Reihe W bildet, so ist auch diese unbedingt konvergent, und es ist $W = UV$.

6. Der Satz von Abel (§ 122) gestattet eine Erweiterung des zuletzt bewiesenen Theorems, bei der zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz nicht mehr unterschieden zu werden braucht:

Wenn U, V zwei konvergente Reihen sind, und die daraus nach den Formeln (9) abgeleitete Reihe W gleichfalls konvergiert, so ist $W = UV$.

Wenn nämlich r irgend einen positiven echten Bruch bedeutet, und U und V konvergent sind, so sind

$$U(r) = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + r^3u_3 + \cdots,$$
$$V(r) = v_0 + rv_1 + r^2v_2 + r^3v_3 + \cdots$$

unbedingt konvergent (§ 124), und die daraus nach (9) abgeleitete Reihe

$$W(r) = w_0 + rw_1 + r^2w_2 + r^3w_3 + \cdots$$

ist nach 5. unbedingt konvergent, und es ist

$$(10) \qquad U(r)\,V(r) = W(r).$$

Setzen wir $r = 1$, so gehen $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$ in U, V, W über, und wenn also diese letzten Reihen konvergieren, so ist nach dem Abelschen Satze

$$\lim_{r=1} U(r) = U, \quad \lim_{r=1} V(r) = V, \quad \lim_{r=1} W(r) = W.$$

Wenn man also in (10) r in 1 übergehen läßt, so folgt

$$UV = W,$$

wie bewiesen werden sollte.

Wir haben in § 122 den Abelschen Satz allerdings nur unter der Voraussetzung reeller Koeffizienten bewiesen. Man braucht ihn aber bei komplexen Koeffizienten nur auf den reellen und imaginären Teil einzeln anzuwenden, um auch für diesen Fall seine Richtigkeit zu erkennen.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Unbegrenzt konvergente Reihen für die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

---

§ 126. Reihe für die Exponentialfunktion.

1. Wir wenden die allgemeinen Gesetze nun auf einzelne besondere Reihen an und betrachten zunächst die Reihe

$$E(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

von der wir schon in § 124, 2. nachgewiesen haben, daß sie für jedes reelle oder komplexe z unbedingt konvergiert. Für den speziellen Wert $z = 1$ haben wir die Reihe schon im § 119 untersucht und ihren Wert

(1) $$E(1) = e = 2{,}7182818\ldots$$

gefunden. Ebenso erhalten wir unmittelbar aus der Definition

$$E(0) = 1.$$

2. Der letzten Formel müssen wir aber eine noch etwas schärfere Fassung geben. Bezeichnen wir mit r den absoluten Wert von z, so ist

$$|E(z) - 1| \leqq \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots,$$

und da

$$\frac{1}{2!} < \frac{1}{1!}, \quad \frac{1}{3!} < \frac{1}{2!}, \quad \frac{1}{4!} < \frac{1}{3!}, \ldots$$

ist, so folgt

$$|E(z) - 1| < r\left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots\right) = rE(r).$$

Wir sehen hieraus, daß der absolute Wert von $E(z) - 1$ unter jeden Zahlenwert heruntersinkt, wenn der absolute Wert von z klein genug wird, d. h.:

$E(z)$ geht stetig in den Wert 1 über, wenn z stetig in den Wert 0 übergeht,

oder durch eine Formel ausgedrückt:

(2) $$\lim_{z=0} E(z) = 1.$$

3. Eine weitere Eigenschaft der Reihe $E(z)$ ergibt uns die Multiplikationsregel § 125, 5.

Verstehen wir unter x und y jetzt irgend zwei reelle oder komplexe Zahlen und setzen für jedes positive n

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n = \frac{y^n}{n!}, \quad u_0 = v_0 = 1,$$

so wird nach § 125, (9)

$$w_n = \frac{y^n}{n!} + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\frac{x}{n!} + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

und da nun

$$B_k^{(n)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

ein Binomialkoeffizient ist (§ 57, § 60), so folgt hieraus:

$$w_n = \frac{1}{n!}(y^n + B_1^{(n)} y^{n-1} x + B_2^{(n)} y^{n-2} x^2 + \cdots + x^n)$$
$$= \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Die Reihe W ist also nichts anderes als $E(x+y)$, und es ergibt sich:

(3) $$E(x+y) = E(x)\,E(y).$$

Hierin können x, y reell oder imaginär sein. Nehmen wir aber zunächst x, y reell an, so sind, wie wir in § 19 und § 36 gesehen haben, die Gleichungen (1), (2), (3) die charakteristischen Merkmale, durch die die Potenzen e^x erklärt waren, und wir haben also für reelle Werte von x das Resultat:

$$e^x = E(x).$$

Da wir die Potenzen mit imaginären Exponenten bisher noch nicht erklärt haben, so steht es uns frei, jetzt auch für ein imaginäres z

(4) $$e^z = E(z)$$

zu setzen, und dadurch die Potenzen von e auch für ein komplexes z zu erklären. Das so definierte e^z oder $E(z)$ heißt die Exponentialfunktion. Die in (3) ausgedrückte fundamentale Eigenschaft der Potenzen bleibt dann auch für komplexe Exponenten x, y bestehen.

4. Die Exponentialfunktion e^z ist der Grenzwert von

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

für ein unendlich wachsendes n.

Nehmen wir, um dies zu beweisen, zunächst n als positive ganze Zahl an, und entwickeln nach dem binomischen Satze, so erhalten wir (§ 119):

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{z^3}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Wir zerlegen diesen Ausdruck in zwei Bestandteile

$$Z = Z_1 + Z_2,$$

worin, wenn $m < n$ ist,

$$Z_1 = 1 + z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{z^m}{m!},$$

$$Z_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Ist nun r der absolute Wert von z, und $k \overline{\overline{<}} n$, so ist

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!} < \frac{r^k}{k!},$$

und wenn wir dies auf die einzelnen Glieder von Z_2 anwenden, so ergibt sich

$$|Z_2| < \frac{r^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{r^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots + \frac{r^n}{n!}.$$

Setzen wir daher allgemein

$$E_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!},$$

so folgt:

$$|Z_2| < E_n(r) - E_m(r) < E(r) - E_m(r).$$

Die Koeffizienten in Z_1:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right),\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

lassen sich nun, wenn man m festhält und n genügend wachsen läßt, dem Werte 1 beliebig nahe bringen, und folglich kann man durch genügende Vergrößerung von n den absoluten Wert $|Z_1 - E_m(z)|$ kleiner als eine beliebige Größe $\varDelta$ machen.

Hiernach ist

$$Z - E(z) = (Z_1 - E_m(z)) - (E(z) - E_m(z)) + Z_2,$$

und folglich für die absoluten Werte

$$|Z - E(z)| \overline{\gtrless} |Z_1 - E_m(z)| + |E(z) - E_m(z)| + E(r) - E_m(r).$$

Man nehme nun zunächst m so groß, daß

$$|E(z) - E_m(z)| \quad \text{und} \quad E(r) - E_m(r)$$

beide kleiner werden als eine beliebige Größe Δ, was wegen der Konvergenz von $E(z)$ möglich ist, und darauf n so groß, daß auch $|Z_1 - E_m(z)| < \Delta$ werde, und damit wird

$$|Z - E(z)| < 3\Delta.$$

Man kann also n so groß annehmen, daß die Differenz $Z - E(z)$ dem absoluten Werte nach kleiner als eine beliebig kleine Größe wird, und damit ist der Satz 4. für ein beliebiges z bewiesen:

(5) $$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z,$$

allerdings zunächst nur für ein ganzzahlig wachsendes n.

5. Setzen wir aber

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{n+\nu}$$

und verstehen unter n eine ganze Zahl, unter ν einen echten Bruch, so ist

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu} \frac{(n+\nu+z)^n}{(n+\nu)^n}$$
$$= \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu} \left(1 + \frac{\nu+z}{n}\right)^n \left(1 + \frac{\nu}{n}\right)^{-n}.$$

Lassen wir hierin n ganzzahlig ins Unendliche wachsen, so ist

$$\lim \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu} = 1, \quad \lim \left(1 + \frac{\nu+z}{n}\right)^n = e^{\nu+z}, \quad \lim \left(1 + \frac{\nu}{n}\right)^n = e^{\nu},$$

und folglich ist der Grenzwert von Z auch hier gleich e^z.

Ähnlich wie in § 119, 6. läßt sich zeigen, daß sich derselbe Grenzwert für Z ergibt, wenn n negativ unendlich groß wird.

6. Wenn wir $z = ix$ setzen, und x als reell voraussetzen, so ergibt sich mit Rücksicht auf

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \ldots:$$

$$E(ix) = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots,$$

und wir können setzen:

(6) $$E(ix) = A(x) + iB(x),$$

worin

$$(7)\qquad \begin{aligned} A(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots, \\ B(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \end{aligned}$$

zwei immer und unbedingt konvergente Reihen sind.

Zugleich ist

$$(8)\qquad A(x) + iB(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n.$$

Aus dem Theorem (3) ergibt sich, wenn x und y irgend zwei reelle Größen sind,

$$(A(x) + iB(x))(A(y) + iB(y)) = A(x+y) + iB(x+y)$$

und durch Trennung des reellen vom imaginären Teil:

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x)A(y) - B(x)B(y), \\ B(x+y) &= B(x)A(y) + B(y)A(x). \end{aligned}$$

Diese Formeln stimmen, wie man sieht, genau überein mit den Additionsformeln der trigonometrischen Funktionen $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ (§ 51, 3.). Der tiefere Grund dieser Übereinstimmung ergibt sich aus den folgenden Betrachtungen.

§ 127. Die trigonometrischen Funktionen als Reihensummen.

1. Um den Zusammenhang dieser Entwicklungen mit den trigonometrischen Funktionen zu erkennen, ist die folgende Betrachtung vorauszuschicken.

Es sei AB ein Kreisbogen mit dem Radius gleich der Längeneinheit und dem spitzen Winkel α, den wir in Bogenmaß messen, so daß also auch die Länge des Bogens AB gleich α ist. Wir fällen von B ein Perpendikel BE auf CA und errichten in A die Senkrechte AD bis zum Schnitt D mit dem Radius CB. Dann ist nach Sätzen der Trigonometrie

$$\overline{BE} = \sin\alpha, \quad \overline{AD} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \overline{CE} = \cos\alpha.$$

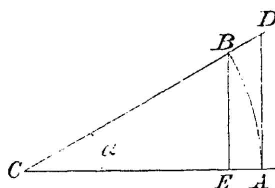


Fig. 24.

Der Flächeninhalt des Sektors CAB ist aber, wie die Figur zeigt, kleiner als der des Dreiecks CAD und größer als der des Dreiecks CEB, und es ist der

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt } CAB &= \tfrac{1}{2}\alpha, \\ \text{„} \qquad CAD &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha, \\ \text{„} \qquad CEB &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha, \end{aligned}$$

woraus sich die Ungleichung ergibt:

$$\text{(1)} \qquad \sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha,$$

und hieraus kann man, da $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ ist, ableiten

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

Da nun $\cos\alpha$ der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn α hinlänglich verkleinert wird, so folgt daraus:

2. Der Quotient $\sin\alpha : \alpha$ nähert sich der Grenze 1, wenn α sich dem Werte 0 nähert.

Da $\cos\alpha$ für $\alpha = 0$ in 1 übergeht, so hat auch $\operatorname{tg}\alpha/\alpha$ den Grenzwert 1:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \quad \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

Man kann dies auch so ausdrücken, daß $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$ für kleine Werte von α dem Bogen α nahezu gleich werden.

Der $\cos\alpha$ ist größer als $\frac{1}{2}$, wenn der Winkel α kleiner als $\pi/3$ ist, denn $\cos\alpha$ wächst, wenn α abnimmt, und ist $= \frac{1}{2}$ für $\alpha = \pi/3$ (für den Winkel des gleichseitigen Dreiecks).

Es ist also, wenn $\alpha < \frac{\pi}{3}$ ist, nach (1)

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 2\sin\alpha < 2\alpha.$$

3. Nach der Moivreschen Formel (§ 51, 8.) ist, wenn φ einen beliebigen Winkel, n eine ganze Zahl bedeutet,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

und daraus ergibt sich, wenn wir $n\varphi = x$ setzen:

$$\text{(4)} \qquad \cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat also einen von n unabhängigen Wert, und wir wollen sehen, was daraus wird, wenn wir n ins Unendliche wachsen lassen.

Wir setzen zunächst

$$\text{(5)} \qquad \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n \left(1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n$$

und betrachten jeden der beiden Faktoren besonders. Wenn wir in der trigonometrischen Formel

$$\text{(6)} \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$\alpha = x : 2n$ setzen, so erhalten wir

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2n}\right)^n,$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$2n\sin^2\frac{x}{2n} = \xi,$$

dann ergibt sich durch Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n = \sigma + \varrho,$$

worin, wenn m irgend eine ganze Zahl $< n$ bedeutet,

$$\sigma = 1 - \xi + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\xi^2}{2!} - \cdots \pm \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{\xi^m}{m},$$

$$\varrho = \pm\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{\xi^{m+1}}{(m+1)!} \pm \cdots$$
$$\pm\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{\xi^n}{n!}$$

ist. Die Vorzeichen $+$ und $-$ wechseln in σ und ϱ regelmäßig ab. Es ist aber nach (1)

$$\xi < \frac{x^2}{2n},$$

also um so mehr auch $\xi < x^2$, und wenn n unbegrenzt wächst, so sinkt ξ unter jeden positiven Wert herunter. Hieraus folgt, daß σ bei festgehaltenem m und unendlich wachsendem n den Grenzwert 1 hat. Der zweite Teil ϱ dagegen ist dem absoluten Werte nach kleiner als

$$\frac{x^{2m+2}}{(m+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = E_n(x^2) - E_m(x^2)$$

und wird also wegen der Konvergenz der Reihe $E(x)$ kleiner als jede noch so kleine Zahl, wenn m und n beide hinlänglich groß sind.

Demnach ist der Grenzwert von $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$ gleich 1.

4. Ebenso behandeln wir nun den zweiten Faktor des Ausdrucks (5):

$$\left(1 + i\,\mathrm{tg}\frac{x}{n}\right)^n,$$

in dem wir zur Abkürzung

$$n\,\mathrm{tg}\frac{x}{n} = t$$

setzen und zunächst x als positiv voraussetzen. Wir erhalten wieder nach dem binomischen Satze, wenn $m < n$ ist:

$$\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n = S + R,$$

worin

$$S = 1 + it + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{(it)^2}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{(it)^m}{m!},$$

$$R = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{(it)^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{(it)^n}{n!}.$$

Nach 1. hat aber $\operatorname{tg}\frac{x}{n} / \frac{x}{n}$ für ein unendlich wachsendes n den Grenzwert 1 und folglich t den Grenzwert x; und ferner ist nach (3) $t < 2x$, wenigstens wenn $n > 3x/\pi$ ist.

Hieraus ergibt sich wie früher, daß

(7) $$|R| < E_n(2x) - E_m(2x),$$

und daß S dem Werte

(8) $$1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^m}{m!}$$

beliebig nahe kommt, wenn m beliebig und n hinlänglich groß angenommen wird.

Die Summe (8) kann aber ihrerseits dadurch, daß m hinlänglich groß genommen wird, dem Werte $A(x) + iB(x)$ (§ 126, 6.) beliebig nahe gebracht werden, und da überdies durch die gleiche Annahme $|R|$ beliebig klein gemacht werden kann, so folgt

$$\operatorname{Lim}\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n = A(x) + iB(x).$$

Daraus ergibt sich nach (4) und (5):

$$\cos x + i\sin x = A(x) + iB(x),$$
$$\cos x = A(x), \quad \sin x = B(x).$$

Es sind also die trigonometrischen Funktionen $\cos x$, $\sin x$ die Summen der unendlichen Reihen:

(9) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots.$$

Nach diesen Formeln kann man $\cos x$ und $\sin x$ berechnen. Die Reihen sind aber um so besser konvergent, je kleiner x ist, und man wendet sie daher zweckmäßig nur für kleine Werte x zur Berechnung von $\cos x$ und $\sin x$ an, während man für größere Werte die Additionsformeln benutzt.

Zu beachten ist aber bei diesen Formeln, daß der Winkel nicht etwa in Graden, sondern notwendig im Bogenmaß gemessen sein muß.

Die Zahl $\pi = 3{,}141592\cdots$ kann dann definiert werden als die kleinste positive Zahl x, für die die Sinusreihe verschwindet.

Nach § 126, (6) erhält man für die Potenz e^{ix} mit rein imaginärem Exponenten

$$(10)\qquad \begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x, \end{aligned}$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addiert und subtrahiert, so erhält man die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ durch die Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten ausgedrückt:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$(12)\qquad e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = +1.$$

Um eine komplexe Größe $z = x + yi$ durch den absoluten Wert r und die Phase ϑ auszudrücken, können wir uns jetzt statt des Ausdrucks:

$$z = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

des kürzeren:

$$z = re^{i\vartheta}$$

bedienen.

5. Die Funktion e^z hat nach (12) und § 126, (3) die Eigenschaft:

$$(13)\qquad e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Sie ändert sich also nicht, wenn z um $2\pi i$ oder um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt wird. Diese Eigenschaft heißt die Periodizität von e^z und $2\pi i$ die Periode.

Die Exponentialfunktion ist also, wie die trigonometrischen Funktionen, periodisch, aber die Periode ist rein imaginär.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Die Binomialreihe.

---

§ 128. Die Binomialreihe für negative ganzzahlige Exponenten.

1. Wir haben in § 60 die Binomialformel für einen positiven ganzzahligen Exponenten abgeleitet. Darnach war, wenn μ eine natürliche Zahl ist:

(1) $$(1 + z)^\mu = B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots,$$

worin

(2) $$B_0^{(\mu)} = 1, \quad B_1^{(\mu)} = \mu, \quad B_2^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2}, \cdots,$$
$$B_n^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2) \cdots (\mu - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

die Binomialkoeffizienten waren.

Der Ausdruck $B_m^{(\mu)}$ behält aber auch noch eine Bedeutung, wenn μ nicht eine ganze positive Zahl ist und selbst wenn μ komplex ist. Nur wird dann keiner dieser Ausdrücke gleich 0, und die Summe auf der rechten Seite der Formel (1) bricht nicht ab. Ihre Glieder bilden eine unendliche Reihe.

Sehen wir zu, ob sie eine konvergente Summe hat.

2. Es sei z komplex und r der absolute Wert von z. Das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ zum n^{ten} Gliede der Reihe (1) ist

$$B_n^{(\mu)} z^n : B_{n-1}^{(\mu)} z^{n-1} = \frac{\mu - n + 1}{n} z = \left(\frac{\mu + 1}{n} - 1\right) z,$$

und der absolute Wert dieses Verhältnisses

$$\left|\frac{\mu + 1}{n} - 1\right| r$$

hat für ein unendliches n den Grenzwert r. Demnach konvergiert die Reihe (1) unbedingt, wenn $r < 1$ ist, und divergiert, wenn $r > 1$ ist (§ 118, 4.).

Die Reihe (1) hat also in allen Fällen, außer wenn μ eine positive Zahl ist, einen Konvergenzkreis mit dem Radius 1 (§ 124).

3. Wir haben in § 60 (10) eine Formel für die Binomialkoeffizienten kennen gelernt, die wir jetzt in etwas abgeänderter Bezeichnung so darstellen:

$$(3) \quad B_n^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_{n-2}^{(\nu)} + \cdots + B_n^{(\mu)} B_0^{(\nu)}.$$

Dort haben wir diese Formel allerdings nur unter der Voraussetzung von ganzzahligen μ, ν abgeleitet. Wir können aber leicht aus dem Ausdruck (2) die Formel allgemein beweisen. Denn es ist nach (2)

$$B_0^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_0^{(\nu)}, \quad B_1^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_0^{(\nu)},$$

die Formel (3) also richig für $n = 0$, $n = 1$. Wir nehmen sie als richtig an für irgend ein n und leiten sie daraus ab für $n + 1$. Dazu führt die Formel

$$(4) \qquad (\mu - n) B_n^{(\mu)} = (n+1) B_{n+1}^{(\mu)},$$

die sich aus der Definition (2) unmittelbar ergibt.

Wir multiplizieren also nun die Formel (3) mit $\mu + \nu - n$, und zerlegen diesen Multiplikator in den einzelnen Termen der rechten Seite in der Weise:

$$\begin{aligned} \mu + \nu - n &= (\nu - n) + \mu, \\ &= (\nu - n + 1) + (\mu - 1), \\ &= (\nu - n + 2) + (\mu - 2), \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich

$$(\mu + \nu - n) B_n^{(\mu+\nu)} =$$

$$\begin{aligned} B_0^{(\mu)}(\nu - n) B_n^{(\nu)} &+ B_1^{(\mu)}(\nu - n + 1) B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)}(\nu - n + 2) B_{n-2}^{(\nu)} + \cdots \\ + \mu B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} &+ \qquad\qquad (\mu - 1) B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots \end{aligned}$$

oder mit Benutzung der Formel (4):

$$\begin{aligned} (n+1) B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = (n+1) B_0^{(\mu)} B_{n+1}^{(\nu)} &+ n B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + (n-1) B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots \\ &+ \quad B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + \qquad 2 B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots. \end{aligned}$$

Wenn man hier die untereinanderstehenden Terme addiert, so läßt sich der Faktor $(n + 1)$ wegheben, und es folgt:

$$B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_{n+1}^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots,$$

was nun in der Tat nichts anderes ist, als die Formel (3), wenn darin n in $n + 1$ verwandelt wird.

4. Wir wollen die Summe der Reihe (1), deren Wert im allgemeinen noch unbekannt ist, mit $\varphi(\mu)$ bezeichnen, und nun multiplizieren wir zwei solche Reihen:

(5) $$\varphi(\mu) = B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots,$$
$$\varphi(\nu) = B_0^{(\nu)} + B_1^{(\nu)} z + B_2^{(\nu)} z^2 + B_3^{(\nu)} z^3 + \cdots$$

unter der Voraussetzung, daß $|z| < 1$ ist, nach der Vorschrift des § 125, 5. und erhalten für die Glieder der das Produkt darstellenden Reihe:

$$B_0^{(\mu)} B_0^{(\nu)},$$
$$(B_0^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_0^{(\nu)}) z,$$
$$(B_0^{(\mu)} B_2^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_0^{(\nu)}) z^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also nach der Formel (3):

(6) $$\varphi(\mu)\,\varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu).$$

5. Dies ist die charakteristische Eigenschaft der Potenzen, aus der man, wie früher, die Bedeutung von $\varphi(\mu)$ ableiten könnte. Ist z. B. μ eine positive ganze Zahl und $\nu = -\mu$, so ist nach dem binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\mu) = (1 + z)^\mu,$$

und es folgt aus (6):

$$\varphi(-\mu) = \frac{1}{(1 + z)^\mu} = (1 + z)^{-\mu}.$$

Der binomische Lehrsatz bleibt also richtig auch für negative ganzzahlige Exponenten, wenn der absolute Wert von z kleiner als 1 ist. Wir haben z. B. für $\mu = -1, -2, -3$:

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots,$$
$$\frac{1}{(1 + z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - \cdots,$$
$$\frac{1}{(1 + z)^3} = 1 - \frac{2 \cdot 3}{2} z + \frac{3 \cdot 4}{2} z^2 - \frac{4 \cdot 5}{2} z^3 + \cdots.$$

Ist μ gebrochen oder irrational oder selbst komplex, so behält $\varphi(\mu)$ immer seine Bedeutung, die gleichfalls unter den Potenzen zu suchen ist; da aber diese Potenzen mehrdeutig sind, so ist ihre Bedeutung noch festzustellen.

Die genaue Untersuchung der Binomialreihe rührt von Abel her, der ihre Bedeutung allgemein, auch für komplexe μ, klargestellt hat[1]).

Wir wollen uns hier der Einfachheit halber auf den Fall eines reellen μ beschränken.

---

1) N. H. Abel, Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

Crelles Journal Bd. 1. (1826). Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften Nr. 71.

§ 129. Stetigkeit der Binomialreihe.

1. Man versteht unter einer Funktion $\Phi(x)$ eines Argumentes x einen Ausdruck, dessen Zahlenwert durch irgend eine Rechenvorschrift bestimmt ist, wenn der Wert des Argumentes x beliebig gegeben ist. Da das Argument x verschiedener Werte fähig ist, so wird es auch die Veränderliche oder Variable genannt. Die Funktionen und das Argument können auch komplexe Werte erhalten. Beispiele solcher Funktionen sind die ganzen Funktionen $f(x)$, die wir im elften Abschnitt betrachtet haben, ferner die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ oder die Exponentialfunktion e^x. Man benutzt auch Funktionen von mehreren Veränderlichen. Dahin gehören die symmetrischen Funktionen des § 70 oder die Funktionen X, Y in § 72.

2. Eine Funktion $\Phi(x)$ heißt stetig, wenn sie die Eigenschaft hat, daß der absolute Wert ihrer Änderung $\Phi(x') - \Phi(x)$ unter jede beliebige Grenze Δ heruntersinkt, wenn die Änderung $x' - x$, dem absoluten Werte nach, unter einer hinlänglich kleinen Größe δ liegt. Man drückt dies kürzer auch so aus:

Eine stetige Funktion ist eine solche, bei der einer unendlich kleinen Änderung des Argumentes eine unendlich kleine Änderung der Funktion entspricht.

Plötzliche, sprungweise Änderungen sind bei einer stetigen Funktion ausgeschlossen.

Ebenso sind stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher solche Funktionen, bei denen unendlich kleinen Änderungen aller Argumente unendlich kleine Änderungen der Funktion entsprechen.

3. Sind X und Y zwei stetige Funktionen des Argumentes x, so sind auch die Verbindungen $X + Y$, $X - Y$, XY stetige Funktionen. Denn bedeuten α und β die Änderungen von X und Y, so sind die Änderungen jener drei Verbindungen $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha Y + \beta X + \alpha\beta$, und diese werden alle drei unendlich klein, wenn α und β unendlich klein werden.

Durch eine wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich, daß eine ganze Funktion von stetigen Funktionen immer eine stetige Funktion ist.

4. Wir bezeichnen mit $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ die Glieder einer unendlichen Reihe stetiger Funktionen des Argumentes x, die ihrem absoluten Werte nach alle unter einer bestimmten, von x unabhängigen

Grenze g bleiben. Wenn dann r ein positiver echter Bruch ist, so ist

$$U = u_0 + r u_1 + r^2 u_2 + r^3 u_3 + \cdots,$$

wie wir gesehen haben, eine unbedingt konvergente unendliche Reihe, deren Summe U eine Funktion von x ist. Es soll bewiesen werden, daß es eine stetige Funktion von x ist.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine positive ganze Zahl n an und setzen:

$$U_n = u_0 + r u_1 + r^2 u_2 + \cdots + r^n u_n,$$
$$R_n = r^{n+1} u_{n+1} + r^{n+2} u_{n+2} + \cdots,$$
$$U = U_n + R_n.$$

Dann ist U_n nach Nr. 3. eine stetige Funktion von x, R_n aber ist eine unendliche Reihe, deren Summe der Ungleichung genügt:

$$|R_n| < g\,(r^{n+1} + r^{n+2} + r^{n+3} + \cdots) = \frac{g\,r^{n+1}}{1-r}.$$

Da nun r ein echter Bruch ist, so können wir n so groß annehmen, daß $|R_n|$ kleiner als eine beliebig kleine Größe $\varDelta$ wird, und dann ist auch die Änderung von R_n bei einer Änderung von x dem absoluten Werte nach kleiner als $2\varDelta$, denn es ist, wenn R_n' den veränderten Wert von R_n bedeutet,

$$|R_n| < \varDelta, \quad |R_n'| < \varDelta,$$
$$|R_n' - R_n| < |R_n| + |R_n'| < 2\varDelta.$$

Da nun U_n eine stetige Funktion ist, so kann man die Änderung von x wieder so klein nehmen, daß die Änderung $U_n' - U_n$ gleichfalls kleiner als $\varDelta$ wird, und dann wird die Änderung von U kleiner als $3\varDelta$, d. h. beliebig klein. Damit ist die Stetigkeit von U als Funktion von x erwiesen.

5. Wir können U auch als Funktion von r betrachten, und auch als solche ist sie stetig, so lange r kleiner bleibt als ein angebbarer echter Bruch, und wir schließen, daß eine Potenzreihe

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

innerhalb ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion von z ist. Denn ist r der absolute Wert von z, ϱ der Radius des Konvergenzkreises, und $r < \varrho$, so kann man einen Wert ϱ_0 zwischen r und ϱ finden, der der Bedingung genügt:

$$\sqrt{r\varrho} < \varrho_0 < \varrho,$$

und da alsdann

$$\frac{\varrho r}{\varrho_0} < \varrho_0 < \varrho$$

ist, so konvergiert die Reihe

$$c_0 + c_1 \frac{\varrho r}{\varrho_0} + c_2 \left(\frac{\varrho r}{\varrho_0}\right)^2 + \cdots,$$

und es ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left| c_n \left(\frac{\varrho z}{\varrho_0}\right)^n \right| = 0.$$

Für das allgemeine Glied $c_n z^n$ der Reihe $S(z)$ können wir setzen:

$$c_n \left(\frac{\varrho z}{\varrho_0}\right)^n \cdot \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^n,$$

und wenn wir also in dem Satze 4. r durch ϱ_0/ϱ, u_n durch $c_n(\varrho z)^n/\varrho_0^n$ ersetzen, so sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, und es folgt:

Die Potenzreihe $S(z)$ ist im Innern ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion von z.

Hiernach sind auch z. B. die Exponentialfunktion e^z und die trigonometrischen Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ als Potenzreihen stetige Funktionen von z.

Der Abelsche Satz § 122 hat den Inhalt, daß, wenn die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

selbst konvergiert, $U = u_0 + r u_1 + r^2 u_2 + \cdots$ auch für $r = 1$ eine stetige Funktion von r ist, wenn man die Veränderung von r auf eine Verkleinerung beschränkt.

6. Die Binomialreihe

$$\varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots$$

befindet sich, so lange der absolute Wert von z kleiner als 1 ist, in dem Falle von Nr. 4., und da die Binomialkoeffizienten $B_n^{(\mu)}$ als ganze Funktionen von μ stetig sind, so ist $\varphi(\mu)$ eine stetige Funktion von μ.

Wir wollen nun, wie schon gesagt, zwar μ als reell voraussetzen, aber komplexe Werte von z nicht ausschließen.

§ 130. Summe der Binomialreihe.

1. Wenn $z = x + yi$ komplex ist, so können wir setzen

$$z = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

worin r positiv ist und ϑ einen Winkel bedeutet, der nur bis auf

Vielfache von 2π bestimmt ist. Um ihn genau zu bestimmen, können wir festsetzen, daß ϑ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen soll:

$$(1) \qquad -\pi < \vartheta \leqq \pi.$$

Außerdem nehmen wir in unserer folgenden Betrachtung

$$(2) \qquad r < 1$$

an. Die unter diesen Voraussetzungen konvergente Binomialreihe

$$(3) \qquad \varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots$$

hat im allgemeinen gleichfalls komplexe Werte, und da

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

ist, und die $B_n^{(\mu)}$ reell sind, so ergibt sich, wenn wir

$$\varphi(\mu) = X + Yi$$

setzen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)} r \cos\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3 \cos 3\vartheta + \cdots, \\ Y &= \phantom{1 +{}} B_1^{(\mu)} r \sin\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3 \sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

2. Wir setzen

$$(5) \qquad X = R\cos\theta, \quad Y = R\sin\theta,$$

$$Z = X + Yi = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

worin R reell und positiv, θ aber nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist.

Es handelt sich um die Bestimmung von R und θ als Funktionen von μ. Um ihre Abhängigkeit von μ anzudeuten, setzen wir auch $R = R(\mu)$, $\theta = \theta(\mu)$ und bemerken, daß R, $\cos\theta$, $\sin\theta$ stetige Funktionen von μ sind.

Wir können auch $\theta(\mu)$ als stetige Funktion von μ ansehen. Dann aber haben wir es nicht mehr in der Hand, dem $\theta(\mu)$ ein beliebiges Intervall von der Größe 2π zuzuweisen, sondern, wenn für irgend einen Wert von μ, z. B. für $\mu = 0$, ein bestimmtes Intervall für $\theta(\mu)$ festgesetzt ist, so kann bei stetiger Veränderung von μ und $\theta(\mu)$ der Winkel $\theta(\mu)$ aus diesem Intervall heraustreten. In diesem wollen wir hier $\theta(\mu)$ nehmen, und darunter also eine stetige n von μ verstehen.

$\mu = 0$ ergibt sich $X = 1$, $Y = 0$ und folglich

$$\cos\theta(0) = 1, \quad \sin\theta(0) = 0.$$

Es ist daher $\theta(0)$ ein Vielfaches von 2π, und wir können also, um $\theta(\mu)$ vollständig zu bestimmen,

$$\theta(0) = 0$$

annehmen. Für $R(0)$ ergibt sich der Wert 1.

3. Zur Bestimmung von R und θ führt nun die Fundamentalformel § 128, (6):

$$\varphi(\mu)\varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu),$$

worin wir unter μ und ν irgend zwei reelle Zahlen verstehen.

Darnach erhalten wir bei der Benutzung der Moivreschen Formel:

$$R(\mu)R(\nu)\left[\cos(\theta(\mu) + \theta(\nu)) + i\sin(\theta(\mu) + \theta(\nu))\right]$$
$$= R(\mu + \nu)\left[\cos\theta(\mu + \nu) + i\sin\theta(\mu + \nu)\right].$$

Da ein Winkel durch die Werte des Sinus und des Kosinus bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist, so folgt hieraus

(6)
$$R(\mu + \nu) = R(\mu)R(\nu),$$
$$\theta(\mu + \nu) = \theta(\mu) + \theta(\nu).$$

In der zweiten dieser Formeln könnte nach 2. noch ein Vielfaches von 2π hinzugefügt werden. Da aber $\theta(\mu)$ stetig ist, und dieses Vielfache sich nur sprungweise ändern könnte, so ist es von μ und ν unabhängig und ergibt sich gleich Null, wenn man $\nu = 0$ setzt.

4. Aus der ersten Formel (6) ergibt sich zunächst die Bedeutung von $R(\mu)$ ganz wie in § 36. Es folgt nämlich durch wiederholte Anwendung dieser Formel, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$R(n\mu) = R(\mu)^n,$$

also für $\mu = 1$:

$$R(n) = R(1)^n,$$

und für $\mu = m/n$:

$$R(m) = \left[R\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n;$$

folglich:

$$R\left(\frac{m}{n}\right) = [R(1)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{R(1)^m},$$

wenn darunter der einzige positive Wert der n^{ten} Wurzel verstanden wird. Es ergibt sich ferner, wenn man in (6) $\nu = 0$ setzt, $R(0) = 1$, und für $\nu = -\mu$

$$R(-\mu) = \frac{1}{R(\mu)}.$$

Da nun $R(\mu)$ eine stetige Funktion von μ ist, so gilt auch für irrationale positive und negative μ dasselbe Resultat:

(7)
$$R(\mu) = R(1)^\mu,$$

worunter, wie in § 36, der einzige reelle positive Wert der μ^{ten} Potenz der positiven Größe $R(1)$ zu verstehen ist.

5. In der gleichen Weise ergibt sich aus der zweiten Formel (6):

$$\theta(\mu + \nu) = \theta(\mu) + \theta(\nu)$$

durch wiederholte Anwendung:

$$\theta(n\mu) = n\theta(\mu),$$

also für $\mu = 1$:

$$\theta(n) = n\theta(1)$$

und für $\mu = m/n$:

$$\theta(m) = n\theta\left(\frac{m}{n}\right) = m\theta(1),$$

also zunächst für ein rationales μ und dann wegen der Stetigkeit auch für jedes irrationale:

$$\theta(\mu) = \mu\theta(1), \tag{8}$$

und es bleibt noch übrig, $R(1)$ und $\theta(1)$ zu bestimmen, die noch von z, d. h. von r und ϑ abhängen.

6. Zur Bestimmung von $R(1)$ und $\theta(1)$ haben wir aus (4) die beiden Gleichungen:

$$R(1)\cos\theta(1) = 1 + r\cos\vartheta,$$
$$R(1)\sin\theta(1) = r\sin\vartheta,$$

woraus zunächst, da $R(1)$ positiv sein muß, durch Quadrieren und Addieren

$$R(1) = \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} \tag{9}$$

folgt, mit positivem Zeichen der Quadratwurzel.

Es folgt ferner durch Division der beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg}\theta(1) = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}.$$

Ist die Tangente eines Winkels gegeben, so ist damit der Winkel aber nur bis auf ein Vielfaches von π bestimmt, und zu jedem Wert der Tangente gibt es e i n e n und nur einen Winkel, der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Wir bestimmen also einen Winkel ω eindeutig durch die Bedingungen:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

wo die Grenzwerte $\pm\frac{1}{2}\pi$ dadurch ausgeschlossen sind, daß der Nenner $1 + r\cos\vartheta$ für ein echt gebrochenes r nicht Null sein kann. Dann ist

$$\theta(1) = \omega + h\pi,$$

worin h eine noch unbekannte ganze Zahl ist, die wir jetzt noch zu bestimmen haben.

$$Y = R(1)^{\mu} \sin \mu(\omega + h\pi),$$

und für $r = 0$ ergibt sich hieraus

$$\sin \mu h \pi = 0.$$

Diese Gleichung soll aber für jedes beliebige μ stattfinden, und dies ist nur möglich, wenn die ganze Zahl $h = 0$ ist. Denn wäre sie nicht $= 0$, so brauchte man ja nur $\mu = 1 : 2h$ zu setzen, um $\sin \mu h \pi = 1$ zu erhalten. Demnach ist $h = 0$, und wir haben damit die Summe der Binomialreihe unter Voraussetzung eines echt gebrochenen r vollständig bestimmt. Es ist

$$(11) \qquad \varphi(\mu) = \left(\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}\right)^{\mu} (\cos \mu\omega + i \sin \mu\omega),$$

worin ω durch (10) bestimmt ist.

Wenn z reell ist, so ist $\vartheta = 0$ oder $= \pi$ und folglich $\omega = 0$ (nach (10)), und es ist $z = x$ positiv für $\vartheta = 0$, negativ für $\vartheta = \pi$, folglich $x = r\cos\vartheta$, $x^2 = r^2$, also ergibt (11) für diesen Fall

$$(12) \qquad \varphi(\mu) = (1 + x)^{\mu},$$

worin unter $(1 + x)^{\mu}$ der einzige reelle positive Wert dieser Potenz zu verstehen ist.

Trennt man in der allgemeinen Formel (11) den reellen vom imaginären Bestandteil, so erhält man die reellen Werte der Reihen X, Y:

$$(13) \quad \begin{aligned} \left(\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}\right)^{\mu} \cos\mu\omega &= 1 + B_1^{(\mu)} r\cos\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \cos 2\vartheta \\ &\quad + B_3^{(\mu)} r^3 \cos 3\vartheta + \cdots, \\ \left(\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}\right)^{\mu} \sin\mu\omega &= B_1^{(\mu)} r \sin\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \sin 2\vartheta \\ &\quad + B_3^{(\mu)} r^3 \sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

8. Nehmen wir $\mu = \frac{1}{2}$, so ist

$$B_1^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}, \quad B_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{2 \cdot 4}, \quad B_3^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \ldots,$$

$$B_n^{\left(\frac{1}{2}\right)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n},$$

und folglich ergibt sich für ein echt gebrochenes reelles x:

$$(14)\quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots.$$

Ferner findet man für $\mu = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots.$$

Man kann diese Formeln zur Berechnung von Quadratwurzeln benutzen, und diese Berechnung ist besonders einfach, wenn es sich um Quadratwurzeln aus Zahlen handelt, die von der nächsten Quadratzahl wenig verschieden sind. So ist z. B.

$$\sqrt{99} = \sqrt{100-1} = 10\sqrt{1-0{,}01}.$$

Man setze in der Formel (14) $x = -0{,}01$ und erhält:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}x &= 0{,}005\\
\tfrac{1}{8}x^2 &= 0{,}0000125\\
-\tfrac{1}{16}x^3 &= 0{,}0000000625\\
\hline
&\ 0{,}0050125625\\
1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 &= 0{,}9949874375,\\
\sqrt{99} &= 9{,}949874375,
\end{aligned}$$

worin nur die letzte Stelle etwas zu groß ist. Durch Division mit 3 erhält man

$$\sqrt{11} = 3{,}31662479$$

auf neun Stellen genau.

§ 131. Die Binomialreihe an der Grenze der Konvergenz.

1. Wir haben in § 128 gesehen, daß die Binomialreihe einen Konvergenzkreis vom Radius 1 hat. Nach dem Verhalten der Binomialreihe außerhalb dieses Kreises zu fragen, hat keinen Sinn. Wohl aber ist es von Interesse zu untersuchen, ob die Reihe für Punkte des Konvergenzkreises selbst, d. h. für Werte x mit dem absoluten Werte 1, noch konvergent ist. Ist dies der Fall, so kann man die Summe der Reihe für diese Werte nach dem Abelschen Satze (§ 122) ermitteln, indem man in dem Ausdruck für $\varphi(\mu)$, den wir im vorigen Paragraphen gefunden haben, den Grenzwert für $r = 1$ aufsucht.

2. Erster Fall $\mu > 0$.

In diesem Falle konvergiert die Binomialreihe für $r = 1$ und jeden Wert von ϑ unbedingt.

Dies wird erwiesen sein, wenn wir nachweisen können, daß für ein positives μ die Reihe der Binomialkoeffizienten

$$(1) \qquad 1 + B_1^{(\mu)} + B_2^{(\mu)} + B_3^{(\mu)} + \cdots$$

unbedingt konvergiert, denn da $\sin n\vartheta$ und $\cos n\vartheta$ echte Brüche sind, so konvergieren dann auch nach § 120, 6. die beiden Reihen

$$(2) \qquad \begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)} \cos \vartheta + B_2^{(\mu)} \cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)} \cos 3\vartheta + \cdots, \\ Y &= \phantom{1 +{}} B_1^{(\mu)} \sin \vartheta + B_2^{(\mu)} \sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)} \sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

Diese Konvergenz wird aber nach § 118, 7. dann erwiesen sein, wenn sich eine Zahl h ermitteln läßt, die größer als 1 ist, für die

$$(3) \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} n^h B_n^{(\mu)} = 0$$

wird.

3. Um einen solchen Exponenten h zu finden, setzen wir, wenn n und $k < n$ zwei ganze Zahlen sind,

$$\begin{aligned} B_n^{(\mu)} &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \\ &= B_k^{(\mu)} \frac{(\mu-k)(\mu-k-1)\cdots(\mu-n+1)}{(k+1)(k+2)\cdots n}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit K den absoluten Wert von $B_k^{(\mu)}$, so ergibt sich hieraus, wenn $k > \mu$ angenommen wird, der absolute Wert von $B_n^{(\mu)}$:

$$(4) \qquad |B_n^{(\mu)}| = K \frac{k-\mu}{k+1} \frac{k-\mu+1}{k+2} \cdots \frac{n-\mu-1}{n},$$

worin K eine von n unabhängige positive Zahl ist.

Nun ist nach dem binomischen Satz selbst, wenn m größer als 1 ist,

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-\mu-1} \\ &= 1 - \frac{\mu+1}{m} + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2}\frac{1}{m^2} - \frac{(\mu+1)(\mu+2)\,\mu+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{m^3} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\mu+1}{m}\right) + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{\mu+3}{3m}\right) \\ &\qquad + \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{1}{m^4}\left(1 - \frac{\mu+5}{5m}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

und wenn $m > \mu + 1$, so ist, wenn l eine natürliche Zahl ist:

$$m(l-1) \geqq l-1, \quad ml \geqq m+l-1 > \mu + l,$$

und folglich sind die Differenzen

$$1 - \frac{\mu+1}{m}, \quad 1 - \frac{\mu+3}{3m}, \quad 1 - \frac{\mu+5}{5m}, \cdots$$

alle positiv, also

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\mu-1} > 1 - \frac{\mu+1}{m},$$

wofür wir auch

$$\frac{m-\mu-1}{m} < \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\mu+1}$$

setzen können. Wenden wir dies auf $m = k+1, k+2, \ldots, n$ an, so folgt:

$$\frac{k-\mu}{k+1} < \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\mu+1},$$

$$\frac{k-\mu+1}{k+2} < \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{\mu+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n-\mu-1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1},$$

und demnach ergibt sich aus (4):

(5) $$|B_n^{(\mu)}| < K\left(\frac{k+1}{k+2}\,\frac{k+2}{k+3}\cdots\frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1} < K\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{\mu+1},$$

also, wenn h eine beliebige positive Zahl ist:

(6) $$|n^h B_n^{(\mu)}| < K(k+1)^{\mu+1}(n+1)^{h-\mu-1},$$

und dies nähert sich mit unendlich wachsendem n der Grenze Null, wenn

$$h < 1 + \mu$$

genommen wird. Da die Annahme $h > 1$ mit dieser Bedingung verträglich ist, so ist hiermit nach (3) die Konvergenz für diesen Fall bewiesen.

Die Formel (5) zeigt, daß

(7) $$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} B_n^{(\mu)} = 0$$

ist, nicht nur wenn μ positiv ist, sondern auch wenn $\mu+1$ positiv, also auch wenn μ ein negativer echter Bruch ist. Nur reicht dann das Abnehmen von $B_n^{(\mu)}$ nicht mehr aus, um die unbedingte Konvergenz der Reihe (1) zu verbürgen, da $h < 1 + \mu$ unter 1 bleibt.

4. Das führt uns auf den zweiten Fall $-1 < \mu < 0$.

In diesem Falle konvergiert die Binomialreihe auf dem Konvergenzkreise außer für $z = -1$, aber im allgemeinen nicht mehr unbedingt.

Der Beweis stützt sich auf die allgemeine Formel (§ 57, (7))

(8) $$B_n^{(\mu+1)} = B_n^{(\mu)} + B_{n-1}^{(\mu)},$$

deren Richtigkeit für beliebige μ sich direkt aus den Ausdrücken für die Binomialkoeffizienten ergibt, nach denen

$$B_n^{(\mu)} = \frac{\mu - n + 1}{n} B_{n-1}^{(\mu)}, \quad B_n^{(\mu+1)} = \frac{\mu + 1}{n} B_{n-1}^{(\mu)}$$

ist. Setzen wir jetzt für ein beliebiges z

$$S_n^{(\mu)} = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + \cdots + B_n^{(\mu)} z^n,$$

so folgt durch Multiplikation mit $1 + z$ nach (8):

$$\begin{aligned}(1+z)\, S_n^{(\mu)} &= 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + \cdots + B_n^{(\mu)} z^n \\ &\quad + \quad z + B_1^{(\mu)} z^2 + \cdots + B_{n-1}^{(\mu)} z^n + B_n^{(\mu)} z^{n+1} \\ &= 1 + B_1^{(\mu+1)} z + B_2^{(\mu+1)} z^2 + \cdots + B_n^{(\mu+1)} z^n + B_n^{(\mu)} z^{n+1} \\ &= S_n^{(\mu+1)} + z^{n+1} B_n^{(\mu)}.\end{aligned}$$

Ist nun der absolute Wert r von z gleich 1, so bleibt z^{n+1} endlich und $B_n^{(\mu)}$ wird nach (7) gleich Null, wenn n ins Unendliche wächst.

Da aber $\mu + 1 > 0$ ist, so hat $S_n^{(\mu+1)}$ nach 2. einen endlichen Grenzwert, und wenn daher $1 + z$ nicht $= 0$ ist, so hat auch $S_n^{(\mu)}$ einen solchen, d. h. die Reihe $\varphi(\mu)$ konvergiert.

Für $z = -1$ kann aber die Reihe in diesem Falle nicht konvergieren, denn für ein reelles echt gebrochenes z ist der Wert von $\varphi(\mu)$ gleich $(1 + z)^\mu$, und dies wird unendlich groß, wenn μ negativ ist und $z = -1$ wird. Also kann nach dem Abelschen Satze für $z = -1$ keine Konvergenz stattfinden.

5. Sehr leicht erledigt sich der dritte Fall $\mu \overline{\gtrless} -1$.

In diesem Falle ist $\mu + 1$ negativ oder Null, folglich $n - \mu - 1$ positiv und größer als n oder mindestens $= n$. Es ist daher

$$\frac{n - \mu - 1}{n} \overline{\gtrless} 1,$$

und folglich sind die Binomialkoeffizienten $B_n^{(\mu)}$ nicht kleiner als 1 und nähern sich nicht der Grenze Null. Es werden also auch die Glieder der Reihen X, Y:

$$B_m^{(\mu)} \cos m\vartheta, \quad B_m^{(\mu)} \sin m\vartheta$$

nicht unendlich klein, und diese Reihen können daher nicht konvergieren. Die einzige Ausnahme, die aber als selbstverständlich kein Interesse bietet, ist die Reihe Y, wenn $\vartheta = 0$ oder $= \pi$ ist, wo dann $Y = 0$ wird.

6. Um in den Fällen der Konvergenz die Summe zu finden, hat man in § 130, (9), (10) und (11) $r = 1$ zu setzen. Dann wird

$$\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} = \sqrt{2\,(1 + \cos\vartheta)} = 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

da $\cos \frac{1}{2} \vartheta$ positiv ist, wenn, wie vorausgesetzt war, ϑ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Es ist ferner

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \vartheta \cos \frac{1}{2} \vartheta}{2 (\cos \frac{1}{2} \vartheta)^2} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \vartheta$$

und folglich

$$\omega = \tfrac{1}{2} \vartheta,$$

was, wie von ω verlangt war, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Demnach ergibt die Formel § 130, (11) durch Trennung des reellen vom imaginären Bestandteil:

$$\left(2 \cos \frac{1}{2} \vartheta\right)^{\mu} \cos \mu \frac{\vartheta}{2} = 1 + B_1^{(\mu)} \cos \vartheta + B_2^{(\mu)} \cos 2 \vartheta + B_3^{(\mu)} \cos 3 \vartheta + \cdots,$$

$$\left(2 \cos \frac{1}{2} \vartheta\right)^{\mu} \sin \mu \frac{\vartheta}{2} = \qquad B_1^{(\mu)} \sin \vartheta + B_2^{(\mu)} \sin 2 \vartheta + B_3^{(\mu)} \sin 3 \vartheta + \cdots,$$

und diese Formeln gelten für $\mu > -1$; der Grenzwert $\vartheta = \pm \pi$ ist für ein positives μ auch noch zulässig.

Vierundzwanzigster Abschnitt.

Logarithmische Reihen.

§ 132. Logarithmische Reihen.

1. Wenn wir in der Binomialreihe

$$(1) \quad (1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

worin x ein positiver oder negativer echter Bruch ist, $\mu = 0$ setzen, so ergibt sich beiderseits der Wert 1; bilden wir aber daraus zunächst

$$(2) \quad \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{\mu} = x + \frac{\mu - 1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

und lassen jetzt μ in Null übergehen, so geht die rechte Seite in die Reihe über:

$$(3) \quad \lambda = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

die ebenfalls konvergent ist, wenn x ein echter Bruch ist.

Die Reihe (2) ist aber nach § 129, 4. für ein echt gebrochenes x eine stetige Funktion von μ, und es ist also λ der Grenzwert des Quotienten $((1+x)^{\mu} - 1) : \mu$ für $\mu = 0$.

Es handelt sich nun also darum, diesen Grenzwert noch anders als durch eine unendliche Reihe zu bestimmen, um die Summe der Reihe (3) zu erhalten.

Ohne weiteres geht dies nicht, weil in dem Bruch $((1+x)^{\mu} - 1) : \mu$ für $\mu = 0$ Zähler und Nenner verschwinden, und 0/0 keine bestimmte Bedeutung hat. Wir können aber mit Hilfe der Grenzwerte, die wir früher bestimmt haben (§ 119), auch diesen Grenzwert indirekt ermitteln.

Wir setzen

$$(4) \quad (1+x)^{\mu} - 1 = \frac{1}{y},$$

und wenn dann μ bis Null abnimmt, so wächst y ins Unendliche. Aus (4) aber folgt:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \frac{1}{y},$$

und wenn wir beiderseits in einem beliebigen System die Logarithmen nehmen:

$$(5) \qquad \mu = \frac{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\log(1+x)}.$$

Aus (4) und (5) folgt aber:

$$(6) \qquad \frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = \frac{\log(1+x)}{y\log\left(1+\frac{1}{y}\right)} = \frac{\log(1+x)}{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}.$$

Nach § 119, 5. ist

$$\lim_{y=\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

(Basis des natürlichen Logarithmensystems), und folglich ist nach (6)

$$\lim_{\mu=0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = \frac{\log(1+x)}{\log e}.$$

Diese Formel wird am einfachsten, wenn wir e als Basis des Logarithmensystems nehmen. Diese Logarithmen heißen natürliche Logarithmen. Sie werden zum Unterschied von den anderen, z. B. den Briggischen, verschieden bezeichnet, etwa mit $\log \operatorname{nat} x$ oder $\mathrm{l}(x)$. Wir wollen hier das gleichfalls gebräuchliche Zeichen $\ln x$ benutzen. Wenn wir also jetzt das natürliche Logarithmensystem zugrunde legen, so haben wir

$$\lim_{\mu=0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = \ln(1+x).$$

Wir erhalten daher aus (3) die Entwicklung

$$(7) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

Eine noch etwas bequemere Formel ergibt sich, wenn wir x in $-x$ verwandeln:

$$(8) \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

und dann (8) von (7) subtrahieren:

$$(9) \qquad \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Setzt man

$$\frac{1+x}{1-x} = y \quad \text{und folglich} \quad x = \frac{y-1}{y+1},$$

so erhält man für jedes positive y ein echt gebrochenes x, und zwar, wenn $y > 1$ ist, ein positives, wenn $y < 1$ ist, ein negatives x, und man kann also aus der Reihe (9) den natürlichen Logarithmus einer jeden positiven Zahl finden.

Für $x = 1/3$ ergibt sich aus (9)

$$(10) \quad \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \cdots,$$

woraus man auf sechs Stellen genau den natürlichen Logarithmus von 2 gleich

$$0{,}693147$$

erhält. Eine große Genauigkeit auf diesem Wege zu erhalten, ist ziemlich mühselig.

2. Die Reihe (7) ist divergent für $x = -1$, denn für diesen Wert wird sie

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

Dagegen ergibt sich für $x = +1$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

und diese Reihe konvergiert, wenn auch nur bedingt (§ 121, 5.).

Nach dem Satze von der Stetigkeit der Potenzreihe (§ 122) können wir aber die Summe dieser Reihe bestimmen, indem wir in der Summe $\ln(1+x)$ die Veränderliche $x = 1$ setzen. Wir finden so:

$$(11) \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert aber noch viel langsamer als die Reihe (10), und um damit eine Genauigkeit von mehreren Dezimalen zu erhalten, müßte man eine ungeheuere Zahl von Gliedern berücksichtigen.

§ 133. Cyklometrische Reihen.

1. Nehmen wir in der Binomialreihe z rein imaginär, gleich ix, so ergibt sich

$$\varphi(\mu) = 1 + i\mu x - \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}x^2 - i\,\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots,$$

und den Wert dieser Summe erhält man aus § 130, (10), (11), wenn man dort $\vartheta = \pm \frac{1}{2}\pi$ setzt, worin das obere Zeichen bei positivem, das untere bei negativem x steht. Es wird dann, wenn x ein echter Bruch ist, $r = |x|$ und

(1) $$\operatorname{tg} \omega = x,$$

und folglich

$$\varphi(\mu) = (\sqrt{1 + x^2})^\mu (\cos \mu\omega + i \sin \mu\omega).$$

Trennen wir den reellen von dem imaginären Teil, so folgt:

$$(\sqrt{1 + x^2})^\mu \cos \mu\omega = 1 - \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \cdots,$$

$$(\sqrt{1 + x^2})^\mu \sin \mu\omega = \mu x - \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$$

$$+ \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3)(\mu - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \cdots,$$

und wenn wir die zweite dieser Reihen durch μ dividieren:

$$(\sqrt{1 + x^2})^\mu \frac{\sin \mu\omega}{\mu} = x - \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3)(\mu - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 \cdots.$$

Setzen wir $\mu = 0$, so ergibt die rechte Seite die unendliche Reihe:

(2) $$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots,$$

die für jedes echt gebrochene x konvergiert, und ihren Wert finden wir wie bei der logarithmischen Reihe, wenn wir den Grenzwert der linken Seite für $\mu = 0$ aufsuchen.

Es ist aber nach § 127, 2. $\sin \alpha : \alpha = 1$ für $\alpha = 0$, und wenn wir also $\alpha = \mu\omega$ setzen:

$$\operatorname{Lim}_{\mu=0} \frac{\sin \mu\omega}{\mu} = \omega \operatorname{Lim}_{\mu=0} \frac{\sin \mu\omega}{\mu\omega} = \omega,$$

und $(\sqrt{1 + x^2})^\mu$ wird $= 1$; also haben wir

(3) $$\omega = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots.$$

2. Wenn die Tangente eines Winkel ω irgendwie als positive oder negative Zahl x gegeben ist, so ist dadurch der Winkel selbst nur bis auf ein Vielfaches von π bestimmt. Er wird aber vollständig bestimmt, wenn noch die Beschränkung hinzugefügt wird, daß er zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen soll. Man bezeichnet den Winkel (in Bogenmaß ausgedrückt) unter dieser Voraussetzung als den Bogen, dessen Tangente x ist, mit arcus tangens x (richtiger arcus tangentis x) und schreibt auch abgekürzt

(4) $$\omega = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$$

und demnach ergibt die Formel (3):

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots.$$

Da die Formel (5) aber nur gilt, solange x zwischen -1 und $+1$ liegt, so liegt der Winkel $\operatorname{arc\,tg} x$ zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ (zwischen -45^0 und $+45^0$).

3. Die Reihe (5) bleibt wieder konvergent, wenn $x = 1$ wird, der $\operatorname{arc\,tg} x$ geht aber dann in den Wert $\frac{1}{4}\pi$ über, und wir erhalten so die Summe der berühmten Leibnizschen Reihe:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$ [1]

einer Reihe, die freilich, der langsamen Konvergenz wegen, zur praktischen Berechnung von π nicht geeignet ist.

4. Besser konvergierende Reihen zur Berechnung von π erhält man, wenn man einen Winkel nimmt, der in einem bestimmten Verhältnis zu π steht und dessen Tangente einen gleichfalls bekannten echt gebrochenen Wert hat. Nehmen wir z. B. den Winkel von $\frac{1}{6}\pi = 30^0$ (die Hälfte des Winkels im gleichseitigen Dreieck), so ist dessen Tangente $1/\sqrt{3}$, und die Formel (5) ergibt:

$$\text{(7)} \qquad \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \frac{1}{11\cdot 3^5} + \cdots.$$

Noch besser konvergierende Entwicklungen werden sich später ergeben.

§ 134. Die Funktion arc tg x.

1. Wenn wir in der Reihe § 132, (9) x durch ix ersetzen, so ergibt sich, von dem Faktor i abgesehen, gerade die Reihe § 133, (5), und es liegt also nahe, auch

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}$$

zu setzen. Diese Gleichung gibt uns zunächst nur eine Definition des Logarithmus einer imaginären Größe; aber vermöge dieser Definition vereinigen sich die beiden Reihen § 132, (9) und § 133, (5) unter ein gemeinschaftliches Gesetz.

2. Nach der Formel (1) bleibt die Grundeigenschaft der Logarithmen bestehen, daß nämlich die Summe zweier Logarithmen gleich dem Logarithmus des Produktes der Summanden ist. Setzen wir nämlich

---

[1] Über die Entdeckung dieser Reihensumme durch Leibniz vergleiche man Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. III, Kapitel 86.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} y,$$
$$x = \operatorname{tg} \alpha, \qquad y = \operatorname{tg} \beta,$$

so ist nach der Additionsformel für die Tangente

(2) $$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{x + y}{1 - xy},$$

folglich

$$\alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y}{1 - xy},$$

oder

(3) $$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Hierbei ist aber noch zu bemerken, daß, wenn die Summe $\alpha + \beta$ aus dem Intervall $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ heraustritt, auf der linken Seite noch π hinzuzusetzen oder abzuziehen ist.

Wenden wir aber die Formel (1) auf (3) an, so ergibt sich:

$$\ln \frac{1 + ix}{1 - ix} + \ln \frac{1 + iy}{1 - iy} = \ln \frac{1 - xy + i(x + y)}{1 - xy - i(x + y)},$$

und es ist

$$\frac{1 - xy + i(x + y)}{1 - xy - i(x + y)} = \frac{(1 + ix)(1 + iy)}{(1 - ix)(1 - iy)},$$

also, wie das Gesetz der Logarithmen verlangt:

$$\ln \frac{1 + ix}{1 - ix} + \ln \frac{1 + iy}{1 - iy} = \ln \frac{1 + ix}{1 - ix} \cdot \frac{1 + iy}{1 - iy}.$$

3. Dieses Gesetz kann man nun anwenden, um die Reihe für $\operatorname{arc\,tg} x$ in eine Summe von ähnlichen Reihen zu zerlegen, die eine viel höhere Konvergenz haben, und die also zu einer genauen Berechnung von π geeignet sind.

Bestimmt man x und y als echte Brüche so, daß

(4) $$\frac{x + y}{1 - xy} = 1$$

wird, so ist nach (3), da $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$ ist,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y,$$

und aus § 133, (5) folgt:

$$\frac{\pi}{4} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$+ y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots.$$

Um x und y zu bestimmen, leitet man aus (4) ab:

$$(x + 1)(y + 1) = 2,$$

und wenn man $x = \frac{1}{2}$ setzt, so ergibt sich $y = \frac{1}{3}$, und daraus die besser konvergierenden Reihen von Euler:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{2^7} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{3^7} + \cdots.$$

Wenn man zu der Formel (3) noch einen dritten Winkel, arc tg z addiert, und die Formel dann nochmals anwendet, so ergibt sich

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y + \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz},$$

und wenn man x, y, z als echte Brüche so bestimmt, daß

$$x + y + z - xyz = 1 - xy - xz - yz$$

wird, so erhält man

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y + \operatorname{arc\,tg} z$$

in drei unter Umständen noch besser konvergierende Reihen zerlegt. Nimmt man z. B. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{8}$, $z = \frac{1}{5}$, so wird

(5) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{8} + \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{5}.$$

Nach dieser Formel hat Dahse gerechnet, der die 200 ersten Dezimalstellen der Zahl π ermittelt hat.

Eine noch bessere Formel war bereits früher (1706) von John Machin angegeben und zur Berechnung von π auf 100 Dezimalen angewandt. Sie beruht auf der folgenden Betrachtung:

Es ist, nach (3), wenn man $y = -1$ setzt für ein beliebiges x:

(6) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{x+1}.$$

Wenn man hierin für x eine Zahl nimmt, die nahe an 1 liegt, so wird $(1-x)/(1+x)$ ein kleiner Bruch und für das zweite Glied der rechten Seite ergibt sich aus § 133, (5) eine gut konvergente Reihe. Damit aber auch das erste Glied durch eine gut konvergierende Reihe dargestellt werden könne, setze man $\operatorname{arc\,tg} x = n \operatorname{arc\,tg} \alpha$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Je größer n wird, um so kleiner wird α bei gegebenem x. Setzt man $n = 4$, so erhält man, wenn in (2) $\alpha = \beta$ gesetzt wird:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad \operatorname{tg} 4\beta = \frac{2 \operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2 2\beta}.$$

Setzt man $\alpha = \operatorname{tg} \beta$, $x = \operatorname{tg} 4\beta$, so ergibt die Formel (6):

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \alpha - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} 4\beta - 1}{\operatorname{tg} 4\beta + 1},$$

und wenn man das noch willkürliche α gleich $1/5$ annimmt, so folgt $x = 120/119$, woraus endlich:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}. \tag{7}$$

Daß die Formel (7) zur Rechnung noch zweckmäßiger ist als (5), leuchtet ein, da die Reihe § 133, (5) für $x = 1/5$ schneller konvergiert als für $x = 1/2$. Nach der Formel (7) hat neuerdings Shanks die Rechnung bis auf 707 Stellen fortgeführt.[1])

§ 135. Trigonometrische Reihen.

1. Wenn wir in den allgemeinen Ausdrücken für X, Y (§ 130, (13)) μ in Null übergehen lassen, so erhalten wir neue Reihenentwicklungen von sehr merkwürdigen Eigenschaften. Wir erhalten zunächst, wenn wir bedenken, daß für $\mu = 0$

$$\frac{B_n^{(\mu)}}{\mu} = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2) \cdots (\mu - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

ist:

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu=0} \frac{\varrho^{\mu} \cos \mu\omega - 1}{\mu} = r \cos \vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\vartheta - \cdots, \\ &\lim_{\mu=0} \frac{\varrho^{\mu} \sin \mu\omega}{\mu} \quad\;\; = r \sin \vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\vartheta - \cdots, \end{aligned} \tag{1}$$

wenn

$$\varrho = \sqrt{1 + 2r \cos \vartheta + r^2}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{r \sin \vartheta}{1 + r \cos \vartheta} \tag{2}$$

ist.

---

1) Um von der Genauigkeit, die z. B. schon 100 Stellen geben, eine Vorstellung zu gewinnen, hat H. Schubert in Hamburg ein kühnes Bild ersonnen, das man in dem Aufsatze „Die Quadratur des Zirkels" in der Sammlung wissenschaftlicher Vorträge von Virchow und Holtzendorff, Heft 67, findet.

Die Zeichen e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems und π für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser sind allgemein in Gebrauch gekommen, seit sie Euler in einer in den Schriften der Petersburger Akademie von 1739 erschienenen Schrift „Variae observationes circa series infinitas" angewandt hat. Das Zeichen π findet sich ebenso gebraucht schon 1706 bei William Jones.

Die Zahl π wird die Ludolphische Zahl genannt, nach Ludolph van Ceulen, 1610 als Professor in Leiden gestorben, der diese Zahl auf 35 Dezimalen berechnet hat. In der Peterskirche zu Leiden war 1840 noch eine seitdem nicht wiedergefundene Inschrift, die diese Zahl angab. Berechnungen dieser Zahl gehen aber bis auf Archimedes zurück. Cantor, Bd. II, S. 598 f.

Die Zahl von Dahse findet sich in Crelles Journal, Bd. 27 (1844), die von Shanks in den „Proceedings of the Royal society" in London, Bd. 21, mit einer Berichtigung in Bd. 22 (1873).

Nach der Formel

$$\cos\mu\omega = 1 - 2\left(\sin\frac{\mu\omega}{2}\right)^2$$

ist aber

(3) $$\frac{\varrho^\mu \cos\mu\omega - 1}{\mu} = \frac{\varrho^\mu - 1}{\mu} - 2\varrho^\mu \frac{\sin\frac{1}{2}\mu\omega}{\mu} \sin\tfrac{1}{2}\mu\omega,$$

und da nun, wie wir schon oben gesehen haben,

$$\operatorname*{Lim}_{\mu=0} \frac{\sin\mu\omega}{\mu} = \omega, \quad \operatorname*{Lim}_{\mu=0} \frac{\varrho^\mu - 1}{\mu} = \ln\varrho$$

ist, so verschwindet das zweite Glied auf der rechten Seite von (3), und wir erhalten aus (1):

(4) $$\begin{aligned} \ln\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} &= r\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}r^2\cos 2\vartheta \\ &\quad + \tfrac{1}{3}r^3\cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4}r^4\cos 4\vartheta + \cdots, \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta} &= r\sin\vartheta - \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\vartheta \\ &\quad + \tfrac{1}{3}r^3\sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4}r^4\sin 4\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

2. Die interessantesten Resultate ergeben sich hieraus aber, wenn wir zur Grenze der Konvergenz $r = 1$ übergehen. Daß die Reihen auf der rechten Seite von (4) für $r = 1$ noch konvergent sind, folgt aus einem allgemeinen Satze, dessen Beweis wir hier einschalten.

Es seien $c_1, c_2, c_3, \ldots$ positive Zahlen, die den Bedingungen

(5) $$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > \cdots, \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} c_n = 0$$

genügen, also eine Reihe abnehmender Zahlen, die schließlich unter jede Grenze heruntersinken. Es sei ferner

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

eine Reihe positiver oder negativer Zahlen von der Eigenschaft, daß sich

(6) $$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

mit unendlich wachsendem n zwar nicht notwendig einer bestimmten Grenze nähert, aber doch dem absoluten Wert nach unter einer endlichen Grenze g bleibt.

Unter diesen Voraussetzungen ist

(7) $$S_n = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \cdots + c_nu_n$$

konvergent, d. h. es ist $\operatorname{Lim} S_n = S$ ein bestimmter Wert.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir nach (6):

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1, \\ u_2 &= U_2 - U_1, \\ u_3 &= U_3 - U_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n &= U_n - U_{n-1}, \end{aligned}$$

und erhalten daraus:

$$\begin{aligned} S_n &= c_1 U_1 + c_2(U_2 - U_1) + c_3(U_3 - U_2) + \cdots + c_n(U_n - U_{n-1}) \\ &= U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + \cdots + U_{n-1}(c_{n-1} - c_n) + U_n c_n. \end{aligned}$$

Da nun die unendliche Reihe

$$(c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + (c_3 - c_4) + \cdots = c_1$$

aus lauter positiven Gliedern besteht und konvergiert, und da die U_1, U_2, U_3, ... alle absolut genommen kleiner als g sind, so ist auch die Reihe

$$U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + U_3(c_3 - c_4) + \cdots$$

konvergent (nach § 120, 6.), und da sich $U_n c_n$ der Grenze Null nähert, so ist auch S_n konvergent.

Setzt man in diesem Satze für die Reihe u_1, u_2, u_3, u_4, ... die Zahlen $+1$, -1, $+1$, -1, ..., so erhält man daraus das Theorem § 121, 3.

3. Um den Satz auf die Reihen (4) anzuwenden, setzen wir

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = \frac{1}{4}, \quad \cdots,$$

wodurch die Voraussetzung (5) befriedigt ist, und es ist dann noch zu zeigen, daß die Summen

$$\begin{aligned} U_n &= \cos\vartheta - \cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta - \cdots \pm \cos n\vartheta, \\ V_n &= \sin\vartheta - \sin 2\vartheta + \sin 3\vartheta - \cdots \pm \sin n\vartheta \end{aligned}$$

unter einer endlichen Grenze bleiben. Dies ergibt sich leicht aus den trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\cos n\vartheta &= \cos(n - \tfrac{1}{2})\vartheta + \cos(n + \tfrac{1}{2})\vartheta, \\ 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\sin n\vartheta &= \sin(n - \tfrac{1}{2})\vartheta + \sin(n + \tfrac{1}{2})\vartheta. \end{aligned}$$

Wendet man diese Formeln auf die einzelnen Glieder der Summen an, so ergibt sich:

$$2\,U_n \cos\frac{1}{2}\vartheta = \left(\cos\frac{1}{2}\vartheta + \cos\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\cos\frac{3}{2}\vartheta + \cos\frac{5}{2}\vartheta\right) + \cdots$$
$$\pm\left(\cos\frac{2n-1}{2}\vartheta + \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta\right)$$
$$= \cos\frac{1}{2}\vartheta \pm \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta,$$

$$2\,V_n \cos\frac{1}{2}\vartheta = \left(\sin\frac{1}{2}\vartheta + \sin\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\sin\frac{3}{2}\vartheta + \sin\frac{5}{2}\vartheta\right) + \cdots$$
$$\pm\left(\sin\frac{2n-1}{2}\vartheta + \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta\right)$$
$$= \sin\frac{1}{2}\vartheta \pm \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta.$$

Wir müssen nur den Fall ausnehmen, daß $\cos\frac{1}{2}\vartheta = 0$, also $\vartheta = \pm\pi$ ist. Abgesehen von diesem Fall zeigen aber die vorstehenden Formeln, da $\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta$ und $\cos(n+\frac{1}{2})\vartheta$ zwar bei wachsendem n unaufhörlich schwanken, aber doch immer positive oder negative echte Brüche bleiben, daß U_n und V_n niemals über bestimmte Grenzen hinausgehen.

In dem ausgeschlossenen Fall $\vartheta = \pm\pi$ werden alle Glieder der Reihe U_n gleich -1, und U_n wird also negativ unendlich. Die Glieder von V_n aber werden alle gleich Null und folglich V_n selbst ebenfalls.

4. Nachdem also die Konvergenz festgestellt ist, können wir nach § 122 den Wert der Summen (4) für $r = 1$ ermitteln, wenn wir auf der linken Seite r in 1 übergehen lassen. Dadurch wird

$$\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} = \sqrt{2\,(1+\cos\vartheta)} = 2\cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\vartheta}{2}.$$

In diesen Formeln ist $-\pi < \vartheta < \pi$ und folglich $\cos\frac{\vartheta}{2}$ positiv, $\frac{1}{2}\vartheta$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegen.

Damit erhalten wir also aus (4) die Entwicklungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} \log\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right) &= \cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\cos 4\vartheta + \cdots, \\ \frac{\vartheta}{2} &= \sin\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\sin 4\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

Was den ausgeschlossenen Fall $\vartheta = \pi$ betrifft, so hört in der ersten dieser Reihen die Konvergenz auf, und ebenso wird die linke Seite unendlich. In der zweiten Formel bleibt die Konvergenz zwar bestehen; der Wert der Summe ist aber nicht gleich $\frac{1}{2}\pi$, sondern Null.

5. Setzen wir in der zweiten Formel (8) $\vartheta = x$ und $\vartheta = \pi - x$, so erhalten wir zwei Formeln:

$$(9)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}x &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots, \\ \frac{\pi - x}{2} &= \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots, \end{aligned}$$

von denen die erste in dem Intervall

$$(10)\qquad -\pi < x < +\pi,$$

die zweite in dem Intervall

$$0 < x < 2\pi$$

gültig ist. Die beiden Formeln haben also einen gemeinsamen Gültigkeitsbereich:

$$(11)\qquad 0 < x < \pi.$$

Wenn wir sie addieren, so folgt für dieses Intervall

$$(12)\qquad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots,$$

und es zeigt sich hier das merkwürdige Resultat, daß die konvergente Reihe der rechten Seite, deren Glieder stetige Funktionen von x sind, eine von x unabhängige Summe hat.

6. Von dem Verhalten dieser Reihen kann man sich eine geometrische Anschauung bilden.

Wir wollen setzen:

$$(13)\quad \begin{aligned} f(x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots, \\ \varphi(x) &= \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots, \end{aligned}$$

und da die Reihen auf der rechten Seite dieser Formeln nicht bloß in den Intervallen (10) und (11), sondern für alle x konvergieren, so sind durch (13) zwei Funktionen von x definiert, deren Werte in dem Intervall (11) durch die Formeln (9) und (12) bestimmt sind.

Nun ist aber für jedes ganzzahlige n

$$\sin(-nx) = -\sin nx, \quad \sin n(x + 2\pi) = \sin nx,$$

und folglich genügen die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ den Bedingungen

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x), & \varphi(-x) &= -\varphi(x), \\ f(x + 2\pi) &= f(x), & \varphi(x + 2\pi) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi.$$

Hierdurch sind aber die Werte von $f(x)$, $\varphi(x)$ für alle Werte von x bestimmt.

Trägt man den Wert von x als Abszisse auf und

$$y = f(x) \text{ oder } y = \varphi(x)$$

als die zugehörige Ordinate, so erhält man wie in § 102 eine graphische Darstellung dieser Funktionen, die in Fig. 25 für $f(x)$ und in Fig. 26 für $\varphi(x)$ gegeben ist.

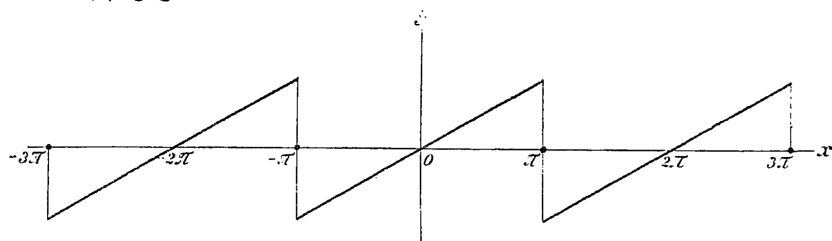


Fig. 25.

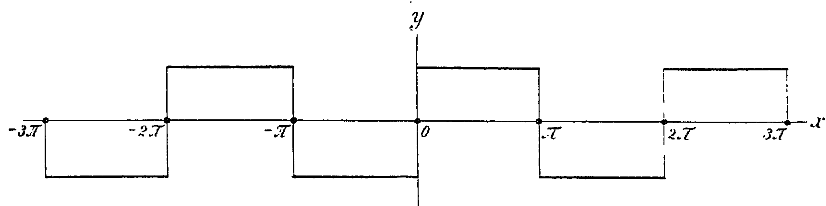


Fig 26.

Man sieht, daß $f(x)$ und $\varphi(x)$ unstetige Funktionen sind, obwohl die Glieder der Reihen, durch die sie definiert sind, stetige Funktionen sind.

Eine klare Vorstellung von dem Zustandekommen solcher Unstetigkeiten gibt die Figur 27, in deren vier Teilen die ausgezogenen Kurven durch die Gleichungen

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x,$$

$$y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x$$

dargestellt sind. Alle diese Kurven gehen durch die Punkte $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$; jede folgende steigt in diesen Stellen steiler auf als die

vorhergehende, und sie nähern sich sehr merklich unter wellenförmigen Schwankungen der in Fig. 26 dargestellten Gestalt an.[1])

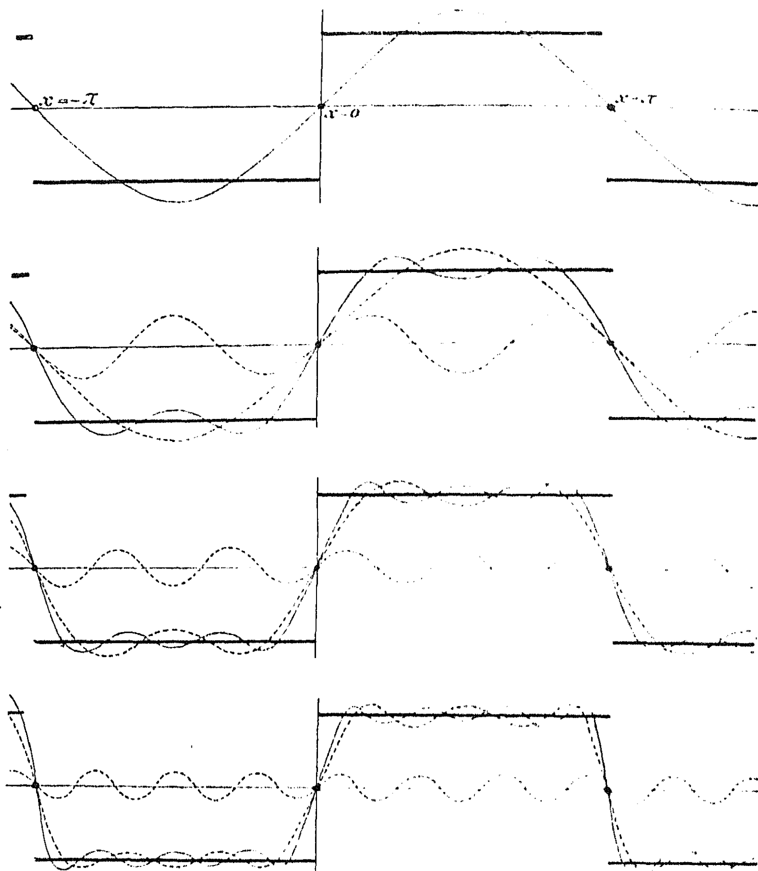


Fig. 27

Diese Reihen sind spezielle Fälle der unter dem Namen Fouriersche Reihen bekannten Entwicklungen, die in der mathematischen Physik häufige Verwendung finden.

1) Figuren dieser Art sind in großem Maßstabe und in mannigfacher Gestalt unter F. Kleins Leitung ausgeführt. Die Figur 27 ist dem Werke von W. E. Byerly, „An elementary treatise on Fouriers series" (Boston 1893), entnommen und findet sich auch in dem Werke von R. Fricke, „Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen" (Leipzig 1900).

Fünfundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Produkte.

---

§ 136. Konvergenz eines unendlichen Produktes.

1. Außer durch unendliche Reihen kann man manche Funktionen, besonders die trigonometrischen, auch durch unendliche Produkte darstellen. Die Frage nach der Konvergenz solcher Produkte läßt sich auf die Frage nach der Konvergenz einer unendlichen Reihe zurückführen; denn nimmt man den Logarithmus eines solchen Produktes, so erhält man eine unendliche Reihe, deren Glieder die Logarithmen der Faktoren sind. Es ist aber vorzuziehen, die Produkte selbst und nicht erst die unendlichen Reihen der Logarithmen zu betrachten. Wir schicken einen Hilfssatz voraus:

2. Hilfssatz. Wenn $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ eine Reihe von positiven echten Brüchen ist, und

$$Q_n = (1-q_1)(1-q_2)\cdots(1-q_n)$$

gesetzt wird, so ist

$$(1) \qquad 1 > Q_n > 1-(q_1+q_2+\cdots+q_n).$$

Daß $Q_n < 1$ ist, ersieht man unmittelbar daraus, daß alle Faktoren $1-q_1$, $1-q_2$, $\cdots$ positive echte Brüche sind. Für $n=2$ ist

$$Q_2 = 1-(q_1+q_2)+q_1q_2,$$

und dies ist offenbar größer als $1-q_1-q_2$. Die Ungleichung (1) ist also für $n=2$ richtig. Wir nehmen sie daher für irgend ein n als erwiesen an und bilden

$$Q_{n+1} = Q_n(1-q_{n+1}) > 1-(q_1+q_2+q_3+\cdots+q_{n+1}) \\ + q_1q_{n+1}+q_2q_{n+1}+\cdots+q_nq_{n+1},$$

also, da $q_1q_{n+1}+q_2q_{n+1}+\cdots+q_nq_{n+1}$ positiv ist,

$$Q_{n+1} > 1-(q_1+q_2+\cdots+q_{n+1}),$$

wodurch (1) allgemein bewiesen ist.

3. Bilden die positiven echten Brüche $q_1, q_2, q_3, q_4, \cdots$ eine unendliche Reihe, die eine konvergente Summe hat, so hat

(2) $$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n$$

für unendlich wachsende n einen bestimmten Grenzwert q, und Q_n ist, wie groß n sein mag, größer als $1 - q$. Andererseits werden die Q_n mit wachsendem n immer abnehmen, da $1 - q_{n+1}$ ein echter Bruch ist, und folglich

$$Q_{n+1} = Q_n(1 - q_{n+1}) < Q_n.$$

Es haben also die Q_n eine bestimmte untere Grenze Q, und es ist für jedes n:

$$Q_n > Q, \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} Q_n = Q.$$

Man nennt in diesem Falle Q_n ein konvergentes unendliches Produkt und setzt auch, ähnlich wie bei den unendlichen Reihen:

(3) $$Q = (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)\cdots.$$

4. Betrachten wir unter derselben Voraussetzung über die Größen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ das Produkt

$$P_n = (1 + q_1)(1 + q_2)\cdots(1 + q_n) > 1,$$

so ergibt sich durch Multiplikation:

$$P_n Q_n = (1 - q_1^2)(1 - q_2^2)\cdots(1 - q_n^2) < 1.$$

Folglich ist

$$1 < P_n < \frac{1}{Q_n} < \frac{1}{Q},$$

und die P_n haben daher eine obere Grenze P:

$$\operatorname{Lim} P_n = P.$$

Demnach ist auch

(4) $$P = (1 + q_1)(1 + q_2)(1 + q_3)\cdots$$

ein konvergentes unendliches Produkt unter der Voraussetzung, daß die unendliche Reihe (2) konvergiert. Hiernach läßt sich der Satz 3. folgendermaßen erweitern:

Wenn die $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ beliebige positive oder negative Größen sind, für die die Reihe (2) unbedingt konvergiert, so ist das unendliche Produkt Q konvergent.

Denn nimmt man die positiven q zusammen und die negativen zusammen, so erhält man ein Produkt von der Form (3) und eins von der Form (4), deren jedes für sich konvergiert.

5. Für die Konvergenz des Produktes Q erhält man dasselbe allgemeine Kennzeichen, wie in § 120, 3. für die Konvergenz einer unendlichen Reihe:

Bezeichnet man mit $R_{n,m}$ das Produkt

$$R_{n,m} = (1 - q_{n+1})(1 - q_{n+2}) \cdots (1 - q_{n+m}),$$

so ist Q konvergent, wenn $R_{n,m}$ der Einheit beliebig nahe kommt, sobald n und $n+m$ beide größer als eine hinlänglich große Zahl N sind.

Der Beweis ergibt sich aus § 120, wenn man den Logarithmus des absoluten Wertes von Q gleich der Summe der Logarithmen der absoluten Werte der einzelnen Faktoren setzt.

§ 137. Darstellung des Sinus durch ein unendliches Produkt.

1. Wenn wir in der Moivreschen Formel

$$\cos ny + i \sin ny = (\cos y + i \sin y)^n$$

für irgend ein positives ganzzahliges n den binomischen Lehrsatz anwenden, so ergibt sich

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos^n y + i B_1^{(n)} \cos^{n-1} y \sin y - B_2^{(n)} \cos^{n-2} y \sin^2 y \\ - i B_3^{(n)} \cos^{n-3} y \sin^3 y + \cdots$$

und daraus:

$$(1) \begin{cases} \cos ny = \cos^n y - B_2^{(n)} \cos^{n-2} y \sin^2 y + B_4^{(n)} \cos^{n-4} y \sin^4 y - \cdots, \\ \dfrac{\sin ny}{\sin y} = B_1^{(n)} \cos^{n-1} y - B_3^{(n)} \cos^{n-3} y \sin^2 y + B_5^{(n)} \cos^{n-5} y \sin^4 y - \cdots. \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$z = \sin^2 y, \quad 1 - z = \cos^2 y$$

und nehmen jetzt $n = 2m + 1$ als ungerade Zahl an, so sind $\cos^{n-1} y$, $\cos^{n-3} y$, $\cos^{n-5} y, \ldots$ ganze Funktionen von z von den Graden $m, m-1, m-2, \ldots$, und die zweite Formel (1) ergibt

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = F(z),$$

worin $F(z)$ eine ganze Funktion von z vom Grade m bedeutet.

Wenn wir die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_m$ von $F(z)$ kennen, so können wir nach § 66, 9. setzen:

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = a_0 (z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_m - z),$$

worin a_0 von z unabhängig ist. Um a_0 zu bestimmen, setzen wir $y = 0$. Dann wird $z = 0$ und (nach (1)) $\sin ny : \sin y = n$, folglich

$$a_0 z_1 z_2 \cdots z_m = n,$$

und wir erhalten:

$$(2) \qquad \sin ny = n \sin y \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right).$$

Nun verschwindet aber $\sin ny$ außer für $y = 0$ dann und nur dann, wenn ny ein Vielfaches von π ist; folglich sind die Wurzeln von $F(z)$ alle in der Form enthalten

$$(3) \qquad z_h = \left(\sin \frac{h\pi}{n}\right)^2,$$

wenn h eine ganze Zahl ist; $h = 0$ führt aber nicht zu einer Wurzel von $F(z)$, weil $F(0) = n$ ist; außerdem ist

$$z_h = z_{-h}, \quad z_h = z_{n-h}, \quad z_h = z_{n+h},$$

und wir erhalten also alle voneinander verschiedenen Werte von z_h, wenn wir in (3) $h = 1, 2, 3, \ldots, m$ setzen.

2. Setzen wir $ny = x$, so ergibt sich aus (2):

$$(4) \qquad \sin x = n \sin \frac{x}{n} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right),$$

worin

$$z = \left(\sin \frac{x}{n}\right)^2, \quad z_h = \left(\sin \frac{h\pi}{n}\right)^2$$

zu setzen ist.

Halten wir nun x fest und lassen n ins Unendliche wachsen, so ist nach § 127, 2.

$$\operatorname{Lim} n \sin \frac{x}{n} = x, \quad \operatorname{Lim} \frac{z}{z_h} = \frac{x^2}{h^2 \pi^2}.$$

Die Anzahl der Faktoren von (4) wächst alsdann auch ins Unendliche, und es ergibt sich aus (4):

$$(5) \qquad \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdots.$$

Es ist also $\sin x$ durch ein unendliches Produkt ausgedrückt, von dem überdies feststeht, daß es konvergiert. Denn setzen wir

$$q_h = \frac{x^2}{\pi^2 h^2},$$

so ist

$$\sum q_h = \frac{x^2}{\pi^2} \sum^h \frac{1}{h^2},$$

und die Reihe $\sum^{h} \frac{1}{h^2}$ ist nach § 118, 7. konvergent. Demnach ist nach § 136, 4. auch das Produkt

$$\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

konvergent.

3. Die Richtigkeit der Formel (5) ist aber hiermit noch nicht vollständig bewiesen. Denn in den späteren Faktoren des Produktes (4) wird h in $\sin\frac{h\pi}{n}$ gleichzeitig mit n unendlich groß, und da ist es also nicht ohne weiteres erlaubt, den Sinus durch den Bogen zu ersetzen. Um den Beweis zu vervollständigen, setzen wir

$$Q(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

$$Q_k(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$R_k(x) = \left(1 - \frac{x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right),$$

und wegen der Konvergenz von $Q(x)$ kommt $R_k(x)$ der Einheit beliebig nahe, wenn k und m hinlänglich groß sind.

Es sei nun

$$Q_k'(x) = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{z_k}\right),$$

$$R_k'(x) = \left(1 - \frac{z}{z_{k+1}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{k+2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{z_m}\right),$$

und wenn wir also zuerst k festhalten und n ins Unendliche wachsen lassen und dann auch k ins Unendliche wachsen lassen, so ist

$$\text{(6)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} Q_k' = Q_k, \quad \operatorname*{Lim}_{k=\infty} Q_k = Q.$$

4. Nach § 127, (1) ist aber

$$\sin\alpha < \alpha,$$

und man kann leicht zeigen, daß, wenn α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt,

$$\sin\alpha > \tfrac{1}{2}\alpha$$

ist. Denn nach § 127, (9) ist

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) + \frac{\alpha^4}{5!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6\cdot 7}\right) + \frac{\alpha^6}{7!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{8\cdot 9}\right) + \cdots,$$

und wenn nun $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ ist, so sind die Klammerausdrücke

$$1 - \frac{\alpha^2}{6} > 1 - \frac{\pi^2}{24} > \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{6 \cdot 7} > 0, \quad 1 - \frac{\alpha^2}{8 \cdot 9} > 0, \ldots$$

und folglich $\sin\alpha > \frac{1}{2}\alpha$. Demnach ist, wenn $h < \frac{1}{2}n$ ist,

$$\sin\frac{x}{n} < \frac{x}{n}, \quad \sin\frac{h\pi}{n} > \frac{h\pi}{2n},$$

und folglich

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\sin\frac{h\pi}{n}} < \frac{2x}{h\pi},$$

folglich

$$1 - \frac{z}{z_h} > 1 - \frac{4x^2}{h^2\pi^2}.$$

Es ist also

$$R_k'(x) > \left(1 - \frac{4x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4x^2}{m^2\pi^2}\right),$$

also

(7) $$1 > R_k'(x) > R_k(2x).$$

Folglich kommt $R_k'(x)$ der Einheit beliebig nahe, wenn k und n groß genug angenommen werden, und aus der genauen Formel (4):

$$\sin x = n \sin\frac{x}{n}\, Q_k'(x)\, R_k'(x)$$

und aus (6) und (7) folgt, daß $Q_k(x)$ dem Werte von $\sin x : x$ beliebig nahe gebracht werden kann, wenn k und n groß genug sind. $Q_k(x)$ kommt aber auch bei hinlänglich großem k dem Werte $Q(x)$ beliebig nahe, und daraus folgt

$$\frac{\sin x}{x} = Q(x),$$

wodurch die Formel (5) bewiesen ist.

5. Wenn man in (5) $x = \frac{1}{2}\pi$, also $\sin x = 1$ setzt, so erhält man eine Darstellung von π durch ein unendliches Produkt von Zahlen. Es ergibt sich zunächst:

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\cdots.$$

Es kommen also in dem Produkt lauter Faktoren von der Form

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}$$

vor, und wenn man also mit dem reziproken Wert dieses Produktes multipliziert, so folgt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1};$$

man kann dies auch so darstellen:

(8)
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdots(2n-1)^2}\frac{1}{2n+1}$$

oder auch, da $2n:(2n+1)$ den Grenzwert 1 hat,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdots(2n-1)^2}\,2n.$$

Dieser Ausdruck ist bekannt unter dem Namen der Wallisschen Zahl.[1])

Dividiert man durch $\frac{1}{2}\pi$ und zieht die Wurzel, so folgt aus (8), da man $\frac{1}{2}(2n+1)$ für ein unendliches n durch n ersetzen kann:

$$\lim_{n=\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 1,$$

oder auch, indem man den Bruch mit

$$2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n = 2^n\cdot n!$$

erweitert:

(9)
$$\lim_{n=\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\,\sqrt{n\pi}} = 1.$$

§ 138. Unendliches Produkt für den Kosinus.

1. Durch die Formel (5) ist der $\sin x$ zunächst nicht in lineare, sondern in quadratische Faktoren zerlegt, man kann aber diese quadratischen Faktoren nach der Formel $1-\alpha^2 = (1-\alpha)(1+\alpha)$ augenblicklich in lineare Faktoren zerlegen, und dann ist $\sin x$ in der Weise einer ganzen rationalen Funktion in lineare Faktoren zerlegt, aus denen die „Wurzeln“, d. h. die Werte von x, für die $\sin x$ verschwindet, sofort zu ersehen sind; der Unterschied ist nur der, daß die Anzahl der Faktoren unendlich ist.

Es stellt sich so $\sin x$ als der Grenzwert des Produktes

1) John Wallis (1616—1703). Zuerst Theologe, seit 1649 Professor der Mathematik in Oxford. Die Formel

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots}$$

findet sich in der 1655 gedruckten „Arithmetica Infinitorum“.

$$(1)\qquad x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\times \left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)$$

für ein unendlich wachsendes n dar.

2. Man kann hieraus eine ähnliche Darstellung für den $\cos x$ ableiten, wenn man Gebrauch macht von der Formel

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Ersetzt man in dem Produkt (1) x durch $\frac{1}{2}\pi - x$, so ergibt sich daraus:

$$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}+\frac{x}{n\pi}\right)\times \left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}-\frac{x}{n\pi}\right),$$

oder

$$(2)\qquad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\times \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)\times \left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right).$$

Der Faktor

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

hat aber nach § 137, 5. den Grenzwert 1, während wir die übrigen Faktoren von (2) in der Weise zusammenfassen können:

$$\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right).$$

Lassen wir hierin n ins Unendliche wachsen, so nähert sich der letzte Faktor $1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}$ der Grenze 1, und wir erhalten das unendliche Produkt für den Kosinus:

$$(3)\qquad \cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

aus dem man wieder unmittelbar die Wurzeln von $\cos x$, nämlich $x=\frac{(2n-1)\pi}{2}$ ersieht.

Man hätte dieses Produkt auch auf demselben Wege wie das Produkt für $\sin x$ direkt erhalten können.

§ 139. Die Bernoullischen Zahlen.

1. Wenn wir die beiden Darstellungen für $\sin x$ durch eine unendliche Reihe und durch ein unendliches Produkt miteinander vergleichen, und die Analogie zwischen den ganzen rationalen Funktionen und der Funktion $\sin x$ noch bis zur Berechnung der Potenzsummen verfolgen, so ergeben sich sehr bemerkenswerte Resultate.

Wenn wir das Produkt

$$Q_n = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ausmultiplizieren, so ergibt sich

$$(1) \qquad Q_n = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n},$$

worin

$$-a_1, \; +a_2, \; -a_3, \; +a_4, \; \cdots, \; (-1)^n a_n$$

die symmetrischen Grundfunktionen der n Wurzeln

$$(2) \qquad \frac{1}{\pi^2}, \quad \frac{1}{4\pi^2}, \quad \frac{1}{9\pi^2}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{n^2\pi^2},$$

d. h. die Summen der Produkte von je zweien, je dreien u. s. w. sind.

Setzen wir aber

$$S_h^{(n)} = \frac{1}{1^{2h}} + \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} + \cdots + \frac{1}{n^{2h}},$$

so sind

$$s_1 = \frac{1}{\pi^2} S_1^{(n)}, \quad s_2 = \frac{1}{\pi^4} S_2^{(n)}, \quad \cdots, \quad s_n = \frac{1}{\pi^{2n}} S_n^{(n)}$$

die Potenzsummen der Größen (2), und es bestehen nach § 71, (6) die folgenden Relationen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &S_1^{(n)} + \pi^2 a_1 = 0, \\ &S_2^{(n)} + \pi^2 a_1 S_1^{(n)} + 2\pi^4 a_2 = 0, \\ &S_3^{(n)} + \pi^2 a_1 S_2^{(n)} + \pi^4 a_2 S_1^{(n)} + 3\pi^6 a_4 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

2. Lassen wir nun n ins Unendliche wachsen, so geht Q_n in $\sin x : x$ über, wofür wir nach § 127, (9) die Reihenentwicklung haben:

$$Q = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots,$$

und es ist also

$$(4) \qquad \begin{aligned} \operatorname{Lim} a_1 &= -\frac{1}{3!}, \\ \operatorname{Lim} a_2 &= \frac{1}{5!}, \\ \operatorname{Lim} a_3 &= -\frac{1}{7!}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Andererseits gehen die $S_h^{(n)}$ in die unendlichen Reihen

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,\\
S_2 &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots,\\
S_3 &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

über, die, wie wir im § 117, 3. gesehen haben, alle konvergieren und bestimmte numerische Werte haben. Diese können wir nun bestimmen, wenn wir in (3) gleichfalls n ins Unendliche wachsen lassen. Es ergibt sich nach (4), (5):

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&S_1 - \frac{\pi^2}{3!} = 0,\\
&S_2 - \frac{\pi^2 S_1}{3!} + \frac{2\pi^4}{5!} = 0,\\
&S_3 - \frac{\pi^2 S_2}{3!} + \frac{\pi^4 S_1}{5!} - \frac{3\pi^6}{7!} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

wodurch man die Summen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eine nach der andern berechnen kann. Man erhält z. B.

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\pi^2}{6},\\
S_2 &= \frac{\pi^4}{90},\\
S_3 &= \frac{16\,\pi^6}{3\cdot 7!} = \frac{\pi^6}{945},\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Man definiert nun ein Zahlensystem B_n unter dem Namen der Bernoullischen Zahlen durch die Formel

$$
(8)\qquad B_n = \frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\, S_n,
$$

und man erhält für die ersten Fälle

$$
B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42}.
$$

Die Zahlen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sind, wie man sieht, rationale Zahlen, sie nehmen anfangs mit wachsendem Index ab, wachsen aber später sehr rasch ins Ungeheuere. Eine Tafel dieser Zahlen bis B_{62} ist von Adams berechnet (Crelles Journal Bd. 85, 1878). Beispielsweise führen wir die sieben ersten dieser Zahlen an:

$$\frac{1}{6},\quad \frac{1}{30},\quad \frac{1}{42},\quad \frac{1}{30},\quad \frac{5}{66},\quad \frac{691}{2730},\quad \frac{7}{6}.$$

B_{62} hat den Nenner 30 und einen Zähler, der mit 110 Stellen geschrieben wird.[1])

3. Auf die Bernoullischen Zahlen stößt man, wenn man durch eine abermalige Reihenentwicklung aus den unendlichen Produkten unendliche Potenzreihen abzuleiten versucht. Wir wollen ein Beispiel für diese Entwicklungen geben. Nach § 138, (3) ist, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$\ln \cos x = \sum^{\nu} \ln \left(1 - \left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^2\right),$$

worin ν die Reihe der positiven ungeraden Zahlen durchläuft. So lange nun $x < \frac{1}{2}\pi$ ist, lassen sich alle die Logarithmen auf der rechten Seite in Potenzreihen entwickeln, und man erhält, wenn n die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft, nach § 132, (8):

$$-\ln \left(1 - \left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^2\right) = \sum^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^{2n}.$$

Nimmt man die Summe aller dieser Ausdrücke, indem man alles zusammenfaßt, was mit derselben Potenz von x multipliziert ist, so folgt:

$$-\ln \cos x = \sum^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2n} \sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}}.$$

Wenn man nun aus der Reihe der sämtlichen natürlichen Zahlen m die Reihe der geraden Zahlen $2m$ wegnimmt, so bleibt die Reihe der ungeraden Zahlen ν. Demnach ist

$$\sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}} = \sum^{m} \frac{1}{m^{2n}} - \sum^{m} \frac{1}{(2m)^{2n}},$$

1) Diese Zahlen treten zuerst auf in dem nachgelassenen Werke von Jakob Bernoulli „Ars conjectandi“, das von des Verfassers Neffen Niklaus I Bernoulli 1713 herausgegeben wurde. (Deutsche Übersetzung mit Anmerkungen von Haussner in „Ostwalds Klassikern“ Heft 107, 108, S. 99 des ersten Teiles.) — Archimedes will die Sandkörner zählen, die in einer Kugel vom Radius des Weltalls Platz haben. Nehmen wir statt Sandkörner Körperchen, etwa wie nach neueren Ansichten die Elektronen, deren 10^{31} in einem Kubikmillimeter Platz haben, und für das Weltall eine Kugel vom Radius einer Siriusweite, 10^{15} Kilometer, so erhalten wir für die Anzahl dieser Körperchen erst eine Zahl mit 95 Stellen. Wir müßten also diese Zahl noch mit hundert Billionen multiplizieren, um eine Zahl von der Größenordnung der 62. Bernoullischen Zahl zu erhalten.

und nach der Bezeichnung (5) und (8)

$$\sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} S_n = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2\cdot(2n)!} B_n,$$

also:

$$(9) \qquad -\log\cos x = \sum^{n} \frac{(2x)^{2n}}{2n} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} B_n.$$

Diese Reihe konvergiert, wie schon bemerkt, so lange $x < \frac{1}{2}\pi$ ist. Reihen dieser Art lassen sich noch mehr ableiten, und es gehören dahin auch die Potenzreihen für die trigonometrischen Funktionen $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Zur Ableitung dieser Formeln bedient man sich aber zweckmäßig der Regeln der Differentialrechnung. Als Beispiel diene die Reihe

$$\operatorname{tg} x = \sum^{n} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1},$$

die sich aus (9) ergibt, wenn man beiderseits die abgeleiteten Funktionen nimmt. (Vgl. den 27. Abschnitt.)

4. Wir haben schon früher gesehen, daß die Zahl $n!$ mit unendlich wachsendem n stärker anwächst als die n^{te} Potenz irgend einer noch so großen Zahl (§ 52, 2.). Die Wallissche Zahl bietet ein Hilfsmittel, die Art dieses Anwachsens noch näher zu bestimmen.[1]

Wir gehen von der Formel aus (§ 137, (9)):

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}} = 1.$$

Setzen wir

$$(10) \qquad \varphi(n) = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}},$$

so wird

$$\frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}},$$

und folglich ist

$$(11) \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = 1.$$

Auf der andern Seite ist

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

1) Die elementare Ableitung dieses Grenzwertes rührt von J. A. Serret her.

Nimmt man hiervon den natürlichen Logarithmus, so folgt

$$\ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Nun ist nach § 132, (7)

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \frac{1}{6n^6} + \cdots$$

und folglich

$$\begin{aligned}\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{5n^4} - \frac{1}{6n^5} + \cdots \\ &\qquad + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{8n^4} + \frac{1}{10n^5} - \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{12n^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{n^3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^4} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)\frac{1}{n^5} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} - \frac{2}{4 \cdot 6}\frac{1}{n^3} + \frac{3}{5 \cdot 8}\frac{1}{n^4} - \frac{4}{6 \cdot 10}\frac{1}{n^5} + \cdots .\end{aligned}$$

Die Glieder dieser Reihe

$$\frac{1}{3 \cdot 4}\frac{1}{n^2}, \quad \frac{2}{4 \cdot 6}\frac{1}{n^3}, \quad \frac{3}{5 \cdot 8}\frac{1}{n^4}, \quad \frac{4}{6 \cdot 10}\frac{1}{n^5}, \quad \cdots,$$

die nach dem allgemeinen Gesetze

$$\frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)}\frac{1}{n^\nu} \quad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

gebildet sind und abwechselnde Zeichen haben, nehmen mit wachsendem ν ab; denn es ist

$$\frac{\nu - 1}{\nu(\nu+1)} - \frac{\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{\nu - 2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \geqq 0,$$

und es sind daher die Differenzen

$$\left(\frac{1}{12}\frac{1}{n^2} - \frac{2}{4 \cdot 6}\frac{1}{n^3}\right), \quad \left(\frac{3}{5 \cdot 8}\frac{1}{n^2} - \frac{4}{6 \cdot 10}\frac{1}{n^3}\right), \quad \cdots$$

und die Differenzen

$$\left(\frac{2}{4 \cdot 6}\frac{1}{n^3} - \frac{3}{5 \cdot 8}\frac{1}{n^4}\right), \quad \left(\frac{4}{6 \cdot 10}\frac{1}{n^5} - \frac{5}{7 \cdot 12}\frac{1}{n^6}\right), \quad \cdots$$

alle positiv. Es entsteht also $\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ aus 1 durch Hinzufügen, aus $1 + \frac{1}{12n^2}$ durch Abziehen positiver Zahlen, und es ist also

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n^2},$$

und folglich

$$1 < \ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} < 1 + \frac{1}{12\, n^2}.$$

Ersetzt man n durch $n+1$, $n+2$, ..., $2n-1$, so folgt:

$$1 < \ln \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} < 1 + \frac{1}{12(n+1)^2} < 1 + \frac{1}{12\, n^2},$$
$$1 < \ln \frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)} < 1 + \frac{1}{12(n+2)^2} < 1 + \frac{1}{12\, n^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$1 < \ln \frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)} < 1 + \frac{1}{12(2n-1)^2} < 1 + \frac{1}{12\, n^2},$$

und wenn man diese Ungleichungen addiert:

$$n < \ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < n + \frac{1}{12\, n},$$

und daraus, wenn man zum Numerus übergeht:

$$1 < e^{-n} \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < e^{\frac{1}{12n}}$$

und folglich

(12) $$\lim_{n=\infty} e^{-n} \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^n \varphi(2n)}{\varphi(n)} = \lim_{n=\infty} e^n \varphi(n) \frac{\varphi(2n)}{\varphi(n)^2} = 1,$$

und folglich nach (11)

$$\lim_{n=\infty} e^n \varphi(n) = 1,$$

oder

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

Demnach wird für große Werte von n näherungsweise gesetzt werden dürfen:

(13) $$n! = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}\, e^{-n+(n+\frac{1}{2})\log n}.$$

4. Die Summe

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots$$

nähert sich mit unendlich wachsendem Wert von n der Grenze 1, und folglich erhält man aus (8) und (13) für große Werte von n den genäherten Wert der Bernoullischen Zahl B_n:

$$B_n = 4\, e^{-2n} n^{2n+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}-2n}.$$

Nehmen wir in einer siebenstelligen Tafel die Briggischen Logarithmen, so ergibt sich näherungsweise

$$\log B_n = 2 \log 2 + \tfrac{1}{2} \log \pi + 2n(\log n - \log e - \log \pi) + \tfrac{1}{2} \log n,$$

und wenn man $n = 62$ setzt,

$$\log B_{62} = 108{,}50429.$$

Es wird also, in Übereinstimmung mit der Adamsschen Tafel, B_{62} eine 109-stellige Zahl, und die drei ersten Ziffern ergeben sich richtig gleich 319.

§ 140. Eulers Beweis von der unendlichen Menge der Primzahlen.

1. Euler hat eine Formel gegeben, durch die ein unendliches Produkt in eine unendliche Reihe umgewandelt wird, die in ihrer weiteren Ausgestaltung in der Zahlentheorie von großer Wichtigkeit geworden ist. Unter anderem kann man daraus einen Beweis des Satzes ableiten, daß die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Wenn auch der von Euklid gegebene Beweis (§ 17, 3.) an Bündigkeit und Strenge nichts zu wünschen übrig läßt, so ist dieser zweite Eulersche Beweis darum von größter Bedeutung, weil er sich verallgemeinern läßt und dadurch den bis jetzt einzigen Weg liefert, um andere tiefere Gesetze über die Verteilung der Primzahlen zu erkennen, so z. B. den Satz, daß es in jeder arithmetischen Progression

$$b,\ a + b,\ 2a + b,\ 3a + b,\ 4a + b,\ \ldots,$$

in der a und b beliebige teilerfremde Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen gibt.[1])

2. Wir gehen aus von der Summenformel der geometrischen Reihe:

$$(1) \qquad \frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

und verstehen unter p eine Primzahl, unter s einen positiven Exponenten, der größer als 1 ist.

Wir wenden diese Formel auf mehrere Primzahlen $p, p_1, p_2, \ldots$ an und bilden das Produkt

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_2^{-s}} \cdots,$$

1) Dirichlet, Abhandlungen der Berliner Akademie 1837, Werke Bd. I, Seite 313.

indem wir die Reihen auf der rechten Seite nach § 125 miteinander multiplizieren. Wir erhalten so, wenn wir

$$P = (1 - p^{-s})(1 - p_1^{-s})(1 - p_2^{-s}) \cdots \tag{2}$$

setzen:

$$\frac{1}{P} = 1 + \sum^{m} \frac{1}{m^s}, \tag{3}$$

worin sich die Summe Σ auf alle Zahlen m bezieht, die durch beliebig wiederholte Multiplikation der in (2) vorkommenden Primzahlen $p, p_1, p_2, \ldots$ entstehen. Diese Summe ist nach § 117, 3. unbedingt konvergent, so lange $s > 1$ ist, und ihre Glieder sind alle unter den Gliedern der Summe $\sum \frac{1}{n^s}$ enthalten, in der alle positiven Zahlen n vorkommen.

3. Nimmt man in das Produkt P alle existierenden Primzahlen auf, so wird P, falls die Anzahl dieser Primzahlen unendlich groß ist, ein unendliches Produkt, und nach § 136 ein konvergentes, abermals so lange $s > 1$ ist.

Die Formel (3) gilt aber auch dann noch, und sie ergibt

$$\prod^{p} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) = \sum^{n} \frac{1}{n^s}, \tag{4}$$

worin sich das mit Π bezeichnete Produkt links auf alle Primzahlen p, die Summe rechts auf alle positiven Zahlen n erstreckt. Um sich davon zu überzeugen, genügt folgende einfache Überlegung. Man erstrecke das Produkt Π zunächst nur über alle die Primzahlen, die kleiner als eine endliche Zahl k sind. Dann bleibt die Formel (4) richtig unter der Voraussetzung, daß n nur solche Zahlen durchläuft, in denen keine Primzahl aufgeht, die größer als k ist. Wenn man also dann k ins Unendliche wachsen läßt, dann nähern sich beide Ausdrücke den Grenzwerten, die in (4) vorkommen.

4. Wir untersuchen jetzt, was aus den Ausdrücken (4) wird, wenn sich s der Grenze 1 nähert.

Wir bezeichnen mit r einen positiven echten Bruch und betrachten die Differenz:

$$\frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} = \frac{1}{n^r}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}\right) = \frac{1}{(n+1)^r}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r - 1\right).$$

Durch Entwicklung des zweiten und dritten dieser Ausdrücke nach dem binomischen Satze ergeben sich die Ungleichungen:

$$\frac{r}{(n+1)^{r+1}} < \frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} < \frac{r}{n^{r+1}}. \tag{5}$$

Ist nun

$$S = 1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \cdots = \sum \frac{1}{n^{r+1}},$$

so folgt, wenn man die Ungleichungen (5) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ aufstellt und addiert:

(6) $$1 < rS < 1 + r.$$

5. Setzen wir also $r = s - 1$, so ergibt sich:

(7) $$\operatorname*{Lim}_{s=1} (s-1) \sum \frac{1}{n^s} = 1.$$

Daraus folgt nach (4):

$$\operatorname*{Lim}_{s=1} (s-1) \prod \frac{1}{1-p^{-s}} = 1.$$

Es wird also, wenn s in 1 übergeht,

(8) $$\prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = s - 1,$$

also gleich Null. Dies wäre aber nicht möglich, wenn die Anzahl der Primzahlen endlich wäre. Denn dann würde das Produkt (8) für $s = 1$ in $\Pi(1 - p^{-1})$ übergehen, also in das Produkt einer endlichen Anzahl von Faktoren, deren keiner verschwindet.

Sechsundzwanzigster Abschnitt.

Transzendenz von e und π.

§ 141. Die Derivierten einer ganzen Funktion.

1. Man unterscheidet in der Arithmetik algebraische und transzendente Zahlen. Eine Zahl ω heißt algebraisch, wenn sie die Wurzel einer Gleichung

$$(1) \qquad C_0 + C_1\omega + C_2\omega^2 + \cdots + C_n\omega^n = 0$$

ist, deren Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots, C_n$ rationale Zahlen sind. Man kann darin immer C_0 und C_n von Null verschieden annehmen und kann überdies $C_0, C_1, \ldots, C_n$ als ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler voraussetzen. Denn haben diese Zahlen Nenner, so kann man mit dem Hauptnenner multiplizieren, und haben sie einen gemeinsamen Faktor, so kann man die ganze Gleichung durch diesen dividieren.

Eine Zahl, die keiner solchen Gleichung genügt, heißt transzendent.

2. Jede Zahl kann als das Verhältnis zweier Strecken dargestellt werden.

Wenn nun die eine dieser Strecken aus der andern durch geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, so ist diese Zahl gewiß algebraisch, und zwar noch von besonderer Natur; denn sie muß durch eine Kette quadratischer Gleichungen bestimmt sein, weil alle Durchschnitte von Kreisen untereinander oder von Kreisen und geraden Linien durch quadratische Gleichungen darstellbar sind und weil jede Zahl, die durch eine Kette von Quadratwurzeln bestimmt ist, die Wurzel einer Gleichung (1) ist (§ 108).

Wir werden in der Folge beweisen, daß die Zahlen e und π zu den transzendenten gehören, und damit ist dann auch das alte berühmte Problem der Quadratur des Kreises erledigt, indem gezeigt ist, daß die Seite eines mit dem Kreise inhaltsgleichen Quadrates in

keiner Weise durch geometrische Konstruktion aus dem Durchmesser des Kreises abgeleitet werden kann[1]).

3. Es sei $f(x)$ eine beliebige ganze Funktion m^{ten} Grades von x, deren Koeffizienten $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_1, c_0$ zunächst noch ganz unbestimmt gelassen werden:

$$f(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0. \tag{2}$$

Wenn wir an Stelle der Veränderlichen x ein Binom $x + h$ setzen, so können wir auf jede Potenz dieses Binoms den binomischen Satz anwenden, und wir können dann die Funktion $f(x+h)$ auch nach Potenzen von h ordnen. Die Koeffizienten dieser Potenzen sind ganze Funktionen von x. Wir haben:

$$\begin{array}{l|l}
c_0 & 1 = 1, \\
c_1 & x + h = x + h, \\
c_2 & (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{m-1} & (x+h)^{m-1} = x^{m-1} + (m-1)hx^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2} h^2 x^{m-3} + \cdots + h^{m-1}, \\
c_m & (x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} h^2 x^{m-2} + \cdots + h^m,
\end{array} \tag{3}$$

und wenn wir diese Ausdrücke mit den beigesetzten Koeffizienten multiplizieren und addieren, so folgt:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x), \tag{4}$$

worin

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \cdots + c_0, \\
f'(x) &= mc_m x^{m-1} + (m-1)\,c_{m-1}x^{m-2} + (m-2)\,c_{m-2}x^{m-3} + \cdots + c_1, \\
f''(x) &= m(m-1)c_m x^{m-2} + (m-1)(m-2)c_{m-1}x^{m-3} + \cdots + 2\cdot 1\, c_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots 1\cdot c_m.
\end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man hierin $x = 0$, so folgt:

$$f(0) = c_0, \quad f'(0) = c_1, \quad f''(0) = 2!\,c_2, \quad \ldots, \quad f^{(m)}(0) = m!\,c_m. \tag{6}$$

Die Funktionen $f', f'', f''', \ldots$, die von den Graden $m-1$, $m-2$, $m-3, \ldots$ sind, heißen die erste, zweite, dritte u. s. f. Derivierte der Funktion $f(x)$, und die Formel (3) ist ein spezieller Fall des Taylorschen Lehrsatzes (siehe unten § 149).

---

1) Der Beweis für die Transzendenz von e ist von Hermite 1873 gefunden, für die Transzendenz von π von Lindemann 1882.

4. Wir bezeichnen die Derivierten auch bisweilen durch den Buchstaben D mit einem Index, also

(7) $$D_1 f(x) = f'(x), \quad D_2 f(x) = f''(x), \cdots, D_\nu f(x) = f^{(\nu)}(x).$$

Die Formeln (4) oder auch die Entstehungsweise der Derivierten zeigen sofort die Richtigkeit der Formeln

$$D_\nu A f(x) = A D_\nu f(x), \quad D_\nu (f(x) + A) = D_\nu f(x),$$

wenn A eine Konstante ist,

$$D_\nu (f(x)) + \varphi(x)) = D_\nu f(x) + D_\nu \varphi(x),$$

wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei ganze Funktionen sind, oder allgemeiner, wenn $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ ganze Funktionen, $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ Konstanten sind:

(8) $$\begin{aligned} & D_\nu (A + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x) + \cdots) \\ & = A_1 D_\nu f_1(x) + A_2 D_\nu f_2(x) + A_3 D_\nu f_3(x) + \cdots. \end{aligned}$$

5. Setzt man in (5) die Koeffizienten c mit Ausnahme von c_m gleich Null, so ergeben sich die Derivierten der Potenz x^m:

$$D_1 x^m = m x^{m-1}, \quad D_2 x^m = m(m-1) x^{m-2},$$
$$D_3 x^m = m(m-1)(m-2) x^{m-3}, \cdots,$$

was wir auch allgemein so ausdrücken können:

$$D_\nu x^m = m(m-1)\cdots(m-\nu+1) x^{m-\nu}.$$

Diese Formel gilt natürlich nur, so lange ν nicht größer als m ist. Ist ν kleiner als m, so können wir dafür setzen:

$$D_\nu x^m = \frac{m!}{(m-\nu)!} x^{m-\nu}.$$

Dagegen erhalten wir für $\nu = m$

$$D_m x^m = m!$$

und wenn ν größer als m ist:

$$D_\nu x^m = 0.$$

§ 142. Eigenschaften der Exponentialfunktion.

1. Wir haben in § 126 gesehen, daß die Potenz e^x für jedes reelle oder komplexe x durch die Summe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots$$

ausgedrückt werden kann.

Wenn wir unter ν irgend eine positive ganze Zahl verstehen und diese Formel mit $\nu!$ multiplizieren, so ergibt sich

(1) $$\nu! e^x = \nu! + \frac{\nu!}{1!} x + \frac{\nu!}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\nu!}{(\nu - 1)!} x^{\nu - 1} + U_\nu,$$

worin U_ν selbst eine unendliche Summe ist, nämlich, da

$$\frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1}, \quad \frac{\nu!}{(\nu+2)!} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}, \ldots$$

ist,

(2) $$U_\nu = x^\nu + \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{x^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+3}}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3} + \cdots.$$

Mit Rücksicht auf § 141, 5. können wir die Formel (1) auch so darstellen:

$$\nu! e^x = D_\nu x^\nu + D_{\nu-1} x^\nu + \cdots + D_1 x^\nu + U_\nu$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$\nu! e^x = \sum_{s=1}^{\nu} D_s x^\nu + U_\nu.$$

In der Summe Σ geht s von 1 bis ν. Ist aber m irgend eine ganze Zahl, die größer als ν ist, so sind die Abgeleiteten $D_{\nu+1} x^\nu$, $D_{\nu+2} x^\nu, \ldots, D_m x^\nu$ gleich Null, und wir können diese Glieder noch beifügen und daher

(3) $$\nu! e^x = \sum_{s=1}^{m} D_s x^\nu + U_\nu$$

setzen.

2. Wir stellen jetzt die Gleichung (3) für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ auf, multiplizieren der Reihe nach mit unbestimmten Faktoren $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ und addieren. Dann ergibt sich:

(4) $$\begin{aligned} & e^x(\gamma_1 1! + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \cdots + \gamma_m m!) \\ & = \sum_{s=1}^{m} D_s(\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m) \\ & \quad + \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots + \gamma_m U_m. \end{aligned}$$

Führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$\varphi(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m,$$

so ist $\varphi(x)$ eine der Bedingung $\varphi(0) = 0$ genügende, sonst aber willkürliche ganze Funktion von x.

Wird dann

(5) $$\varphi'(x) + \varphi''(x) + \varphi'''(x) + \cdots + \varphi^{(m)}(x) = \Phi(x)$$

gesetzt, so ist

$$\Phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \cdots + \gamma_m m!,$$

und wenn endlich noch

$$U(x) = \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots + \gamma_m U_m$$

gesetzt wird, so läßt sich die Gleichung (4) so darstellen:

(6) $$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x).$$

3. In der zuletzt abgeleiteten Formel, die das Fundament für alles folgende bildet, ist $\Phi(0)$ von x unabhängig, $\Phi(x)$ ist eine ganze Funktion von x vom Grade $m-1$ und U ist eine durch eine unendliche Reihe ausgedrückte Funktion von x.

Für den absoluten Wert $|U|$ dieser Funktion können wir aber eine obere Grenze angeben, gestützt auf den Satz, daß der absolute Wert einer Summe niemals größer ist als die Summe der absoluten Werte der Summanden.

Es ist nämlich für jedes positive ν

$$\frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{1!}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} < \frac{1}{2!}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} < \frac{1}{3!}, \cdots,$$

und wenn wir also mit r den absoluten Wert von x bezeichnen, also

$$|x| = r$$

setzen, so folgt aus (2):

$$|U_\nu| < r^\nu \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots\right),$$

also

$$|U_\nu| < r^\nu e^r.$$

Bezeichnen wir daher mit

$$c_1, c_2, \ldots, c_m$$

die absoluten Werte von

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m,$$

so ergibt sich aus der Definition von $U(x)$:

$$|U(x)| < c_1 r e^r + c_2 r^2 e^r + \cdots + c_m r^m e^r,$$

oder wenn wir

(7) $$F(r) = c_1 r + c_2 r^2 + \cdots + c_m r^m$$

setzen:

(8) $$|U(x)| < F(r)e^r.$$

Hierin geht dann $F(r)$ aus $\varphi(x)$ dadurch hervor, daß man für die Veränderliche x und die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ die absoluten Werte $r, c_1, c_2, \ldots c_m$ setzt.

§ 143. Transzendenz von *e*.

1. Um nun zu beweisen, daß e eine transzendente Zahl ist, gehen wir indirekt zu Werke. Wir nehmen an, es sei e die Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades,

(1) $$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n = 0,$$

worin die $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ ganze Zahlen sind, von denen die erste C_0 und die letzte C_n von Null verschieden sind; wäre nämlich $C_0 = 0$, so müßte man die Gleichung (1) durch eine Potenz von e dividieren, um eine Gleichung von derselben Form zu erhalten, in der das von e unabhängige Glied von Null verschieden ist.

2. Setzen wir in der Grundformel (§ 142 (6)) $x = 1, 2, \ldots, n$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e\Phi(0) &= \Phi(1) + U(1), \\ e^2\Phi(0) &= \Phi(2) + U(2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^n\Phi(0) &= \Phi(n) + U(n), \end{aligned}$$

und wenn wir diese Gleichungen mit $C_1, C_2, \ldots, C_n$ multiplizieren, addieren und beiderseits $C_0\Phi(0)$ zufügen, so erhalten wir wegen (1):

(2) $$\begin{aligned} &C_0\Phi(0) + C_1\Phi(1) + C_2\Phi(2) + \cdots + C_n\Phi(n) \\ &\quad + C_1U(1) + C_2U(2) + \cdots + C_nU(n) \\ &\quad = (C_0 + C_1e + C_2e^2 + \cdots + C_ne^n)\,\Phi(0) = 0, \end{aligned}$$

oder auch so geschrieben:

(3) $$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \Phi(\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu U(\nu) = 0,$$

und hierin ist nach § 142, (5)

(4) $$\Phi(\nu) = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi^{(\mu)}(\nu),$$

worin $\varphi(x)$ eine der Bedingung $\varphi(0) = 0$ genügende, sonst aber willkürliche ganze Funktion von x und $\varphi^{(\mu)}(x)$ die μ^{te} Ableitung von $\varphi(x)$ ist.

3. Wenn wir nun zeigen können, daß bei irgend einer Annahme über die noch ganz willkürlichen Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, d. h. über die willkürliche Funktion $\varphi(x)$ die Gleichung (3) unmöglich ist, so folgt, daß die Annahme einer Gleichung (1) unzulässig war, daß also e eine transzendente Zahl ist.

Dies wird aber erwiesen sein, wenn wir über $\varphi(x)$ so verfügen können, daß

1) die erste Summe $\Sigma C_\nu \Phi(\nu)$ eine nicht verschwindende ganze Zahl, also dem absoluten Werte nach wenigstens gleich 1 ist, während

2) die zweite Summe $\Sigma C_\nu U(\nu)$ dem absoluten Werte nach kleiner als 1 ist; denn dann können die beiden Summen zusammen nicht Null ergeben.

4. Nach § 17, 3. gibt es Primzahlen, die größer sind als eine beliebig gegebene Zahl. Wir nehmen hiernach eine Primzahl p an, die größer ist als n und setzen:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p}{(p-1)!},$$

wodurch die Bedingung $\varphi(0) = 0$ befriedigt ist.

Der Grad m dieser Funktion ist $np + p - 1$. Wir wollen uns diese Funktion geordnet denken nach aufsteigenden Potenzen von x oder von $x-1, x-2, \ldots, x-n$. Wir erhalten dann folgende verschiedene Darstellungen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (p-1)!\,\varphi(x) &= x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p \\ &= a_{p-1}x^{p-1} + a_p x^p + \cdots + a_m x^m \\ &= b_p(x-\nu)^p + b_{p+1}(x-\nu)^{p+1} + \cdots + b_m(x-\nu)^m, \\ &\qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}$$

Niedrigere Potenzen von x und von $x-\nu$ kommen nicht darin vor, da $\varphi(x)$ durch x^{p-1} und durch $(x-1)^p, \ldots, (x-n)^p$ teilbar ist. Es sind darin $a_{p-1}, a_p, \ldots, a_m, b_p, b_{p+1}, \ldots, b_m$ ganze Zahlen.

5. Aus (5) ergibt sich durch Division mit x^{p-1}:

$$(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p = a_{p-1} + a_p x + \cdots + a_m x^{m-p+1},$$

und wenn man in dieser identischen Gleichung $x = 0$ setzt:

$$a_{p-1} = \pm 1^p \cdot 2^p \cdots n^p = \pm n!^p.$$

Dies ist, weil p eine Primzahl und größer als n ist, also in keinem der Faktoren $1, 2, \ldots, n$ aufgeht, eine durch p nicht teilbare ganze Zahl.

Es ist aber weiter, weil $\varphi(x)$ erst mit der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz von x anfängt:

$$\gamma_1 = 0, \cdots, \gamma_{p-2} = 0,$$

$$\gamma_{p-1} = \frac{a_{p-1}}{(p-1)!}, \quad \gamma_p = \frac{a_p}{(p-1)!}, \cdots, \gamma_m = \frac{a_m}{(p-1)!}.$$

und demnach, wenn man die Abgeleiteten von $\varphi(x)$ für $x = 0$ nach § 141, (6) bildet:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \cdots, \varphi^{(p-2)}(0) = 0.$$
$$\varphi^{(p-1)}(0) = a_{p-1},$$
$$\varphi^{(p)}(0) \quad = \frac{p!\, a_p}{(p-1)!} = p a_p,$$
$$\varphi^{(p+1)}(0) = p(p+1)\, a_{p+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(m)}(0) \quad = p(p+1) \cdot \ \cdot m a_m.$$

Es sind also die Derivierten $\varphi^{(\mu)}(0)$ ganze Zahlen, $\varphi^{(p-1)}(0)$ nicht durch p teilbar, und alle andern $\varphi^{(\mu)}(0)$ sind entweder gleich Null oder durch p teilbar, und folglich ist auch die Summe $\Phi(0) = \Sigma \varphi^{(\mu)}(0)$ eine durch p nicht teilbare ganze Zahl.

6. Wenn wir in der Formel § 141 (4):

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(x)$$

$x = \nu$, $h = x - \nu$ setzen, so ergibt sich

$$\varphi(x) = \varphi(\nu) + (x-\nu)\varphi'(\nu) + \frac{(x-\nu)^2}{2!}\varphi''(\nu) + \cdots + \frac{(x-\nu)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\nu),$$

und aus der dritten Darstellung (5) folgt für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$\varphi(\nu) = 0, \quad \varphi'(\nu) = 0, \ldots, \varphi^{(p-1)}(\nu) = 0,$$
$$\varphi^{(p)}(\nu) \quad = p b_p,$$
$$\varphi^{(p+1)}(\nu) = p(p+1) b_{p+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(m)}(\nu) \quad = p(p+1)\cdots m b_m,$$

und folglich sind alle $\varphi^{(\mu)}(\nu)$ entweder Null oder durch p teilbare ganze Zahlen.

Es sind also auch die Summen

$$\Phi(1),\ \Phi(2), \ldots, \Phi(\nu)$$

durch p teilbare ganze Zahlen.

7. Hieraus folgt, daß auch

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \Phi(\nu) = C_0\Phi(0) + C_1\Phi(1) + C_2\Phi(2) + \cdots + C_n\Phi(n)$$

eine ganze Zahl ist, und wenn wir p so groß annehmen, daß die (von Null verschiedene) Zahl C_0 nicht durch p teilbar ist, so ist auch diese Summe nicht durch p teilbar, also von Null verschieden.

Dies ist nach 3. der erste Teil des zu führenden Beweises.

8. Der zweite Teil, der sich auf das Verhalten von Γ bezieht, ist nun einfach nach der Ungleichung § 142 (8) zu führen. Es kommt hier zunächst darauf an, die Funktion $F(r)$ zu bilden, die sich aus $\varphi(x)$ ergibt, wenn man $x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ durch ihre absoluten Werte $r, c_0, c_1, \ldots, c_m$ ersetzt.

Wenn man eine Funktion

$$x^k - \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} - \cdots,$$

deren Glieder alternierende Vorzeichen haben, mit $x - \beta$ multipliziert, so erhält man wieder eine Funktion mit alternierenden Vorzeichen:

$$x^{k+1} - (\alpha_1 + \beta)x^k + (\alpha_2 + \alpha_1\beta)x^{k-1} - \cdots,$$

und wenn man die Vorzeichen in beiden Faktoren gleich macht, also

$$x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \cdots \quad \text{und} \quad x + \beta$$

miteinander multipliziert, so erhält man ein Produkt

$$x^{k+1} + (\alpha_1 + \beta)x^k + (\alpha_2 + \alpha_1\beta)x^{k-1} + \cdots,$$

das aus dem ersten dadurch entsteht, daß man darin ebenfalls alle Vorzeichen gleich macht.

9. Wenn man diesen einfachen Satz wiederholt anwendet, so folgt, daß das ausgerechnete und geordnete Produkt

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p}{(p-1)!}$$

alternierende Vorzeichen hat und in das Produkt

$$F(x) = \frac{x^{p-1}(x+1)^p(x+2)^p \cdots (x+n)^p}{(p-1)!}$$

übergeht, wenn man allen Koeffizienten das positive Vorzeichen gibt, mit anderen Worten, daß uns das Produkt die gesuchte Funktion

$$F(r) = \frac{r^{p-1}(r+1)^p(r+2)^p \cdots (r+n)^p}{(p-1)!}$$

liefert, und daß also

$$\Gamma(x) < F(r)e^r \tag{6}$$

ist.

10. Setzen wir zur Abkürzung

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n) = \varrho_\nu,$$

so ist nach (6)

$$|U(\nu)| < \frac{\varrho_\nu^p}{\nu(p-1)!}\, e^\nu.$$

Nun nähert sich aber, da die Reihe für e^x für alle x konvergiert, ihr allgemeines Glied $x^m : m!$ mit unendlich wachsendem m für jedes x der Grenze Null (vgl. auch § 52, 2.). Man kann also auch die Primzahl p so groß nehmen, daß

$$\frac{\varrho_\nu^{p-1}}{(p-1)!}$$

beliebig klein wird, und da $e^\nu \varrho_\nu : \nu$ endlich ist, so kann auch $|U(\nu)|$ und folglich auch die Summe $\Sigma C_\nu U(\nu)$ beliebig klein, also insbesondere auch kleiner als 1 gemacht werden.

Dies ist nach 3. der zweite Teil des Beweises, und es ist also bewiesen:

Die Zahl e ist eine transzendente Zahl.

§ 144. Transzendenz von π.

1. Auf den gleichen Grundlagen beruht der Beweis, daß die Zahl π eine transzendente Zahl ist, und zwar stützt sich dieser Beweis auf die durch die Gleichung

(1) $$1 + e^{i\pi} = 0$$

ausgedrückte Beziehung zwischen e und π (§ 127, (12)).

Wenn π eine algebraische Zahl ist, so ist auch $i\pi$ eine algebraische Zahl. Denn ist $\xi(\pi) = 0$ eine rationale Gleichung, der die Zahl π genügt, so ist auch $\xi(\pi)\xi(-\pi) = 0$. Ist nun $y = i\pi$, so ist $\xi(iy)\xi(-iy) = \psi(y) = 0$, und die Koeffizienten von $\psi(y)$ sind reelle rationale Zahlen.

2. Es sei ψ vom ν^{ten} Grade und

(2) $$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_\nu$$

seien die Wurzeln von ψ, unter denen also die Zahl πi vorkommt. Demnach ist wegen (1)

$$(1+e^{y_1})(1+e^{y_2})(1+e^{y_3})\cdots(1+e^{y_\nu}) = 0,$$

oder, wenn wir ausmultiplizieren:

(3) $$1 + \Sigma e^{y_i} + \Sigma e^{y_i + y_k} + \Sigma e^{y_i + y_k + y_l} + \cdots = 0,$$

worin die erste Summe Σe^{y_i} sich auf alle Wurzeln (2) erstreckt, die zweite $\Sigma e^{y_i+y_k}$ auf alle Kombinationen je zweier $y_i + y_k$ (ohne Wiederholung), die dritte $\Sigma e^{y_i+y_k+y_l}$ auf alle Kombinationen zu dreien u. s. f.

3. Die symmetrischen Funktionen der ν Größen y_i sind nach unserer Voraussetzung rationale Zahlen (ganz oder gebrochen), und die ν Größen y_i genügen der rationalen Gleichung $\psi(x) = 0$.

Die symmetrischen Funktionen der $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Größen $y_i + y_k$ (z. B. ihre Potenzsummen) sind zugleich symmetrische Funktionen der y_i, also ebenfalls rationale Zahlen und es sind also die $y_i + y_k$ ebenfalls die Wurzeln einer rationalen Gleichung $\psi_1(x) = 0$.

Das Gleiche gilt von den Summen $y_i + y_k + y_l$, deren Anzahl $\frac{1}{6}\nu(\nu-1)(\nu-2)$ ist, und auch diese sind die Wurzeln einer Gleichung $\psi_2(x) = 0$ u. s. f.

Das Produkt

(4) $$\psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\cdots$$

ist also eine ganze Funktion von x, die verschwindet, wenn für x eine der Zahlen

(5) $$y_i,\quad y_i + y_k,\quad y_i + y_k + y_l,\quad \ldots$$

gesetzt wird.

4. Unter diesen Zahlen (5) kann die Zahl Null ein oder mehrmals enthalten sein. Wenn wir annehmen, daß $C - 1$ mal die Zahl Null darunter vorkomme, so ist C eine positive ganze Zahl, mindestens $= 1$. Sie wird nur dann $= 1$, wenn die Null unter den Größen (5) nicht vorkommt.

Das Produkt (4) enthält dann $C - 1$ mal den Faktor x, und wenn wir diesen absondern und die Koeffizienten dann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner N zu ganzen Zahlen machen, so ergibt sich eine Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$\chi(x) = N x^{1-C}\,\psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\cdots,$$

deren Grad wir gleich n setzen, deren Wurzeln

(6) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$

die von Null verschiedenen unter den Größen (5) sind und nach (3) der Gleichung genügen:

(7) $$C + e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \cdots + e^{x_n} = 0.$$

Da Null unter den Wurzeln (6) nicht vorkommt, so ist $\chi(0)$ von Null verschieden.

Es kommt nicht darauf an, ob unter den Größen (6) dieselbe Zahl mehrmals vorkommt; jedenfalls kommt aber die Zahl πi darunter vor.

5. Nun gehen wir zurück auf die Gleichung § 142, (6):

$$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x), \tag{8}$$

setzen darin $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, addieren und fügen beiderseits $C\Phi(0)$ hinzu. So erhalten wir nach (7):

$$\begin{aligned} & C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_n) \\ & + U(x_1) + U(x_2) + \cdots + U(x_n) \\ & = \Phi(0)(C + e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

und der Grundgedanke des Beweises ist nun ganz derselbe wie bei der Zahl e. Wir beweisen, daß man über die Funktion $\varphi(x)$ so verfügen kann, daß

1) $C\Phi(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(x_\nu)$ eine nicht verschwindende ganze Zahl wird,

2) $\sum_{\nu=1}^{n} U(x_\nu)$ kleiner als 1 wird;

dann erweist sich die Gleichung (9) als unmöglich, und die Annahme, π sei eine algebraische Zahl, ist widerlegt.

6. Die Funktion $\chi(x)$ hat die Form

$$\chi(x) = a x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

worin die Koeffizienten $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganzzahlig, a und a_n von Null verschieden und a positiv angenommen werden können; multiplizieren wir mit a^{n-1} und setzen

$$ax = z, \quad a_1 = b_1, \quad a a_2 = b_2, \quad a^2 a_3 = b_3, \quad \ldots, \quad a^{n-1} a_n = b_n,$$

so ergibt sich eine Funktion

$$a^{n-1}\chi(x) = \theta(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n, \tag{10}$$

deren Koeffizienten g a n z e Z a h l e n sind, und deren Wurzeln

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \ldots, z_n \tag{11}$$

die Produkte

$$ax_1, ax_2, ax_3, \ldots, ax_n \tag{12}$$

sind.

7. Wir machen jetzt über die zur Bildung von $\Phi(x)$ in der Formel (9) verwendete Funktion $\varphi(x)$ die Annahme:

$$\varphi(x) = \frac{z^{p-1}(\theta(z))^p}{(p-1)!} = \frac{a^{np-1}x^{p-1}(\chi(x))^p}{(p-1)!}, \tag{13}$$

worin p eine hinlänglich große Primzahl ist. Der Grad m von $\varphi(x)$ ist gleich $np + p - 1$, und außerdem ist $\varphi(0) = 0$.

Es sei dann, wenn wir nach Potenzen von z ordnen:

$$\begin{aligned}(\theta(z))^p &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \\ &= A_0 + A_1 a x + A_2 a^2 x^2 + \cdots,\end{aligned}$$

worin die $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ganze Zahlen sind, und wenn man $z = 0$ setzt, so folgt

$$A_0 = b_n^p.$$

Es ist also A_0 von Null verschieden. Es wird ferner

$$(p-1)!\,\varphi(x) = A_0 a^{p-1} x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \cdots$$

und folglich

$$\begin{aligned}\varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) &= 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(p-2)}(0) = 0, \\ \varphi^{(p-1)}(0) &= A_0 a^{p-1} = b_n^p a^{p-1}, \\ \varphi^{(p)}(0) &= p A_1 a^p, \\ \varphi^{(p+1)}(0) &= p(p+1) A_2 a^{p+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

8. Nehmen wir also p größer als die größere der beiden Zahlen a, b_n, so ist $\varphi^{(p-1)}(0)$ nicht durch p teilbar, während alle übrigen $\varphi^{(\nu)}(0)$ entweder gleich Null oder durch p teilbar sind. Folglich ist

$$\Phi(0) = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu)}(0)$$

eine durch p nicht teilbare ganze Zahl.

9. Nach § 66, 3. ergibt sich

$$\frac{\theta(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + q_2 z^{n-3} + \cdots,$$

worin die Koeffizienten

$$q_1 = z_1 + b_1,$$
$$q_2 = z_1^2 + b_1 q_1 + b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ganze Funktionen von z_1 mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Hiernach erhalten wir, wenn wir die p^{te} Potenz nehmen, mit

$$z^{p-1} = (z_1 + (z - z_1))^{p-1}$$

multiplizieren und dann nach aufsteigenden Potenzen von $z - z_1$ ordnen, nach (13):

$$\begin{aligned}(p-1)!\,\varphi(x) &= (z - z_1)^p B_1(z_1) + (z - z_1)^{p+1} B_2(z_1) + \cdots \\ &= a^p (x - x_1)^p B_1(z) + a^{p+1}(x - x_1)^{p+1} B_2(z_1) + \cdots,\end{aligned}$$

worin die Koeffizienten $B_1(z_1)$, $B_2(z_1)$, ... ganze Funktionen von z_1 sind, z. B.

$$B_1(z_1) = \beta_1^{(0)} + \beta_1^{(1)} z_1 + \beta_1^{(2)} z_1^2 + \cdots,$$
$$B_2(z_1) = \beta_2^{(0)} + \beta_2^{(1)} z_1 + \beta_2^{(2)} z_1^2 + \cdots,$$

mit ganzzahligen Koeffizienten β.

Daraus folgt nun wie oben:

$$\varphi'(x_1) = 0, \quad \varphi''(x_1) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(p-1)}(x_1) = 0,$$
$$\varphi^{(p)}(x_1) = p\,a^p B_1(z_1),$$
$$\varphi^{(p+1)}(x_1) = p(p+1)\,a^{p+1} B_2(z_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

und folglich, wenn wir

$$Q(z_1) = a^p B_1(z_1) + (p+1)\,a^{p+1} B_2(z_1) + \cdots$$

setzen:

$$\Phi(x_1) = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu)}(x_1) = p\,Q(z_1), \tag{14}$$

worin

$$Q(z_1) = Q_0 + Q_1 z_1 + Q_2 z_1^2 + Q_3 z_1^3 + \cdots$$

eine ganze Funktion von z_1 ist, deren Koeffizienten Q_0, Q_1, Q_2, ... ganze Zahlen sind.

Diese Formeln gelten unverändert, wenn x_1, z_1 durch x_2, z_2, ..., x_n, z_n ersetzt werden.

Wenn man dann die aus (14) sich ergebenden Formeln addiert, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} Q(z_\nu) = n Q_0 + Q_1 s_1 + Q_2 s_2 + Q_3 s_3 + \cdots,$$

worin $s_1 = \Sigma z_\nu$, $s_2 = \Sigma z_\nu^2$, $s_3 = \Sigma z_\nu^3$, ... die Potenzsummen der z

sind. Diese werden aber nach (10) aus den Newtonschen Formeln (§ 71, (6)) bestimmt:

$$\begin{aligned} &s_1 + b_1 = 0, \\ &s_2 + s_1 b_1 + 2b_2 = 0, \\ &s_3 + s_2 b_1 + s_1 b_2 + 3b_3 = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

und ergeben sich also als ganze Zahlen. Daraus folgt:

10. Die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi(x_\nu) = p \sum_{\nu=1}^{n} Q(x_\nu)$$

ist eine durch p teilbare ganze Zahl.

Nehmen wir daher p größer an als die (von Null verschiedene) Zahl C, so ergibt sich aus 8. und 10.:

11. Die Summe

$$C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_n)$$

ist eine durch p nicht teilbare ganze Zahl, also ihr absoluter Wert mindestens gleich 1.

Damit ist nach 5. der erste Teil des Beweises geführt.

12. Um auch den zweiten Teil zu erledigen, müssen wir die Funktion $F(r)$ betrachten, die man erhält, wenn man in der geordneten Funktion $\varphi(x)$ die Variable x und die Koeffizienten durch ihre absoluten Werte ersetzt.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\chi(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

und erhalten für $\varphi(x)$ nach (13) die Formel:

$$(p-1)!\, \varphi(x) = a^{np+p-1} x^{p-1} (x - x_1)^p (x - x_2)^p \cdots (x - x_n)^p.$$

Die Koeffizienten dieses Ausdruckes entstehen durch Multiplikation und Addition aus den Größen:

$$a, \; -x_1, \; -x_2, \; \ldots, \; -x_n,$$

und die absoluten Werte dieser Koeffizienten sind daher nach § 51, 5., 6. kleiner (oder jedenfalls nicht größer) als die Zahlen, die man erhält, wenn man diese Größen durch ihre absoluten Werte

$$a, \; r_1, \; r_2, \; \ldots, \; r_n$$

ersetzt, d. h. sie sind nicht größer als die Koeffizienten der Funktion:

$$a^{np+p-1}x^{p-1}(x+r_1)^p(x+r_2)^p\cdots(x+r_n)^p.$$

Setzen wir also

$$\varrho(r)=a^{n+1}r(r+r_1)(r+r_2)\cdots(r+r_n),$$

so ist für jedes positive r

$$F(r)<\frac{(\varrho(r))^p}{ar(p-1)!}$$

und kann daher durch hinlängliche Vergrößerung von p beliebig klein gemacht werden.

Es kann also auch nach § 142, (8) der absolute Wert von $U(x_\nu)$ und damit der absolute Wert der Summe $\sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu)$ beliebig klein, also auch kleiner als 1 gemacht werden, und damit ist auch der zweite Punkt in 5. erledigt und vollständig nachgewiesen:

Die Zahl π ist eine transzendente Zahl.

Siebenundzwanzigster Abschnitt.

Funktionen, Differentiale und Integrale.

§ 145. Geometrische Darstellung von Funktionen.

1. Wir haben uns schon früher (§ 102) der Koordinaten bedient, um die Abhängigkeit einer ganzen Funktion von der Variablen sinnlich anschaulich zu machen. Da nun die Erkenntnis der Abhängigkeit einer meßbaren Größe von einer anderen, die verschiedener Werte fähig, also veränderlich ist, das vorzüglichste Ziel aller Anwendungen der Mathematik auf die Vorgänge der Außenwelt ist, so ist auch die Darstellung der Funktionen durch Kurven ein unentbehrliches Hilfsmittel, um mit einem Blick gewissermaßen ein Bild von dem Verlauf eines Vorganges oder überhaupt von der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größen zu gewinnen.

Die beobachtenden Naturwissenschaften, die Statistik und andere Disziplinen bedienen sich seit langem dieses graphischen Hilfsmittels, um auch in Fällen, wo das Gesetz der Abhängigkeit nicht genau bekannt ist, diese Abhängigkeit durch Kurven darzustellen, die durch Messungen oder auch durch direkte Registrierungen, bei denen die Photographie ein ausgezeichnetes Hilfsmittel bietet, gewonnen sind.

2. Hier beschäftigen wir uns zunächst mit der geometrischen Darstellung der einfachen gesetzmäßigen Funktionen, die wir in den vorhergehenden Abschnitten kennen gelernt haben.

Eine ganze Funktion ersten Grades oder eine lineare Funktion

(1) $$y = ax + b$$

wird durch eine gerade Linie dargestellt. Dies wird in der analytischen Geometrie der Ebene näher erörtert, läßt sich aber unmittelbar aus der Figur 28 ersehen, aus der sich die Gleichung

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

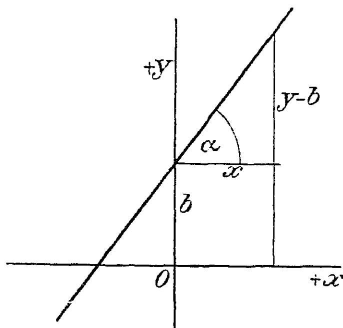


Fig. 28.

ergibt, die durch die Substitution $a = \operatorname{tg} \alpha$ in (1) übergeht. Der Abschnitt b auf der y-Achse wird negativ gerechnet, wenn die y-Achse unterhalb des Nullpunktes geschnitten wird. Ebenso ist α negativ, wenn die Gerade mit der positiven x-Achse einen stumpfen oder negativen spitzen Winkel bildet.

3. Eine ganze Funktion 2ten Grades $y = f(x)$ wird, wie wir schon früher gesehen haben (§ 102), durch eine Parabel dargestellt. Ist $f(x)$ von höherem als dem 2ten Grade, so gehört immer noch zu jeder Abszisse x ein bestimmter Wert von y. Man nennt diese Kurven auch Parabeln höherer Ordnung. Ist beispielsweise $y = ax^n$, so lassen sich die den Werten $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ entsprechenden Kurven C_n durch das folgende rekurrente Verfahren auseinander ableiten (Fig. 29). Man errichte auf der x-Achse in den Abständen $OE = 1$ und $OG = x$ vom Koordinatenanfang die Lote h und η, trage auf h die Strecke $EQ_0 = a$ mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen ab, das in Figur 29 positiv angenommen ist, bringe OQ_0 mit η in P_1 zum Schnitt und fälle $P_1Q_1 \perp h$; bringe OQ_1 mit η in P_2 zum Schnitt und fälle $P_2Q_2 \perp h$; bringe OQ_2 mit η in P_3 zum Schnitt und fälle $P_3Q_3 \perp h$, u. s. w. Von P_1 rückwärts gehend fälle man $Q_0P_0 \perp \eta$; bringe OP_0 mit h in Q_{-1} zum

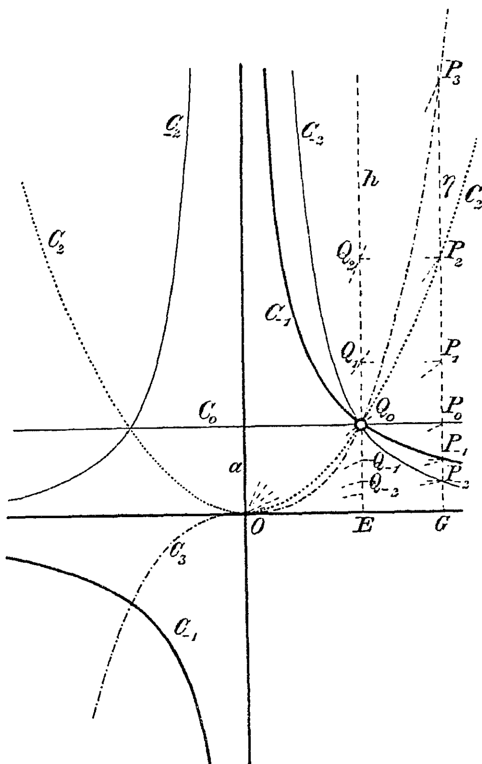


Fig. 29.

Schnitt und fälle $Q_{-1}P_{-1} \perp \eta$; bringe OP_{-1} mit h in Q_{-2} zum Schnitt und fälle $Q_{-2}P_{-2} \perp \eta$, u. s. w. Dann gehen also sämtliche Punkte der beiderseits unbegrenzten Reihe

$$\ldots, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$$

auseinander durch dasselbe Bildungsgesetz hervor, und wir **behaupten**, daß P_n der zur Abszisse x gehörige Punkt der Kurve C_n ist, die durch die Gleichung $y = ax^n$ festgelegt ist. Denn ist y_ν die Ordinate von P_ν, wo also ν eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null sein kann, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OGP_ν und $OEQ_{\nu-1}$, daß $y_\nu : y_{\nu-1} = x : 1$, also $y_\nu = xy_{\nu-1}$ ist. Also ist:

$$y_\nu = xy_{\nu-1} = x^2 y_{\nu-2} = \cdots = x^\mu y_{\nu-\mu},$$

und 1) für $\nu = n$:

$$y_n = x^n y_0 = x^n a,$$

2) für $\nu = 0$:

$$y_0 = x^n y_{-n}, \quad y_{-n} = y_0 x^{-n} = a x^{-n},$$

w. z. b. w.

4. Als Beispiele für rationale gebrochene Funktionen betrachten wir:

$$y = \frac{cx^2}{a - x}, \quad y = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Bei der ersten ist y positiv, wenn $x < a$, und negativ, wenn $x > a$ ist. Es wird $y = 0$ für $x = 0$ und y hat da einen Minimumwert, weil es hier nicht von positiven Werten zu negativen Werten übergeht, sondern von Null zu positiven Werten zurückkehrt. Für $x = a$ und für $x = \pm\infty$ wird y unendlich. (Fig. 30. Die Kurve ist eine Hyperbel.)

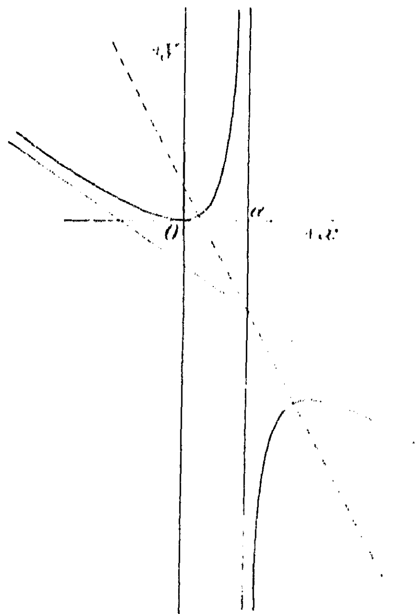


Fig. 30.

Im zweiten Falle ist y positiv, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt und wird unendlich für diese beiden Grenzwerte. y ist negativ, wenn $x > 1$ oder < -1 ist und verschwindet für ein unendlich großes x. Setzt man in diesem Falle

$$y_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x},$$

so ist $y = y_1 + y_2$, und den Ordinaten y_1, y_2 entsprechen zwei gleich-

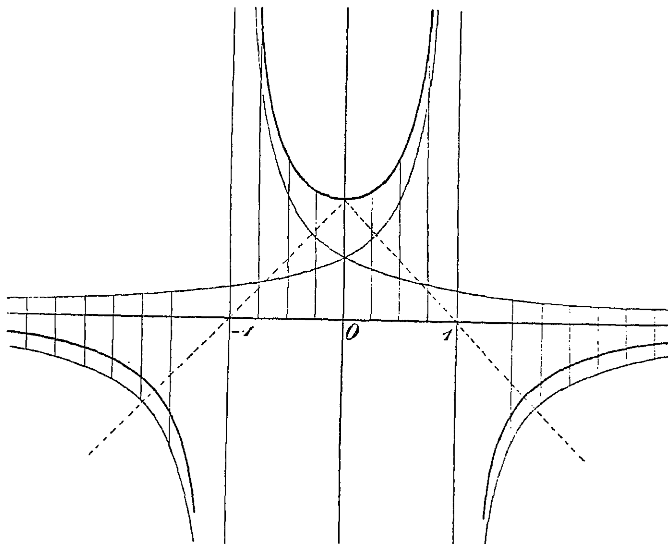


Fig. 31.

seitige Hyperbeln, aus denen die zu y gehörige Kurve sich leicht durch Superposition ergibt, wie Fig. 31 zeigt.

5. Wir haben in § 126 die Exponentialfunktion

(2) $$y = e^x$$

kennen gelernt; y hat nur positive Werte und wächst beständig mit x; es wird unendlich klein für $x = -\infty$ und unendlich groß für $x = +\infty$, ferner $y = 1$ für $x = 0$ und $y = e$ für $x = 1$. Die Fig. 32 zeigt in der punktierten Linie den Verlauf der Kurve.

Die Kurve $y = a^x = e^{x \ln a}$ hat einen ganz ähnlichen Verlauf, nur sind die Abszissen x im Verhältnis $1 : \log a$ zu verkleinern.

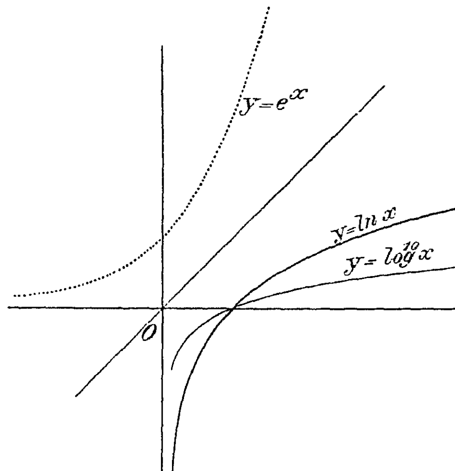


Fig. 32.

Zu einer graphisch dargestellten Funktion erhält man das Bild der inversen Funktion einfach durch Spiegelung der ersten Figur an der Halbierungslinie des ersten und dritten Quadranten. In Fig. 32 ist auf diese Weise aus der punktierten Kurve $y = e^x$ die logarithmische Kurve $y = \ln x$ abgeleitet; die dünner gezogene Linie entspricht dem Briggischen Logarithmus.

6. Wenn man in

(3) $$y = \sin x$$

den Winkel x in Bogenmaß mißt, so erhält man eine Kurve, die unter dem Namen Sinuslinie mannigfache Anwendung findet. Die Ordinate y liegt immer zwischen -1 und $+1$ und erreicht diese Werte abwechselnd für die ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$, während sie für die Vielfachen von π gleich Null wird. Die Kurve besteht aus unendlich vielen kongruenten Bogen, deren jeder wieder in zwei symmetrische Hälften zerfällt ($\sin x = \sin(\pi - x)$) (Fig. 33). Wir nennen die Kurve periodisch mit der Periode 2π.

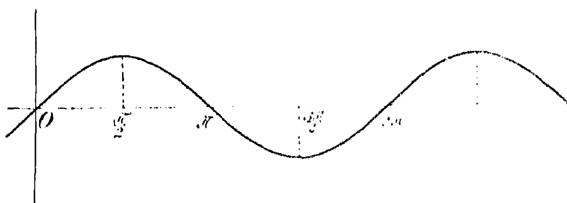


Fig. 33.

Die Kosinuslinie hat dieselbe Gestalt. Sie entsteht durch Verschiebung der Sinuslinie parallel der x-Achse um die Strecke $\frac{1}{2}\pi$, wie sich aus der Formel $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ergibt.

7. Wir wollen noch die Kurve für

(4) $$y = \operatorname{tg} x$$

betrachten. Diese besteht aus unendlich vielen kongruenten Teilen

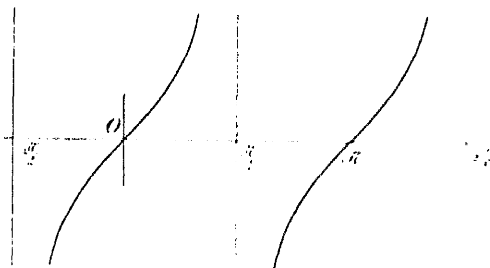


Fig. 34.

und ist ebenfalls periodisch mit der Periode π. Die Ordinate wird unendlich, wenn x ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist (Fig. 34).

Als weitere Beispiele mögen noch die Funktionen

(5) $$y = \operatorname{cosec} x = 1/\sin x,$$

(6) $$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

angeführt sein, die in der Fig. 35 und 36 durch Kurven dargestellt sind.

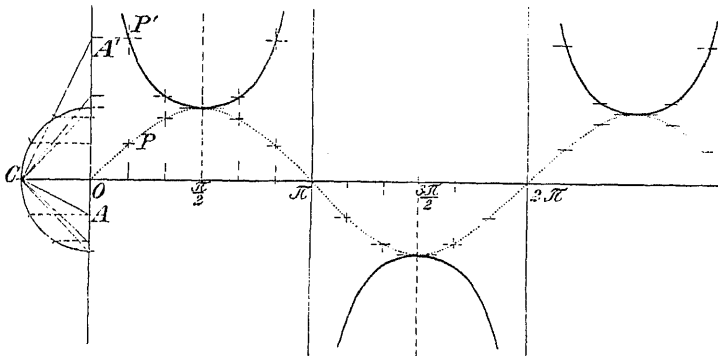


Fig. 35.

Die Kosekantenkurve $y' = 1/\sin x$ entspringt aus der Sinuskurve $y = \sin x$, indem man $yy' = 1$ nimmt. Zu dem Zwecke trage man die Ordinate eines Punktes P der Sinuskurve auf der Ordinatenachse mit umgekehrtem Vorzeichen auf; ist A der erhaltene Endpunkt und OC auf der x-Achse gleich 1, so trifft das in C auf CA errichtete Lot die y-Achse in einem Punkte A', dessen Ordinate zu der von P reziprok ist, denn $CO^2 = OA \cdot OA'$. Zu A' gehört dann ein Punkt P' der Kosekantenkurve, der OA' zur Ordinate und dieselbe Abszisse wie P hat.

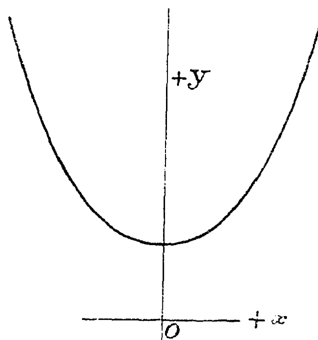


Fig. 36.

Die durch (6) dargestellte Kurve ist die Gestalt, die eine an den Enden befestigte frei herabhängende Kette annimmt; sie wird darum Kettenlinie genannt (Fig. 36).

§ 146. Differentiale und Differentialquotienten.

1. Eine Strecke PQ, die zwei Punkte einer Kurve miteinander verbindet, heißt Sehne, oder, wenn man sie unbestimmt verlängert, Sekante der Kurve.

Sind x, y die Koordinaten von P, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die von Q, und θ der Winkel, den PQ mit der positiven x-Achse einschließt, so ist

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(Fig. 37.) Die Zuwächse Δx, Δy von x und y heißen auch die Differenzen von x und y und ihr Quotient $\Delta y / \Delta x$ der Differenzenquotient.

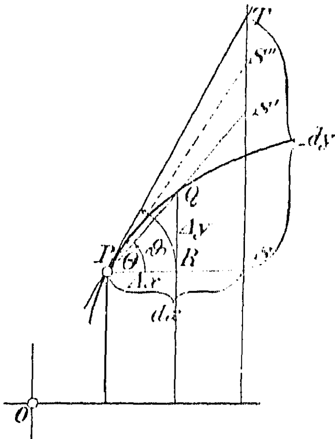


Fig. 37.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt S auf der durch P gehenden Parallelen zur x-Achse und bezeichnen PS mit dx, ferner die Strecke SS' mit δy, so ist, da die Dreiecke PQR und $PS'S$ ähnlich sind, auch

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\delta y}{dx}.$$

Wenn nun der Punkt Q gegen P hin wandert, so verändern sich Δx und Δy. Halten wir aber dx fest, so wandert S' auf der Linie ST und kommt etwa nach S''. Der Winkel θ ändert sich gleichfalls und wenn er in θ' übergeht, so ist $\operatorname{tg} \theta' = \delta' y / dx$.

Wenn sich nun der Punkt Q dem Punkt P unbegrenzt annähert, so werden Δx, Δy unendlich klein. Der Punkt S' nähert sich einer Grenzlage T, und die Grenzlage PT der Sekante heißt die Tangente der Kurve. Der Winkel θ nähert sich einem Grenzwert ϑ, und wenn wir die Strecke ST mit dy bezeichnen, so ist

$$\text{(2)} \qquad dy = \operatorname{tg} \vartheta \, dx, \qquad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}.$$

Die Strecke dy wird das Differential der Funktion y genannt. Es ist abhängig von der Lage des Punktes P auf der Kurve und von der willkürlich angenommenen Strecke dx, die das Differential von x heißt. Der Quotient $dy : dx$ ist aber von dem willkürlichen dx unabhängig und heißt der Differentialquotient

der Funktion y in bezug auf x oder nach x. Er ist ebenso wie y selbst eine Funktion von x und wird auch die abgeleitete oder derivierte Funktion von y genannt und mit y' bezeichnet. Ist $y = f(x)$ die gegebene Funktion, so ist

$$y' = f'(x) \tag{3}$$

die abgeleitete Funktion.

Der Differentialquotient ist ein Grenzwert, der sich unmittelbar in der Form $0:0$ darstellt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname*{Lim}_{\varDelta x = 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x}, \tag{4}$$

und das Differential ist, wenn dx beliebig angenommen wird,

$$dy = y' dx. \tag{5}$$

Wir fassen diese Betrachtungen in den Satz zusammen:

Die abgeleitete Funktion ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente der die Funktion y darstellenden Kurve mit der positiven x-Achse einschließt.

2. Zwei Winkel, die sich um π voneinander unterscheiden, haben dieselbe trigonometrische Tangente; sie ist positiv für einen spitzen, negativ für einen stumpfen oder einen negativen spitzen Winkel. In den Formeln (1), (2) sind θ und ϑ durch die Drehung zu messen, durch die man von der x-Achse in die Richtung der Sekante oder Tangente kommt, also negativ, wenn die Drehung von der positiven x-Achse nach der negativen y-Achse vor sich geht.

Wenn in der Formel (1) $\varDelta x$ und $\varDelta y$ das positive Zeichen haben, so sind y und x von P bis Q gewachsen; ist $\varDelta x$ positiv und $\varDelta y$ negativ, so hat y abgenommen, während x gewachsen ist. Wenn nun y' von Null verschieden ist, so wird für ein hinlänglich kleines positives $\varDelta x$ das Vorzeichen von $\varDelta y$ mit dem von y' übereinstimmen, und wir schließen:

Wenn in einem Punkte P die Derivierte y' positiv ist, so wächst y mit x und wenn y' negativ ist, so nimmt y mit wachsendem x ab.

Wenn y' in P gleich Null ist, so können wir über das Wachsen oder Abnehmen von y aus y' nichts schließen. Wenn aber y' in P beim Durchgang durch Null von negativen zu positiven Werten übergeht, so wird y aus dem Abnehmen ins Wachsen übergehen; y hat in P einen Minimumwert. Ebenso hat y einen Maximumwert,

wenn y' von positiven zu negativen Werten übergeht. In solchen Punkten ist die Tangente mit der x-Achse parallel. In unseren Figuren 30, 31, 33, 35 und 36 sind solche Punkte leicht kenntlich.

§ 147. Differentiale der einfachen Funktionen.

1. Um die abgeleitete Funktion einer Funktion $y = f(x)$ zu finden, setzt man $\Delta x = h$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ und erhält:

(1) $$y' = \operatorname{Lim}_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Kann man die Division auf der rechten Seite dieser Formel ausführen, so darf man nachher ohne weiteres $h = 0$ setzen.

So erhält man z. B. aus der Formel § 63, (5):

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1},$$

wenn man $a = x + h$, $b = x$ setzt:

$$\operatorname{Lim}_{h=0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$$

und folglich

(2) $$d(x^n) = n x^{n-1} dx,$$

und allgemein, wenn $f(x)$ eine ganze Funktion und $f'(x)$ ihre Derivierte ist:

(3) $$d f(x) = f'(x) dx,$$

wie auch aus § 66 hervorgeht.

2. Die Formel (2) ist zunächst nur für ein ganzzahliges n bewiesen. Es sei aber jetzt μ eine beliebige rationale oder irrationale Zahl, und um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, beschränken wir x auf positive Werte. Dann ist x^μ ebenfalls positiv und eindeutig bestimmt. Es sei sei jetzt

$$f(x) = x^\mu, \quad f(x+h) = (x+h)^\mu = x^\mu \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\mu,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^\mu \frac{\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\mu - 1\right)}{h}.$$

Auf der rechten Seite dieser Formel können wir, so lange $h < x$ ist, den binomischen Satz (§ 130) anwenden und erhalten:

$$\frac{x^\mu}{h}\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\mu - 1\right) = x^\mu \left(\mu \frac{1}{x} + \frac{\mu}{1} \frac{\mu - 1}{2} \frac{h}{x^2} + \cdots\right),$$

und wenn wir darin $h = 0$ setzen, so folgt:

(4) $$d(x^\mu) = \mu x^{\mu - 1} dx,$$

wie in (2).

3. Ebenso ist nach der Entwicklung § 132, (7)

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \cdots,$$

also für $h = 0$

(5) $$d \ln x = \frac{dx}{x}.$$

4. Für die Exponentialfunktion e^x ist

$$\frac{1}{h}\left(e^{x+h} - e^x\right) = e^x\left(\frac{e^h - 1}{h}\right),$$

und nach § 126:

(6) $$de^x = e^x dx.$$

5. Aus den trigonometrischen Formeln (Bd. II, § 29, (5))

$$\sin(x+h) - \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2},$$

$$\cos(x+h) - \cos x = -2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}$$

ergibt sich durch die Grenzformel $\frac{2}{h} \sin\frac{h}{2} = 1$ (§ 127, 2.),

(7) $$\begin{aligned} d \sin x &= \cos x\, dx \\ d \cos x &= -\sin x\, dx. \end{aligned}$$

§ 148. Differentiale zusammengesetzter Funktionen.

1. Sind y und z zwei Funktionen von x, so haben wir die folgenden Identitäten:

1) $$\frac{\Delta(y+z)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

2) $$\frac{\Delta(yz)}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y)(z + \Delta z) - yz}{\Delta x}$$

$$= y\frac{\Delta z}{\Delta x} + z\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x,$$

3) $$\frac{\Delta(y:z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} - \frac{y}{z}\right)$$

$$= \frac{z\frac{\Delta y}{\Delta x} - y\frac{\Delta z}{\Delta x}}{z(z + \Delta z)}.$$

2. Daraus ergeben sich nun, wenn man die Grenzwerte für $\Delta x = 0$ nimmt, die folgenden Formeln für die Differentialquotienten:

(1) $$\frac{d(y+z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx},$$

(2) $$\frac{d(yz)}{dx} = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx},$$

und als spezieller Fall hiervon, wenn man z gleich einer Kon stante c annimmt:

(3) $$\frac{d(cy)}{dx} = c\frac{dy}{dx},$$

ferner:

(4) $$\frac{d(y:z)}{dx} = \frac{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}}{z^2}.$$

Man erhält daraus entsprechende Formeln für die Differentiale

(5) $$d(y+z) = dy + dz,$$

(6) $$d(yz) = ydz + zdy,$$

(7) $$d(cy) = cdy,$$

(8) $$d\frac{y}{z} = \frac{zdy - ydz}{z^2},$$

und kann den Inhalt dieser Formeln folgendermaßen in Worte fassen:

3. Das Differential einer Summe ist gleich der Summe der Differentiale der Summanden.

4. Das Differential eines Produktes ist gleich der Summe aus dem Produkt des ersten Faktors mit dem Differential des zweiten und dem Produkt des zweiten Faktors mit dem Differential des ersten.

5. Das Differential eines Quotienten ist gleich dem Nenner multipliziert mit dem Differential des Zählers, vermindert um das Produkt aus dem Zähler mit dem Differential des Nenners, geteilt durch das Quadrat des Nenners.

6. Durch wiederholte Anwendung dieser Sätze kann man die Differentiale aller Funktionen bilden, die durch rationale Rechnung, d. h. durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division aus solchen Funktionen erhalten werden, deren Differentiale schon bekannt sind.

Nehmen wir beispielsweise in (8)

$$y = \sin x, \qquad z = \cos x,$$
$$dy = \cos x\, dx, \quad dz = -\sin x\, dx,$$

so ergibt sich

$$d\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx,$$

also:

(9) $$d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

und auf die gleiche Weise

(10) $$d\,\mathrm{cotg}\,x = \frac{-dx}{\sin^2 x}.$$

Setzt man $y = 1$, $z = \cos x$, so ergibt sich

(11) $$d\sec x = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$$

7. Ist y eine Funktion von x und z eine Funktion von y, so kann man auch z als Funktion von x ansehen und allgemein kann man irgend zwei der drei Größen x, y, z als Funktionen der dritten betrachten. Einer Zunahme Δx von x werden die Zunahmen Δy, Δz von y und z entsprechen, die Δy, Δz sind dann Funktionen von Δx, und wenn eine von ihnen unendlich klein wird, so werden es auch die beiden andern.

Ist Δz für jedes Δx gleich Null, so ist z eine Konstante.

Aus der Identität

4) $$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

folgt:

(12) $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx},$$

(13) $$dz = \frac{dz}{dy}\,dy.$$

8. Diese Formel besagt:

Ist z eine Funktion von y und y eine Funktion von x, so erhält man das Differential dz, wenn man den Differentialquotienten von z nach y mit dem Differential von y multipliziert.

Oder, anders ausgedrückt:

9. Man kann den drei Veränderlichen x, y, z drei Differentiale dx, dy, dz, von denen das eine willkürlich ist, derart zuordnen, daß der Quotient irgend zweier dieser Differentiale der Differentialquotient der entsprechenden Veränderlichen ist.

$$z = \ln y, \quad y = \sin x, \quad dy = \cos x\, dx, \quad dz/dy = 1/y,$$

so folgt:

(14) $$d \ln \sin x = \operatorname{cotg} x\, dx$$

und ebenso:

(15) $$d \ln \cos x = -\operatorname{tg} x\, dx,$$

(16) $$d \ln \operatorname{tg} x = \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{2\, dx}{\sin 2x}.$$

10. Die Formel (12) gestattet auch, die Differentiale solcher Funktionen zu bilden, die sich durch Umkehrung aus Funktionen ableiten lassen, deren Differentiale schon bekannt sind. Wenn man nämlich in (12) $z = x$ setzt, so folgt:

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1,$$

und man erhält daraus, wenn man dx/dy kennt, dy/dx als den reziproken Wert.

Nehmen wir z. B. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, so ist $x = \operatorname{tg} y$, und wir haben nach (11)

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}.$$

Es ist aber nach trigonometrischen Formeln (Bd. II. S. 308)

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

und folglich $dy = dx/(1 + x^2)$, also

(17) $$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1 + x^2};$$

oder setzen wir

$$y = \operatorname{arc} \sin x, \quad x = \sin y, \quad dx = \cos y\, dy,$$

so folgt aus $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$:

(18) $$d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Es ist nicht der Zweck dieser kurzen Andeutungen, den Leser auch nur in die Anfangsgründe der Differentialrechnung einzuführen. Es sollte nur gezeigt werden, wie aus den auf elementarem Wege gewonnenen Reihenentwicklungen sich fast von selbst die Grundbegriffe dieser Rechnung ergeben, und es sei noch die historische Bemerkung beigefügt, daß es Lagrange gewesen ist, der auf diesem Wege alle

Schwierigkeiten, die die Infinitesimalrechnung einer strengen Begründung entgegensetzt, zu überwinden gedachte.[1])

Man betrachtet die Differentialrechnung, die mit der Integralrechnung zusammen als Infinitesimalrechnung bezeichnet wird, meist als den Anfang der „höheren Mathematik", und es ist für jedes mathematische Studium und seine Anwendungen unerläßlich, sich mit ihren Methoden und ihrem Gebrauch vertraut zu machen wie mit den Formeln des Einmaleins. Das kann nur durch vielfältige Übung an Beispielen geschehen, die natürlich außerhalb des Bereiches unseres Buches fallen. Es gibt verschiedene Aufgabensammlungen, deren Gebrauch für diesen Zweck nützlich sein wird; so die von Schlömilch, von Sohncke (neu herausgegeben von Amstein), von Dölp (neu herausgegeben von Netto) und andere. Auch jedes größere Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, unter denen die von Stegemann, bearbeitet von Kiepert, und von Serret, bearbeitet von Harnack und später von Bohlmann bei uns die verbreitetsten sind, enthält reichliches Übungsmaterial. Vgl. den Bericht von Bohlmann „Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit" im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. VI. 1897.

§ 149. Die Lehrsätze von Taylor und Mac Laurin.

1. Ist $y = f(x)$ eine Funktion von x, so ist die abgeleitete $y' = f'(x)$ ebenfalls eine Funktion von x. Wenn wir von dieser wieder die abgeleitete Funktion nehmen, so erhalten wir die zweite Derivierte $f''(x)$ von $f(x)$, und wenn man so fortfährt, erhält man die Reihe der höheren Derivierten von $f(x)$:

$$(1) \qquad f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \cdots.$$

Für den Fall, daß $f(x)$ eine ganze Funktion ist, haben wir diese Funktionen in § 141 aus dem binomischen Lehrsatz abgeleitet und haben gesehen, daß diese Abgeleiteten ebenfalls ganze Funktionen sind, und daß jede folgende um einen Grad niedriger ist, als die vorhergehende. Ist also $f(x)$ vom n^{ten} Grade, so ist die n^{te} Derivierte eine Konstante, und die höhern sind gleich Null.

In einigen Fällen befolgt die Reihe der abgeleiteten Funktionen (1) ein einfaches Gesetz. Ist z. B. $y = x^{\mu}$ eine Potenz, so ergibt sich für die n^{te} Ableitung:

$$(2) \qquad y^{(n)} = \mu\,(\mu - 1) \cdots (\mu - n + 1)\, x^{\mu - n},$$

1) Lagrange, Théorie des Fonctions analytiques. Prairial an V (1797).

was auch für negative und gebrochene Exponenten μ gilt. Für $y = e^x$ werden alle Ableitungen wieder $= e^x$ und für $\sin x$, $\cos x$ erhält man für (1) die Reihe

$$(3)\qquad \begin{array}{l} \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x, \ldots \\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x, \ldots \end{array}$$

2. Es sei

$$(4)\qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

eine Potenzreihe, von der wir voraussetzen wollen, daß sie unbedingt konvergiere, so lange der absolute Wert von x gleich r oder kleiner als r sei.

Wir haben in § 124, 8. gezeigt, daß dann auch die Reihe

$$(5)\qquad \Phi(x) = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

konvergiert, so lange

$$(6)\qquad |x| < r$$

ist.

Wir beweisen den Satz:

3. Die Reihe $f(x)$ ist die abgeleitete Funktion von $\Phi(x)$.

Um ihn zu beweisen, nehmen wir x und $x+h$ so an, daß beide der Bedingung (6) genügen. Dann ist nach § 51, 5. für jeden Exponenten m:

$$(7)\qquad \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = (x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \cdots + x^{m-1} < m r^{m-1}$$

(dem absoluten Werte nach).

Setzen wir aber

$$R_n(x) = \frac{c_{n+1} x^{n+2}}{n+2} + \frac{c_{n+2} x^{n+3}}{n+3} + \cdots,$$

so ergibt sich aus (7)

$$\left|\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}\right| < |c_{n+1}|\, r^n + |c_{n+2}|\, r^{n+1} + \cdots,$$

und diese Differenz kann also wegen der vorausgesetzten unbedingten Konvergenz von (4) unabhängig von x und h kleiner gemacht werden als eine beliebig kleine Größe ω, wenn man n hinlänglich groß nimmt.

Nun ist

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = c_0 + c_1 \frac{(x+h)^2 - x^2}{2h} + \cdots + c_n \frac{(x+h)^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)h}$$
$$+ \frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}.$$

Läßt man hierin h unendlich klein werden, so erhält man nach der Definition der Derivierten:

$$\Phi'(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \varrho_n,$$

worin ϱ_n eine Größe ist, die bei hinlänglich großem n beliebig klein wird, d. h. es ist $\Phi'(x)$ die Summe der unendlichen Reihe $f(x)$, wie bewiesen werden sollte.

Die Funktion $\Phi(x)$ wird die Integralfunktion oder das Integral von $f(x)$ genannt.

Nach der Regel der Differentiation von Potenzen können wir das Theorem 3. auch so ausdrücken:

4. Man differentiiert eine Potenzreihe dadurch, daß man jedes einzelne Glied der Potenzreihe differentiiert. Der Konvergenzbereich wird dadurch nicht geändert.

5. Das Theorem 4. läßt sich auf die Funktion $f(x)$ und ihre Derivierten wiederholt anwenden, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots, \\ f'(x) &= c_1 + 2 c_2 x + 3 c_3 x^2 + 4 c_4 x^3 + 5 c_5 x^4 + \cdots, \\ f''(x) &= 2 c_2 + 2 \cdot 3 c_3 x + 3 \cdot 4 c_4 x^2 + 4 \cdot 5 c_5 x^3 + \cdots, \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3 c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 c_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5 c_5 x_2 + \cdots, \end{aligned} \tag{8}$$

und allgemein

$$f^{(n)}(x) = n!\, c_n + \frac{(n+1)!}{1!} c_{n+1} x + \frac{(n+2)!}{2!} c_{n+2} x^2 + \frac{(n+3)!}{3!} c_{n+3} x^3 + \cdots, \tag{9}$$

eine Formel, die durch vollständige Induktion leicht bewiesen wird.

5. Wenn man in den Formeln (8), (9) $x = 0$ setzt, so erhält man

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(0), \quad c_3 = \frac{1}{3!} f'''(0), \cdots,$$
$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

und daraus:

$$(10)\qquad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots.$$

Diese Formel wird die MacLaurinsche Reihe genannt.

6. Wir wollen dieser Formel noch eine andere Gestalt geben. Es sei $f(x)$ eine Funktion von x und $f'(x)$ ihre Derivierte. Wir setzen $x + h$ an Stelle von x und betrachten das eine Mal x, das andere Mal h als veränderlich. Dann ergibt sich aus § 148, (12):

$$\frac{d f(x+h)}{d h} = f'(x+h) \frac{d(x+h)}{d h} = f'(x+h),$$

und wenn wir also nach Ausführung der Differentiation $h = 0$ setzen:

$$\left(\frac{d f(x+h)}{d h}\right)_{h=0} = f'(x),$$

und entsprechendes gilt für die höheren Derivierten.

Betrachten wir also $f(x+h)$ als Funktion von h, die sich nach der Formel (10) in eine Potenzreihe nach h entwickeln läßt, so folgt:

$$(11)\qquad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots,$$

und diese Formel wird die Taylorsche Reihe genannt. Aus ihr folgt wieder die Formel (10), wenn man $x = 0$ setzt und dann x für h schreibt.[1])

7. Wir sind bei der Ableitung dieser Formeln von der Annahme ausgegangen, daß die Funktion $f(x)$ von vornherein durch eine Potenzreihe definiert sei. Wenn wir also nur die Möglichkeit einer Reihenentwicklung von der Form (10) oder (11) annehmen, so erhalten wir durch Bildung der Derivierten den Ausdruck dafür.

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine solche Entwicklung möglich ist, rechnen wir nicht mehr zu den Elementen. Ihre Beantwortung ist eines der wichtigsten und grundlegenden Probleme der Funktionentheorie.

In den besonderen Reihen, die wir im 22ten und 23ten Abschnitt betrachtet haben, finden wir die Formeln (10), (11) leicht bestätigt. Betrachten wir z. B. die Binomialreihe (§ 128, 1.)

$$(1+z)^n = 1 + B_1^{(n)} z + B_2^{(n)} z^2 + B_3^{(n)} z^3 \ldots,$$

---

1) Brook Taylor (1685—1731) gab 1715 das Werk „Methodus incrementorum" heraus, in dem diese Entwicklung enthalten ist. Colin MacLaurin (1698—1746), Treatise of fluxions, 1742, gab die Formel (10).

setzen $z = h/x$ und multiplizieren mit x^μ, so folgt:

$$(x+h)^\mu = x^\mu + B_1^{(\mu)} x^{\mu-1} h + B_2^{(\mu)} x^{\mu-2} h^2 + \cdots + B_n^{(\mu)} x^{\mu-n} h^n + \cdots,$$

woraus man durch Vergleichung mit (11) die n^{te} Ableitung von x^μ erhält:

$$B_n^{(\mu)} n! \, x^{\mu-n} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1) x^{\mu-n},$$

wie oben.

8. Wenn man die Potenzreihe (10) nach der n^{ten} Potenz von x abbricht, so ergibt sich eine ganze Funktion n^{ten} Grades, die unter der Voraussetzung der Konvergenz näherungsweise mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt. Wir erhalten für $f(x)$ eine ganze Funktion $\varphi(x)$, die für einen Wert von x $(x=0)$ samt ihren n ersten Derivierten mit $f(x)$ und seinen Derivierten übereinstimmt, und die für manche Zwecke die Funktion $f(x)$ ersetzen kann. Es gibt aber auch einen andern Weg, eine beliebige Funktion $F(x)$ näherungsweise durch eine ganze Funktion n^{ten} Grades darzustellen, nämlich wenn man eine ganze Funktion $\varphi(x)$ sucht, die für $n+1$ gegebene Werte von x:

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n$$

mit $f(x)$ übereinstimmt. Diese Aufgabe ist schon im § 69 durch die Interpolationsformel von Lagrange gelöst. Setzen wir wie dort:

$$(12) \qquad f(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

so erhalten wir nach der dortigen Formel (7)

$$(13) \qquad \varphi(x) = \frac{F(a_0)\,f(x)}{(x-a_0)\,f'(a_0)} + \frac{F(a_1)\,f(x)}{(x-a_1)\,f'(a_1)} + \cdots + \frac{F(a_n)\,f(x)}{(x-a_n)\,f'(a_n)},$$

wofür wir auch schreiben

$$(14) \qquad \varphi(x) = \sum^{a} \frac{F(a)\,f(x)}{(x-a)\,f'(a)},$$

und es ist, wie diese Formel unmittelbar zeigt:

$$\varphi(a_0) = F(a_0), \; \varphi(a_1) = F(a_1), \ldots, \varphi(a_n) = F(a_n).$$

Nehmen wir an, daß $F(x)$ selbst eine ganze Funktion von nicht höherem als n^{tem} Grade sei, so wird $\varphi(x)$ mit $F(x)$ identisch, und es folgt:

$$(15) \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum^{a} \frac{\varphi(a)}{f'(a)(x-a)}.$$

Der Ausdruck (15) wird die Zerlegung der echtgebrochenen Funktion in $\varphi(x)/f(x)$ Partialbrüche genannt.

§ 150. Integralbegriff.

1. Schon das Altertum hat sich zur Bestimmung von Flächen- oder Rauminhalten des Mittels bedient, ein solches Gebilde in Stücke zu zerlegen, die so klein gedacht werden, daß man sie ohne merklichen Fehler als durch gerade Linien oder ebene Flächen begrenzt annehmen kann, und dann die Summe aller dieser Teile zu nehmen. Das Verfahren wird exakt durch einen Grenzübergang oder durch die von Archimedes angewandte „Exhaustionsmethode“. Durch die „Integralrechnung“ wird dieses Verfahren verallgemeinert und in ein System gebracht. Die elementare Mathematik hat sich seit lange, gestützt auf eine anschauliche Evidenz, solcher Betrachtungen bedient, wenn auch ohne die Namen und Zeichen der Integralrechnung anzuwenden, und der geometrische Teil unseres Werkes enthält dafür Beispiele. Hier wollen wir nichts weiter als den Begriff des Integrals in seiner einfachsten Gestalt und in seiner analytischen Bedeutung in aller Kürze darlegen, um zu zeigen, wie er sich naturgemäß aus der elementaren Anschauung des Flächeninhaltes ergibt.

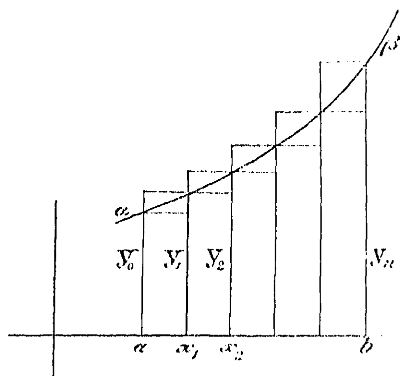


Fig. 38.

2. Es sei

(1) $$y = f(x)$$

eine beliebige Funktion von x, von der wir annehmen, daß sie zwischen $x = a$ und $x = b$ stetig wachse. Sie werde durch den Kurvenbogen $\alpha\beta$ in Fig. 38 dargestellt; es soll der Inhalt S des Flächenstücks $(ab\beta\alpha)$ ermittelt werden.

Wir teilen das Intervall $b - a = \Delta$ in n gleiche Teile von der Größe Δ/n und errichten in den Teilpunkten $a, x_1, x_2, \ldots, b$ die Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Die Figur 38 zeigt uns dann zwei aus Rechtecken zusammengesetzte Flächen S_1, S_2, von denen die eine ganz in S enthalten ist, die andere S enthält, und es ist daher

(2) $$S_1 < S < S_2,$$

wenn

(3) $$S_1 = \frac{\Delta}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}),$$
$$S_2 = \frac{\Delta}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Der Unterschied dieser beiden Summen ist

$$S_2 - S_1 = \frac{\Delta}{n}[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})],$$

und wenn σ die größte unter den Differenzen $(y_1 - y_0)$, $(y_2 - y_1), \ldots,$ $(y_n - y_{n-1})$ ist, so ist

$$S_2 - S_1 < \sigma\Delta. \tag{4}$$

Da die Funktion y stetig vorausgesetzt ist, so wird σ unendlich klein, wenn n unendlich groß wird. S_1 und S_2 nähern sich daher einander beliebig an, und sie bilden einen Dedekindschen Schnitt, der uns eine — im allgemeinen irrationale — Zahl S definiert, die zugleich die obere Grenze aller S_1 und die untere Grenze aller S_2 ist. Diese Zahl S drückt den gesuchten Flächeninhalt aus. Sie ist bestimmt durch die Funktion $y = f(x)$ und durch die Grenzen a, b des Intervalls Δ.

Diese Zahl S heißt das Integral der Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b. Sie wird bezeichnet mit

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

wobei man sich unter $f(x)\,dx = y\,dx$ den Flächeninhalt eines unendlich klein gewordenen Elementarrechtecks denkt und unter $\int$ ein Summenzeichen versteht.

Wenn die Funktion $f(x)$ von a bis b nicht wächst, sondern abnimmt, so ist der Schluß derselbe, nur mit dem Unterschiede, daß in der Ungleichung (2) das Zeichen $<$ durch $>$ zu ersetzen ist.

Wenn aber die Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen a, b aus dem Wachsen ins Abnehmen übergeht oder umgekehrt, so teilt man das Intervall in zwei oder mehrere Teile, auf deren jeden einzelnen dieselbe Betrachtung angewandt wird. Immer ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\Delta}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) \tag{6}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\Delta}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

3. Als Beispiel nehmen wir die Funktion $y = x^k$, worin x eine ganze Zahl ist. Wir wollen außerdem $a = 0$ und folglich $\Delta = b$ setzen.

Es wird dann

$$y_1 = \left(\frac{b}{n}\right)^k, \quad y_2 = \left(\frac{2b}{n}\right)^k, \quad y_3 = \left(\frac{3b}{n}\right)^k, \ldots, y_n = \left(\frac{nb}{n}\right)^k$$

und folglich:

(7) $$S_2 = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}\left(1^k + 2^k + \cdots + n^k\right) = \frac{b^{k+1}\sigma_n}{n^{k+1}}.$$

Die Summanden in der hier vorkommenden Summe

$$\sigma_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

bilden eine arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung und die Summen σ_1, $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ selbst eine arithmetische Reihe $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Es ist also σ_n nach § 62, 2. ein Ausdruck von der Form

(8) $$\sigma_n = \alpha_0 B_0^{(n)} + \alpha_1 B_1^{(n)} + \cdots + \alpha_{k+1} B_{k+1}^{(n)},$$

worin die $B_h^{(n)}$ die Binomialkoeffizienten und die α_h von n unabhängig sind. Darin läßt sich α_{k+1} leicht bestimmen, denn es ist

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = n^k$$

$$= \alpha_1\left(B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}\right) + \alpha_2\left(B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}\right) + \cdots + \alpha_{k+1}\left(B_{k+1}^{(n)} - B_{k+1}^{(n-1)}\right),$$

also nach § 57 (7):

(9) $$n^k = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{k+1} B_k^{(n-1)}.$$

Diese Gleichung muß für jedes n befriedigt sein, und da eine Gleichung k^{ten} Grades nicht mehr als k Wurzeln haben kann, so muß sie in bezug auf n identisch sein. Die Binomialkoeffizienten $B_0^{(n-1)}, \ldots, B_{k-1}^{(n-1)}$ sind aber alle in bezug auf n von niedrigerem als dem k^{ten} Grade, und nur

$$B_k^{(n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}$$

ist vom k^{ten} Grade, und demnach ergibt die Vergleichung der rechten und linken Seite in (9):

(10) $$\alpha_{k+1} = k!.$$

Gehen wir also in dem Quotienten σ_n/n^{k+1} zur Grenze $n = \infty$ über, so verschwinden

$$\frac{B_0^{(n)}}{n^{k+1}}, \quad \frac{B_1^{(n)}}{n^{k+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{B_k^{(n)}}{n^{k+1}},$$

weil die Zähler alle in bezug auf n von niedrigerem Grade sind als der Nenner, dagegen ist

$$\frac{B_{k+1}^{(n)}}{n^{k+1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{n^{k+1}(k+1)!}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{n}\right),$$

und der Grenzwert davon ist $1/(k+1)!$. Es ist daher

$$\operatorname{Lim} \frac{\sigma_n}{n^{k+1}} = \frac{\alpha_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1},$$

und wir erhalten aus (7) den Grenzwert von S_2:

(11) $$\int_0^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}.$$

4. Aus der Erklärung des Integrals durch die Summen (6) ergibt sich unmittelbar, indem man y als Summe von zwei Funktionen $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ annimmt, wenn c_1, c_2 konstante Faktoren sind:

(12) $$\int_a^b (c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x))\,dx = c_1\int_a^b \varphi_1(x)\,dx + c_2\int_a^b \varphi_2(x)\,dx,$$

und entsprechendes gilt auch für Summen aus mehreren Gliedern.

Demnach kann man aus (11) ohne weiteres das Integral einer ganzen Funktion ableiten:

Ist
$$f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m$$
eine ganze Funktion m^{ten} Grades, so ergibt sich:

(13) $$\int_0^b f(x)\,dx = \gamma_0 b + \frac{\gamma_1 b^2}{2} + \frac{\gamma_2 b^3}{3} + \cdots + \frac{\gamma_m b^{m+1}}{m+1}.$$

Fassen wir diese Summe als Funktion $\Phi(b)$ von b auf, so ist $\Phi(b)$ die Integralfunktion für $f(b)$ in demselben Sinne, wie wir diesen Ausdruck in § 149, 3. gebraucht haben. Durch Zerlegung der Summe S ergibt sich:

(14) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

5. Die Wertereihe für x von a bis b heißt das Integrationsintervall. Man kann dieses immer auf die Zahlen von -1 bis $+1$ zurückführen durch folgendes Verfahren. Man setze:

(15) $$t = \frac{2x - b - a}{b - a}, \quad x = \tfrac{1}{2}(t(b-a) + (b+a)).$$

Wenn x die Werte a bis b stetig wachsend durchläuft, so durchläuft t die Werte von -1 bis $+1$ gleichfalls stetig wachsend, und eine Funktion $y = f(x)$ von x ist zugleich eine Funktion $\varphi(t)$ von t, wenn wir

(16) $$y = f(\tfrac{1}{2}(t(b-a) + b + a)) = \varphi(t)$$

setzen. Den Teilpunkten $a, x_1, x_2, \ldots, b$ in Fig. 38 entsprechen die

Teilpunkte $-1, -1+\frac{2}{n}, -1+\frac{4}{n}, \cdots, +1$ für t und die Ordinaten

$$y_0 = \varphi(-1), \quad y_1 = \varphi\left(-1+\frac{2}{n}\right), \quad \cdots, \quad y_n = \varphi(+1).$$

Demnach ist $\int\limits_{-1}^{+1}\varphi(t)\,dt$ der Grenzwert der beiden Summen

$$\frac{2}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}), \quad \frac{2}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n),$$

und wir erhalten, wenn wir wieder $\Delta = b - a$ setzen:

$$(17) \qquad \frac{\Delta}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\varphi(t)\,dt = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b y\,dx,$$

und für eine ganze Funktion

$$F(x) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots$$

ergibt sich nach (13) und (14)

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}F(t)\,dt = C_0 + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \cdots,$$

worin rechts nur die C_i mit geradem Index i stehen bleiben.

§ 151. Genäherte Berechnung von Integralen.

1. Da wir also das Integral einer ganzen Funktion leicht finden können, und da wir, sei es durch die Taylorsche Reihe, sei es durch die Lagrangesche Formel, jede Funktion angenähert durch eine ganze Funktion ersetzen können, so ergeben sich daraus verschiedene Wege, Integrale näherungsweise zu bestimmen. Die Betrachtung vereinfacht sich wesentlich, wenn wir das Intervall nach § 150, 5. auf -1 bis $+1$ reduzieren.

Es sei also die Variable t auf das Intervall $-1, \ldots, 1$ beschränkt und $\varphi(t)$ eine beliebige Funktion. Wir wollen eine ganze Funktion n^{ten} Grades $\Phi(t)$ bestimmen, die für $n+1$ Werte

$$(1) \qquad t = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

mit $\varphi(t)$ übereinstimmt. Man setze:

$$(2) \qquad \varphi(\alpha_0) = y_0, \quad \varphi(\alpha_1) = y_1, \quad \ldots, \quad \varphi(\alpha_n) = y_n,$$

$$(3) \qquad f(t) = (t-\alpha_0)(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$$
$$= t^{n+1} + c_1 t^n + c_2 t^{n-1} + \cdots + c_n t + c_{n+1},$$

und erhält nach § 149, (13), (14):

$$(4)\qquad \Phi(t) = \frac{y_0 f(t)}{(t-\alpha_0)f'(\alpha_0)} + \frac{y_1 f(t)}{(t-\alpha_1)f'(\alpha_1)} + \cdots + \frac{y_n f(t)}{(t-\alpha_n)f'(\alpha_n)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i f(t)}{(t-\alpha_i)f'(\alpha_i)}.$$

Der Quotient $f(t)/(t-\alpha_i)$ ist eine ganze Funktion n^{ten} Grades von t, dessen Integral sich nach § 150 bestimmen läßt. Man erhält zunächst für jedes α der Reihe (1):

$$(5)\quad \frac{f(t)}{t-\alpha} = q_0(\alpha)\,t^n + q_1(\alpha)\,t^{n-1} + q_2(\alpha)\,t^{n-2} + \cdots + q_{n-1}(\alpha)\,t + q_n(\alpha),$$

worin die $q_n(\alpha)$ ganze Funktionen von α sind, die nach § 66, (6) den Ausdruck haben:

$$(6)\qquad \begin{aligned} q_0(\alpha) &= 1, \\ q_1(\alpha) &= \alpha + c_1, \\ q_2(\alpha) &= \alpha^2 + c_1\alpha + c_2, \\ q_3(\alpha) &= \alpha^3 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha + c_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_n(\alpha) &= \alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} + \cdots + c_n. \end{aligned}$$

Wir schreiben (5) in umgekehrter Ordnung:

$$\frac{f(t)}{t-\alpha} = q_n(\alpha) + q_{n-1}(\alpha)\,t + q_{n-2}(\alpha)\,t^2 + \cdots + q_0(\alpha)\,t^n$$

und setzen:

$$(7)\qquad S(\alpha) = \frac{1}{2f'(\alpha)}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-\alpha}\,dt$$

$$= \frac{1}{f'(\alpha)}\left(q_n(\alpha) + \frac{q_{n-2}(\alpha)}{3} + \frac{q_{n-4}(\alpha)}{5} + \cdots\right),$$

und dieser Ausdruck endigt mit $q_1(\alpha)/n$ oder mit $1/(n+1)$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Dann folgt aus (4) die Näherungsformel:

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1}\varphi(t)\,dt = 2\sum_{i=0}^{n} y_i\,S(\alpha_i)$$

und folglich nach § 150, (17):

$$(9)\qquad \int_a^b y\,dx = (b-a)\sum y_i\,S(\alpha_i).$$

Wenn die α_i bekannt sind, so lassen sich die $S(\alpha_i) = S_i$ nach (7) berechnen, und sie sind unabhängig von der besonderen Funktion y, um deren Integration es sich handelt.

2. Nimmt man z. B. $n = 2$, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, so erhält man:

$$f(t) = t^3 - t,$$

$$f'(t) = 3t^2 - 1,$$

$$f'(-1) = f'(+1) = 2, \quad f'(0) = -1,$$

$$\varphi_2(t) = t^2 - 1,$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}\left(\varphi_2(\alpha) + \frac{1}{3}\right),$$

also:

$$S(-1) = S(+1) = \frac{1}{6}, \quad S(0) = \frac{2}{3},$$

und folglich ergibt die Formel (9) den genäherten Wert:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{10}$$

Diese Formel wird die Simpsonsche Regel genannt. Ihre geometrische Bedeutung ist die, daß die gegebene Kurve durch eine Parabel ersetzt wird, bei der die beiden End ordinaten und die mittlere Ordinate mit den gegebenen Ordinaten übereinstimmen.

Ist die Genauigkeit dieser Formel nicht groß genug, so kann man das gegebene Intervall in mehrere Teile teilen und auf jeden dieser Teile die Formel (11) anwenden.[1])

3. Die Formel (8) gibt den genauen Wert des Integrals $\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt$, wenn $\varphi(t)$ eine ganze Funktion ist, die den n^{ten} Grad nicht übersteigt, wie auch die α_i gewählt sein mögen, weil unter dieser Voraussetzung $\Phi(t)$ mit $\varphi(t)$ übereinstimmt. Um ein Urteil über die Genauigkeit der Formel (9) zu gewinnen, wollen wir sie auf den Fall anwenden, daß $\varphi(t) = t^m$ und $m > n$ ist. Bezeichnen wir den Wert, um den die linke Seite der Formel (9) in diesem Falle zu groß ist, mit D_m, so ist, weil

$$\int_{-1}^{+1} t^m\,dt = \frac{2}{m+1} \quad \text{oder} \quad = 0$$

---

1) Thomas Simpson, englischer Mathematiker, geboren 1710, wirkte in London und Woolwich und starb 1761 in seinem Geburtsort Market-Bosworth, Leicestershire.

ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, nach (8):

$$D_m = 2 \sum \alpha_i^m S(\alpha_i) - \frac{\delta}{m+1},$$

worin $\delta = 0$ oder gleich 2 ist, je nachdem m ungerade oder gerade ist.

Setzen wir für $S(\alpha_i)$ den ersten Ausdruck (7) ein, so folgt:

(11) $$D_m = \int_{-1}^{+1} f(t) \sum^{i} \frac{\alpha_i^m}{(t-\alpha_i) f'(\alpha_i)}\, dt - \frac{\delta}{m+1}.$$

4. Diese Formel (11) ergibt den Wert 0, wenn $m < n$ ist; dies folgt, wenn man in § 149, (15) $\varphi(x) = x^m$ setzt. Ist aber $m > n$, so dividiere man t^m nach § 66 durch $f(t)$. Man erhält dann einen Quotienten Q_m und einen Rest $R_m(t)$, dessen Grad höchstens gleich n ist:

(12) $$t^m = Q_m f(t) + R_m(t),$$

und da $f(\alpha_i) = 0$ ist, so ist

$$R_m(\alpha_i) = \alpha_i^m.$$

Da nun $R_m(t)/f(t)$ eine echt gebrochene Funktion ist, so haben wir nach § 149, (15):

$$\frac{R_m(t)}{f(t)} = \sum^{i} \frac{R_m(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)(t-\alpha_i)} = \sum \frac{\alpha_i^m}{(t-\alpha_i) f'(\alpha_i)},$$

und die Formel (11) gibt:

(13) $$D_m = \int_{-1}^{+1} R_m(t)\, dt - \frac{\delta}{m+1}.$$

Setzen wir

(14) $$R_m(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2 + \cdots + \varepsilon_n t^n,$$

so ergibt sich hieraus:

(15) $$D_m = 2\varepsilon_0 + \frac{2\varepsilon_2}{3} + \frac{2\varepsilon_4}{5} + \cdots - \frac{\delta}{m+1},$$

und es kommen in D_m nur die ε_i mit geradem Index vor.

Ist also y eine ganze Funktion m^{ten} Grades, oder durch eine ganze Funktion m^{ten} Grades mit hinlänglicher Genauigkeit (etwa durch die Taylorsche Reihe) dargestellt:

$$y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m,$$

so ist der Fehler der Formel (8):

(16) $$D = C_{n+1} D_{n+1} + C_{n+2} D_{n+2} + \cdots + C_m D_m.$$

5. Um bei gegebener Funktion $f(t)$, also bei gegebenen α_i die Fehlergröße zu berechnen, hat man nur die Divisionen (12) auszuführen. Die Genauigkeit des Verfahrens wird um so größer sein, je mehr von den D_{n+1}, D_{n+2}, ... verschwinden. Da wir $n+1$ verfügbare α_i oder verfügbare Koeffizienten in $f(t)$ haben, so werden wir über diese so verfügen können, daß

$$D_{n+1} = 0, \quad D_{n+2} = 0, \quad \ldots, \quad D_{2n+1} = 0 \tag{17}$$

wird.[1] Dann bleibt die Formel (9) exakt, wenn y bis zum Grade $2n+1$ ansteigt, und man kommt mit $n+1$ Zwischenwerten so weit, als ob man $2n+1$ Zwischenwerte aufs Geradewohl ausgewählt hätte.

6. Wenn die $n+1$ Größen α_i bei ungeradem n paarweise entgegengesetzt sind, und bei geradem n außerdem noch den Wert 0 enthalten, so ist $f(t)$ bei geradem n eine ungerade Funktion und bei ungeradem n eine gerade Funktion:

$$f(t) = t^{n+1} + c_2 t^{n-1} + c_4 t^{n-3} + \cdots, \tag{18}$$

folglich ist, wie aus (12) hervorgeht, wenn man t mit $-t$ vertauscht, $R_m(t)$ bei geradem m eine gerade, bei ungeradem m eine ungerade Funktion, und es ergibt sich aus (15) und aus der Bedeutung von δ, daß alle D_m mit ungeradem m verschwinden.

Hieraus ergibt sich beispielsweise, daß die Simpsonsche Regel nicht nur für Funktionen 2ten Grades, sondern auch für Funktionen 3ten Grades exakt ist.

7. Für das Gaußsche Verfahren, das auf den Gleichungen (17) beruht, wollen wir einige Beispiele betrachten.

Nehmen wir $n = 0$, so wird $f(t) = t$, $\alpha_0 = 0$ und $S(\alpha_0) = 1$, also

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\,y_0.$$

Hier wird also einfach die Funktion y ersetzt durch eine Konstante, die gleich der mittleren Ordinate y_0 der Kurve ist, also die Fläche durch ein Rechteck, dessen Basis gleich dem Intervall $b-a$ und dessen Höhe gleich der mittleren Ordinate y_0 ist; daß bei dieser Annahme die Formel (9) noch richtig bleibt, wenn y eine Funktion ersten Grades ist, also die Kurve eine gerade Linie, leuchtet auch geometrisch ein.

8. Es sei $n = 1$, $f(t) = t^2 + c$; man erhält

$$t^2 = f(t) - c, \quad R_2 = -c, \quad D_2 = -2\left(c + \tfrac{1}{3}\right),$$

1) Gauß, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi (Göttingen 1816, Werke Bd. III, S. 165).

also wird $D_2 = 0$, wenn $c = -\frac{1}{3}$ gesetzt wird, und man erhält

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad q_1(t) = t, \quad S(\alpha) = \frac{1}{2},$$

$$\int_a^b y\, dx = (b-a)\frac{y_0 + y_1}{2}.$$

Hierin sind y_0, y_1 die den Werten $t = \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0{,}18257$ entsprechenden Ordinaten. Die Kurve wird durch eine gerade Linie ersetzt, die durch die zwei Punkte der Kurve $t = -1/\sqrt{3}$, $y = y_0$, $t = +1/\sqrt{3}$, $y = y_1$ geht, und die Formel ist exakt, wenn y zur dritten Ordnung ansteigt (ebenso wie die Simpsonsche Formel).

9. Für $n = 2$ ist $f(t) = t^3 + ct$, $q_2(t) = t^2 + c$ zu setzen, und es ergibt sich

$$t^4 = tf(t) - ct^2, \quad D_4 = -\frac{2c}{3} - \frac{2}{5}, \quad D_5 = 0,$$

also aus $D_4 = 0$:

$$c = -\frac{3}{5}$$

und:

$$\alpha_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$S(\alpha_0) = S(\alpha_2) = \frac{5}{18}, \quad S(\alpha_1) = \frac{4}{9},$$

und folglich

$$\int_a^b y\, dx = \frac{b-a}{18}(5y_0 + 8y_1 + 5y_2).$$

Die Kurve ist hier durch eine Parabel ersetzt, die durch die Punkte mit den Abszissen $t = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0{,}2449490$, $t = 0$ geht, und die Formel ist exakt bis zu Funktionen 5ter Ordnung.

Um die Funktionen $f(t)$ für höhere Werte von n aus den Bedingungen (17) zu bestimmen, hat Gauß besondere Hilfsmittel geschaffen. Man kommt dabei auf die sogenannten Kugelfunktionen, die in der mathematischen Physik viel gebraucht werden, und es läßt sich mittels des Sturmschen Satzes nachweisen, daß die so gefundene Funktion $f(t)$ immer $n + 1$ reelle Wurzeln zwischen $+1$ und -1 hat, wie es sein muß.[1])

---

1) Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. II, Teil I. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., Bd. I, § 93.

10. Gauß wendet seine Methode auf das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x}$$

an, für $a = 100\,000$, $b = 200\,000$, das dadurch von Interesse ist, daß es für große Werte von a und b einen angenäherten Ausdruck für die Anzahl der zwischen a und b gelegenen Primzahlen gibt, ein Gesetz, das allerdings bis jetzt nur empirisch festgestellt ist. Die Kurve $y = 1/\ln x$ nähert sich, ähnlich wie eine Hyperbel, asymptotisch der x-Achse.

Die Simpsonsche Regel gibt:

$$\frac{100\,000}{6}\left(\frac{1}{5\ln 10} + \frac{4}{\ln 15 + 4\ln 10} + \frac{1}{\ln 20 + 4\ln 10}\right).$$

Es ist auf 5 Stellen genau

$$\ln 10 = 2{,}30259,$$
$$\ln 15 = 2{,}70805,$$
$$\ln 20 = 2{,}99573,$$

und der Wert der Summe ergibt sich etwa gleich

$$8404{,}573\ldots$$

Das Gaußsche Verfahren gibt für $n = 0, 1, 2$ auf drei Dezimalstellen:

$$8390{,}395,$$
$$8405{,}955,$$
$$8406{,}237.$$

Der genaue Wert, den Bessel berechnet hat, ist

$$8406{,}243,$$

und die Anzahl der Primzahlen zwischen 100 000 und 200 000 findet sich gleich 8372.

Alphabetisches Register.

Die Zahlen geben die Seitenzahlen an.

Verbesserungen.

Seite 5 Zeile 14 v. u. statt wieder lies dieses.

„ 181 „ 3 v. u. „ $\binom{x}{b'x + b'}$ „ $\binom{x}{a'x + b'}$.

„ 1 v. u. „ $\binom{x}{4x + 3}$ „ $\binom{x}{4x + 4}$.

„ 189 „ 6 v. o. ist α zu streichen.

„ 191 „ 4 v. u. statt a_{n,α_n} lies a_{ν_n,α_n}.

„ 194 „ 2 v. o. statt $A_{k,i}$, $A_{k,i}$ lies $A_{k,1}$, $A_{k,2}$.

„ 198 „ 8 v. o. „ $B_n^{(m)}$ „ $B_m^{(n)}$.

„ 226 „ 15 v. o. „ $F'(x)$ „ $\varphi(x)$.

„ 275 „ 15 v. o. ist die Zahl 7 zuzufügen.

„ 301 „ 6 v. u. statt $Q_2 = q$ lies $Q_2 = q_1$.

„ 302 „ 5 und 4 v. u. sind die Worte „$Q_1 = Q_2$“ und „und von Q_2“ zu streichen.

„ 304 „ 16 v. u. sind die Indices 0, 1, 2, 3 von P und Q durch 1, 2, 3, 4 zu ersetzen.

„ 310 Hier ist noch zu erwähnen, daß es Lagrange war, der zuerst die Lösbarkeit der Pellschen Gleichung allgemein bewiesen hat. (Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra 1784, deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 103.)

„ 348 Zeile 15 v. o. statt $f(x_1)$ lies $f_1(x_1)$.

Berichtigungen zum II. Band (1. Aufl.).

Seite 136, Anm. ist bezüglich der elliptischen Geometrie mißverständlich. Die Absolute ist in diesem Falle, wie Seite 82 und öfter bemerkt, imaginär, aber eine gewisse für sie charakteristische Konstante (R des § 11) ist sehr groß.

„ 141, Zeile 23 v. o. lies: „so ist diese Bewegung in der Euklidischen Geometrie mit exakt, in den beiden Nichteuklidischen mit angenähert parallelen Bahnen möglich“. In der hyperbolischen ist auch die Geradlinigkeit nur angenähert.

„ 162, Zeile 7 v. u. statt § 20 lies § 12.

„ 222, Zeile 18 v. o. Die Worte „also auch das Stetigkeitsaxiom“ sind zu streichen (vgl. Hilbert, Grundlagen, § 12).

„ 262. Die Geraden des Streckenzugs UV müßten eigentlich den Kreis berühren.

„ 270, Anm. Die von Mahler (Zeitschrift f. äg. Sprache, Bd. 40) berechnete Regierungszeit Amenemhets III. ist neuerdings (l. c. 41) bestritten worden.